РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

УРАВНЕНИЯ, СВОДЯЩИЕСЯ К АЛГЕБРАИЧЕСКИМ

ПОВТОРЕНИЕ: РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

$\cos x = a$

Если $|a| > 1$ уравнение не имеет решения.

Если $|a| \leq 1$ $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$

подробно

$\sin x = a$

Если $|a| > 1$ уравнение не имеет решения.

Если $|a| \leq 1$ $x = (-1)^{к} \arcsin a + \pi к, к \in Z$

подробно

ПОВТОРЕНИЕ: РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

$tg\, x = a$

$x = arctg\, a + \pi n, n \in Z$

$a \in (-\infty, +\infty)$

подробно

$ctg\, x = a$

$x = arcctg\, a + \pi n, n \in Z$

$a \in (-\infty, +\infty)$

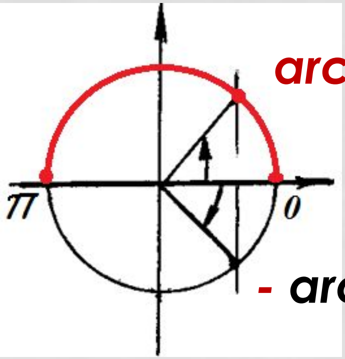
подробно

ПОВТОРЕНИЕ: ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

$\arccos a = \alpha$, (! $-1 \le a \le 1$)

если $\cos \alpha = a$, $\quad 0 \le \alpha \le \pi$

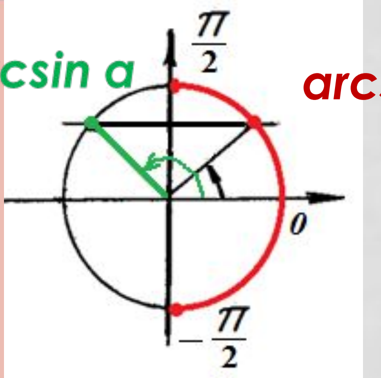
$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$



$\arcsin a = \alpha$, (! $-1 \le a \le 1$)

если $\sin \alpha = a$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$

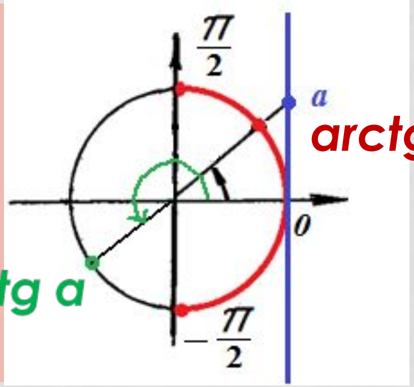


ПОВТОРЕНИЕ: ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

arctg a=α, ($a \in R$)

если $\mathbf{tg}\ \alpha = \mathbf{a},\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

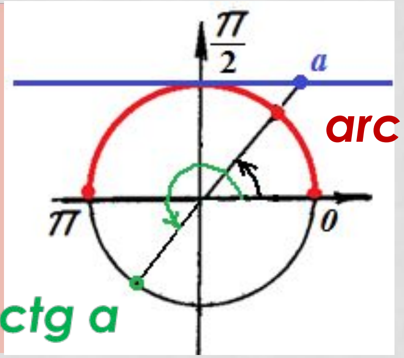
arctg (-a)= − arctg a



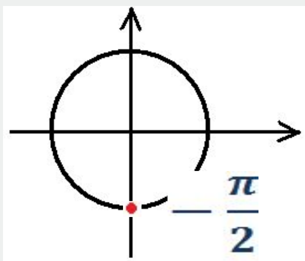
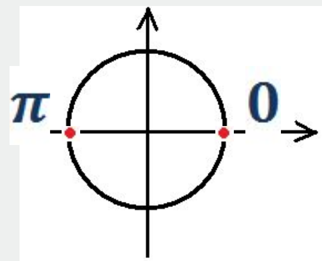
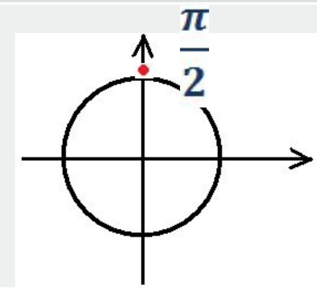
arcctg a=α, ($a \in R$)

