

Integrarea prin părți

Elaborat de Alexei Elistratov

Astăzi vom studia

- Formula integrării prin părți și aplicarea ei
- Integrale care conțin sub semnul lor în calitate de factor una din funcțiile: $\ln(x)$, $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctg(x)$
- Integrale de formă $\int P_n(x) \cos(cx) dx$, $\int P_n(x) \sin(cx) dx$, $\int P_n(x) e^{cx} dx$, unde $c \in \mathbb{R}^*$, $P_n(x)$ este funcție polinomială asociată polinomului $P(X)$ de grad n .

Să se pune problema cum calculăm integrala produsului a două funcții, mai ales că – așa cum am văzut – nu are sens să definim produsul a două integrale. Un răspuns parțial este dat de metoda integrării prin părți. Cadrul teoretic este dat de următoarea:

Teoremă: Dacă $u, v : I \rightarrow R$ sunt funcții derivabile, iar funcția $u'v$ are primitive, atunci și funcția uv' are primitive și există egalitate :

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

sau, în notație diferențială :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Haideți să rezolvăm!

$$\int x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad dv = x dx \\ du = \frac{dx}{x} \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right|$$

Aplicând formula $\int u dv = uv - \int v du$

obținem :

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} * \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\int x^2 \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad dv = \sin x dx \\ du = 2x dx \quad v = -\cos x \end{array} \right|$$

Aplicând formula $\int u dv = uv - \int v du$

obținem :

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = 2x \quad dv = \cos x dx \\ du = 2 dx \quad v = \sin x \end{array} \right|$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

Nr.	Integrale nedefinite
1	$\int dx = x + C$
2	$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$
3	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
4	$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$
5	$\int e^x dx = e^x + C$
6	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
7	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
8	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
9	$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C$
10	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
11	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln x + \sqrt{x^2 - a^2} + C$
12	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$
13	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
14	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$
15	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
16	$\int \cos x dx = \sin x + C$
17	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$
18	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$
19	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$
20	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$
21	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \sqrt{x^2 - a^2} + C$
22	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sqrt{x^2 + a^2} + C$
23	$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$
23	$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$

$$1. \quad d \int f(x) dx = f(x) dx$$

$$2. \quad \int F'(x) dx = \int dF(x) = F(x) + C$$

$$3. \quad \int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$$

$$4. \quad \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$