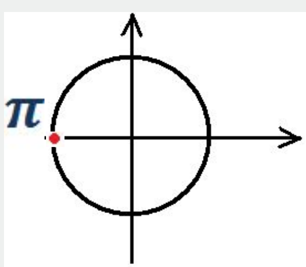
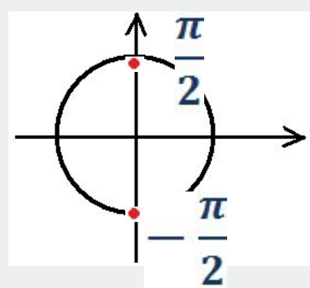
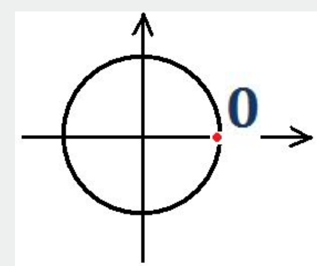
если $\mathbf{ctg}\ \alpha = \mathbf{a},\ 0 \le \alpha \le \pi$

arcctg (-a)= π − arcctg a



РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

$\sin x = -1$	$\sin x = 0$	$\sin x = 1$
$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$	$x = \pi n, n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$
		

$\cos x = -1$	$\cos x = 0$	$\cos x = 1$
$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	$x = 2\pi n, n \in Z$
		

5 Уравнения, приводимые к алгебраическим

С помощью замены переменной можно привести тригонометрическое уравнение к алгебраическому. Рассмотрим несколько типов уравнений:

Тип уравнения	Замена	Алгебраическое уравнение
$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$	$t = \cos x$	$\text{а}t^2 + \text{в}t + \text{с} = 0$
$a\sin^2 x + b\cos x + c = 0$	$t = \sin x$	$\text{а}t^2 - \text{в}t - (\text{а} + \text{с}) = 0$
$\text{а}\,tg\,x + \text{в}\,ctg\,x + \text{с} = 0$	$t = tgx$	$\text{а}t^2 + ct + \text{в} = 0$

Задача 1

Задача 2

Задача 3

Задача 1 а) решите уравнение $6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0.$

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

5

Пусть t=cos x, $|t| \le 1^*$, *тогда*

$$6t^2 - 7t - 5 = 0$$

$$D = 49 + 120 = 169$$

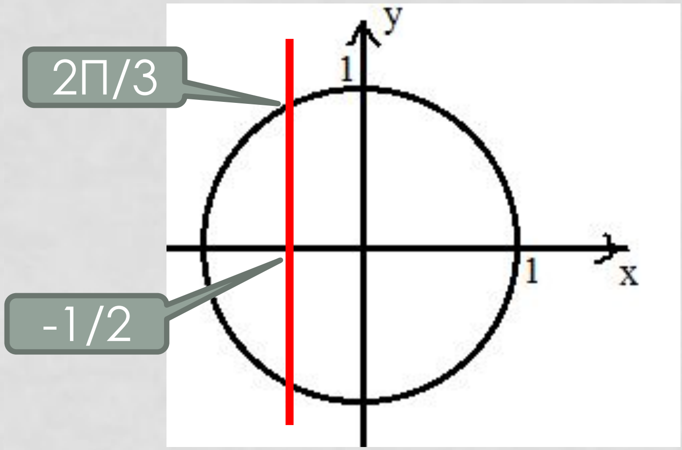
$t_1 = \frac{7+13}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ *не удовл. усл.* * $\quad t_2 = \frac{7-13}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$

Обратная замена:

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z$$

а) Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\quad n\epsilon Z$



Задача 1 а) решите уравнение $6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0.$

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi].$

5

а) Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$

б) (1 способ) Найдем корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi].$
Решим неравенства:

$-\pi \le -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \le k \le \frac{4}{3},$ *Откуда k=0 или k=1*

$-\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{6} \le k \le \frac{2}{3}$ *Откуда k=0*

Значит, условию задачи удовлетворяют корни $-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}.$

б) Ответ: $-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

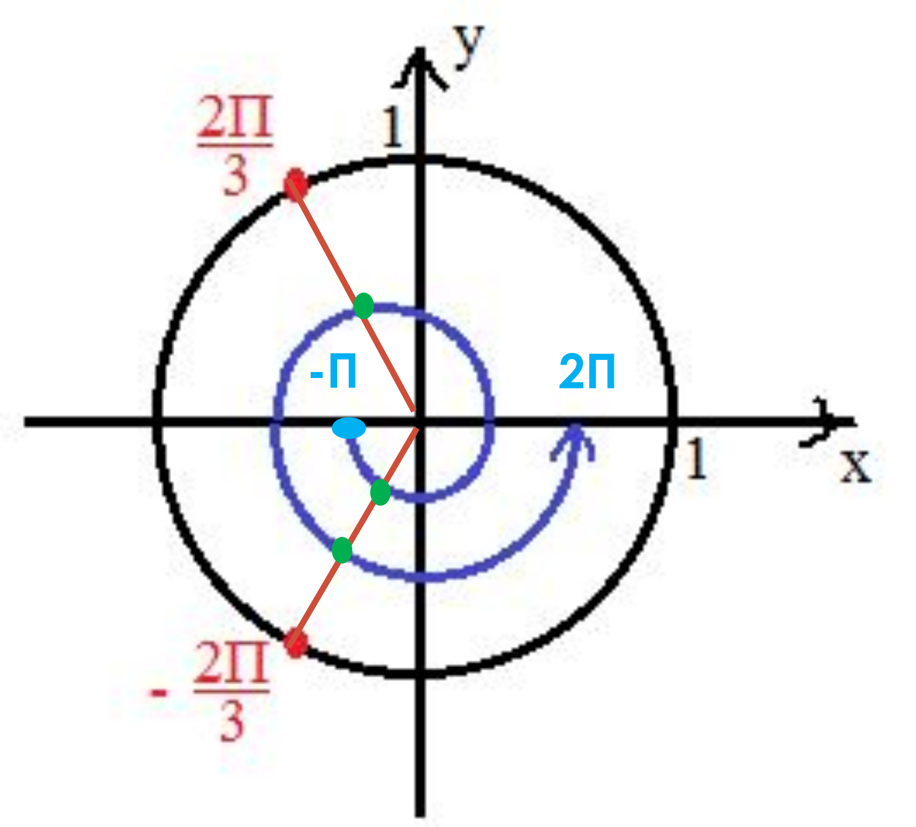
Задача 1 а) решите уравнение $6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0.$

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi].$

5

а) Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$

б) (2 способ) Найдем корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi].$



б) Ответ: $-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

Задача 2 $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$

Применим основное тригонометрическое тождество

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

4

$2(1-\cos^2 x) + \cos x - 1 = 0$

$2 - 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$-2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0$

Пусть $t=\cos x$, $|t| \le 1^*$,

$-2t^2 + t + 1 = 0;$

$2t^2 - t - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$t_1 = 1;\ \ t_2 = -\frac{1}{2}$

Обратная замена:

$\cos x = 1;\quad x = 2\pi n$

или

$\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n =$

$= \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$

Ответ: $\mathbf{2\pi n, \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z}$

4

Задача 3

$$tg\,x - 2ctg\,x + 1 = 0$$

$$ctg\,x = \frac{1}{tg\,x}$$

$$tg\,x - \frac{2}{tg\,x} + 1 = 0 \quad |\cdot tg\,x$$

$$tg^2\,x - 2 + tg\,x = 0$$

(т.к. $tg\,x \neq 0$, иначе $ctg\,x$ не существует)

Пусть $t = tg\,x$, тогда

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_1 + t_2 = -1$$

$$t_1 \cdot t_2 = -2$$

$$t_1 = 1; \quad t_2 = -2$$

Обратная замена:

$$tg\,x = 1; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

или

$$tg\,x = -2;$$

$$x = arctg(-2) + \pi n =$$

$$= -\,arctg2 + \pi n$$

Ответ: $\boldsymbol{\frac{\pi}{4} + \pi n;}$

$\boldsymbol{-\,arctg2 + \pi n,\ n \epsilon Z}$

5

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{4}$$

$$1-\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$$

$$\textbf{\textit{Ответ:}}\ \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 7\cos x - 7 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi].$

2. а) Решите уравнение $4\cos^3 x + 3\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi].$

3. а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)} = 2.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right].$

4. а) Решите уравнение $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(7\pi - 2x) = -1.$

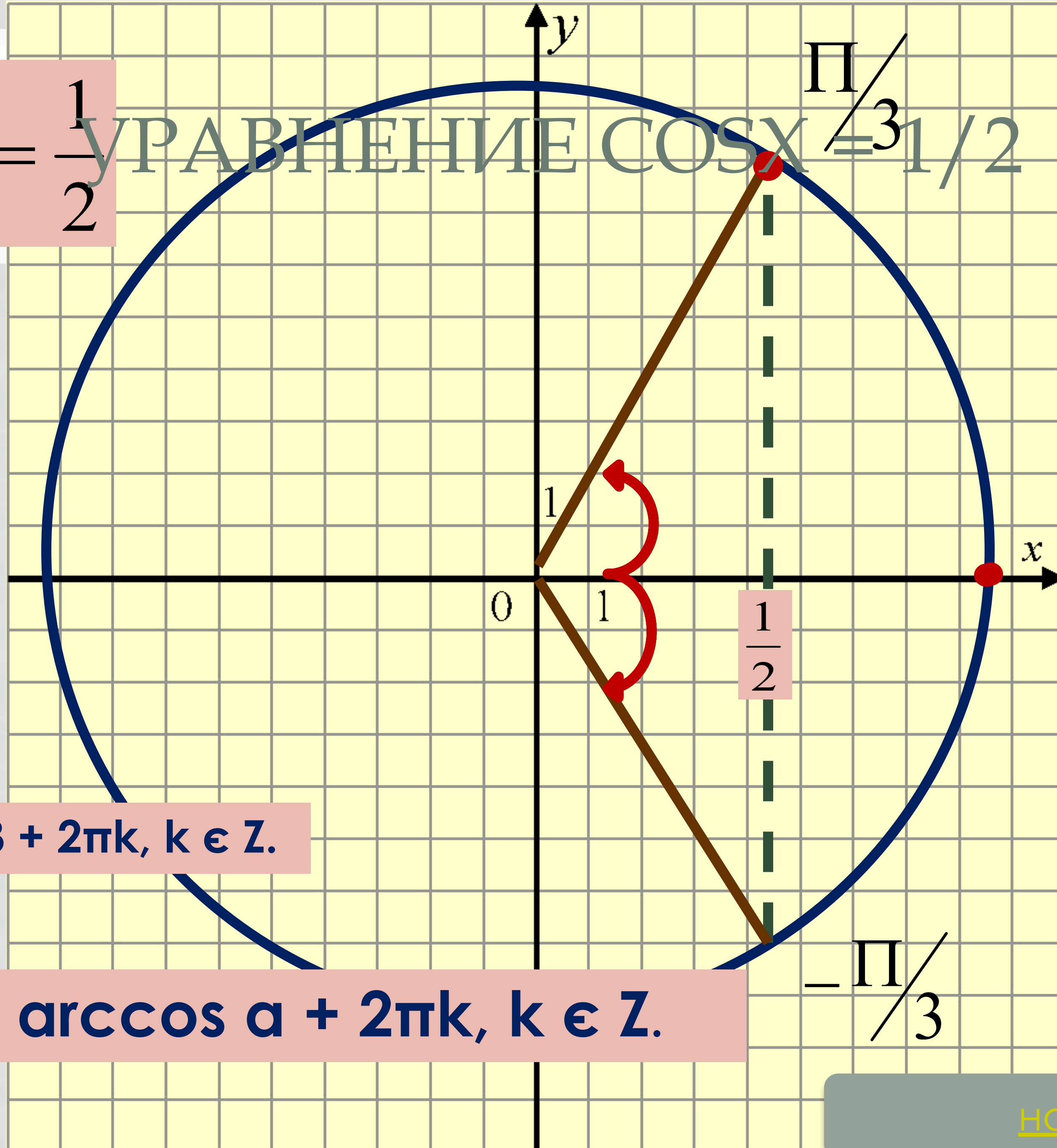
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right].$

5. а) Решите уравнение $\mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\, x + 2 = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right].$

Уравнение cosx = 1/2

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

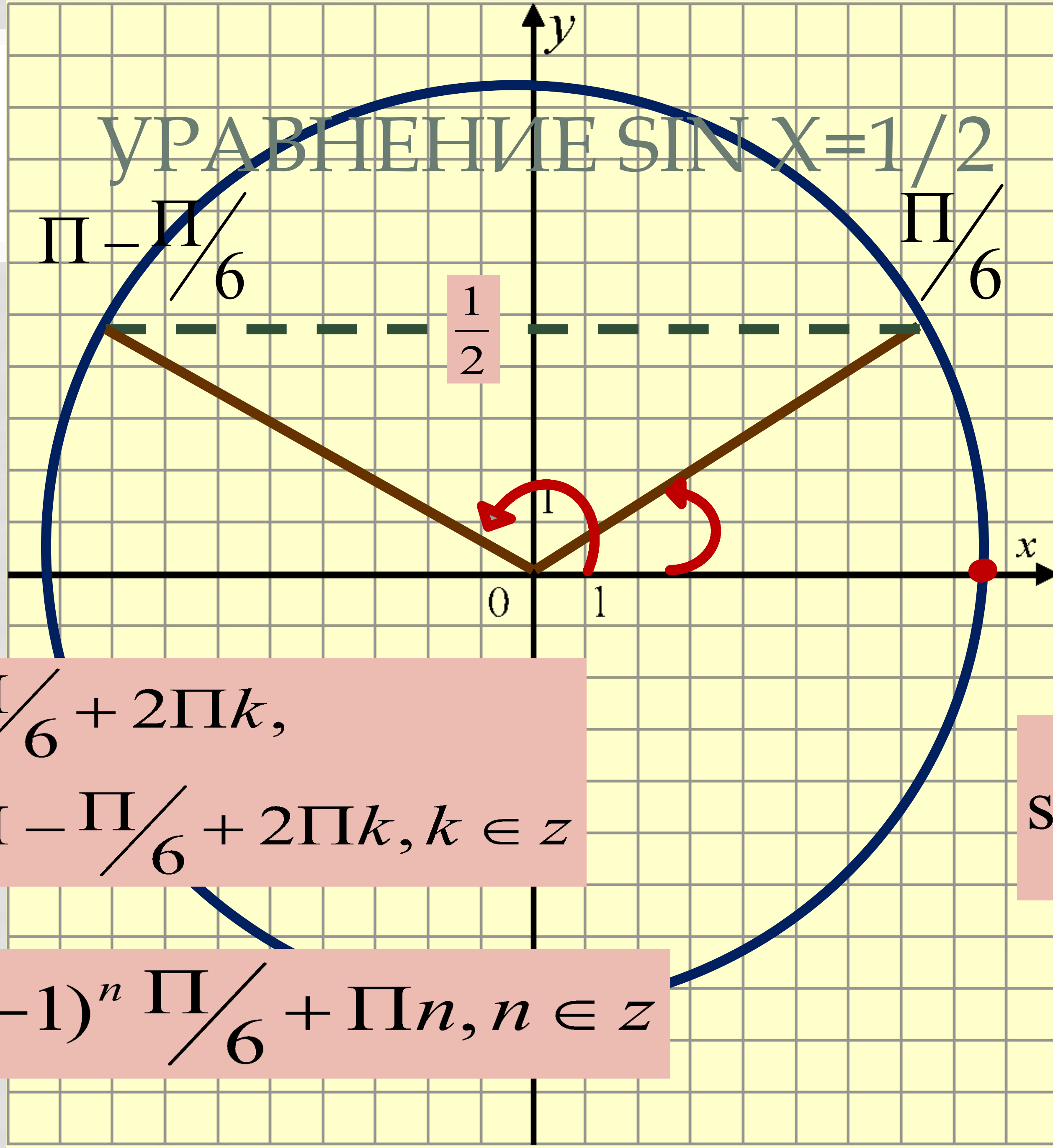


x = ± П/3 + 2πk, k є Z.

x = ± arccos a + 2πk, k є Z.

назад

Уравнение sin x=1/2



$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \Pi/6 + 2\Pi k,$$
$$x = \Pi - \Pi/6 + 2\Pi k, k \in z$$

$$x = (-1)^n \Pi/6 + \Pi n, n \in z$$

УРАВНЕНИЕ SINX=A

имеет следующие решения

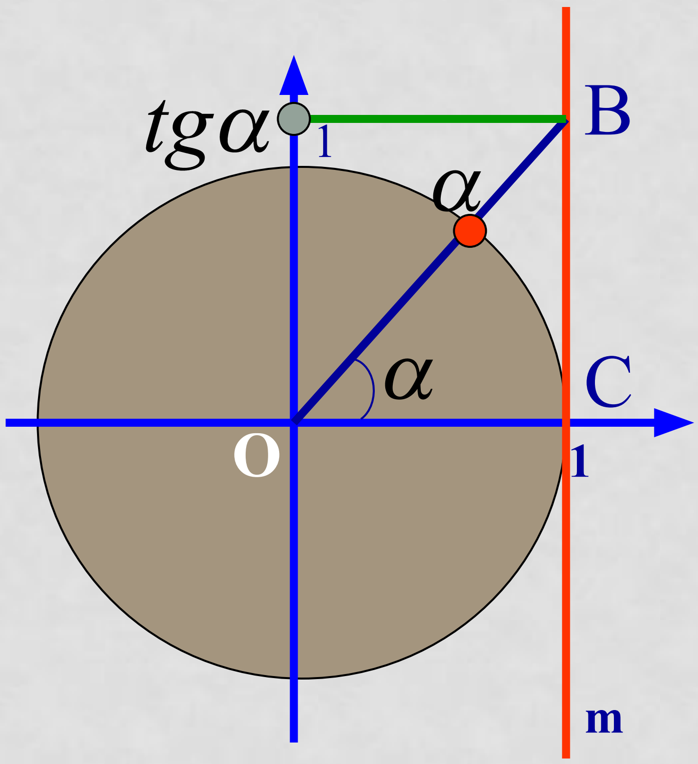
$$x = \arcsin x + 2\Pi k,$$
$$x = \Pi - \arcsin x + 2\Pi k, k \in z$$

или

$$x = (-1)^n \arcsin x + \Pi n, n \in z$$

назад

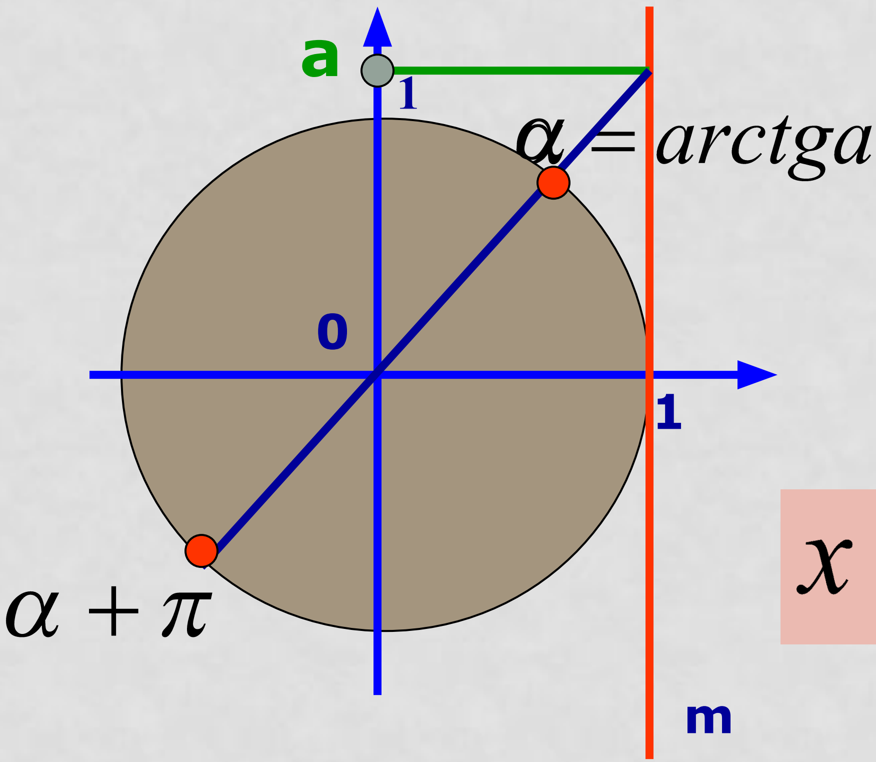
АРКТАНГЕНС ЧИСЛА



Тангенс числа α равен ординате точки пересечения оси тангенсов и прямой, соединяющей точку, изображающую число α на единичной окружности, с началом координат.

$$BC = tg\alpha$$

УРАВНЕНИЕ $tgx = a$



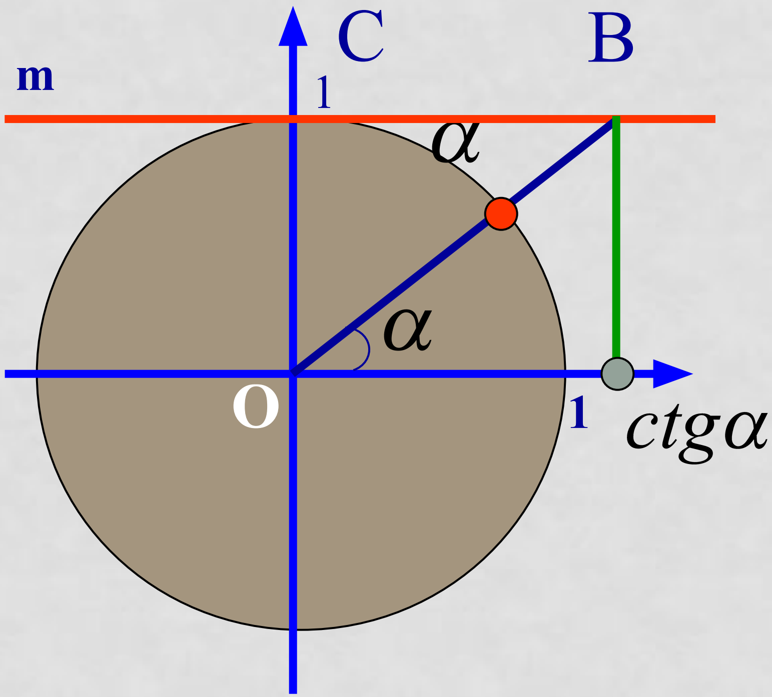
$$tgx = a, a \in R$$

$$x = \alpha + \pi k, k \in Z.$$

$$x = arctga + \pi k, k \in Z.$$

назад

АРККОТАНГЕНС ЧИСЛА

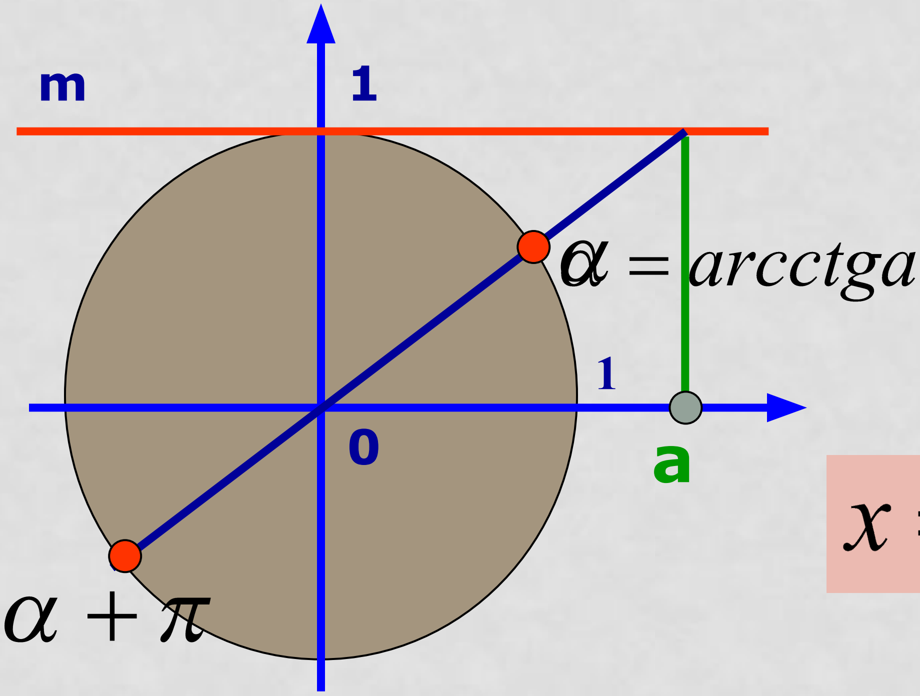


Котангенс числа α равен абсциссе точки пересечения оси котангенсов и прямой, соединяющей точку, изображающую число α на единичной окружности, с началом координат.

$$BC = ctg\alpha$$

УРАВНЕНИЕ $tgx = a$

$$ctgx = a, a \in R$$



$$x = \alpha + \pi k, k \in Z.$$

$$x = arcctga + \pi k, k \in Z.$$

назад

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