ЕГЭ 2020

ЗАДАЧА №17
На оптимизацию

Задачи на оптимизацию – это уже настоящие исследовательские задачи, очень близкие по смыслу (но не по методам решения) к задачам с параметром. Сложность таких задач в том, что не всегда есть готовые методы решения и задача может потребовать своего подхода. Успех в решении таких задач заключается в систематическом тренинге.

Решение любой текстовой задачи складывается из нескольких основных **этапов:**

1. подробный разбор условия задачи для четкого понимания сути описанного в задаче процесса;
2. выбор переменных, количество которых должно быть достаточным для того, чтобы составить уравнения и неравенства. Если переменных оказалось больше, чем число уравнений, но при этом все было сделано верно, то «лишние» переменные взаимно уничтожатся или сократятся. Иногда в процессе решения требуется найти не сами переменные по отдельности, а их комбинацию;
3. формализация или составление уравнений и неравенств. При этом важно обращать внимание на единицы измерения – они должны быть одинаковыми для всех одноименных величин;

4.решение полученного уравнения, неравенства или системы;

5. интерпретация полученного результата и непосредственно сам ответ на вопрос задачи.

Задача 1.

В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 60 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 260 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 2 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение. Для формализации условия подобных задач введем следующие обозначения и выражения.

r – продолжительность рабочего дня;

n – количество рабочих, занятых по добыче конкретного металла;

p – масса металла, добываемого одним рабочим в час (производительность);

$r \cdot n$ – человеко-часы;

$r \cdot n \cdot p$ – масса металла, добываемого на шахте в день.

На основе данных задачи составим таблицу:

№ шахты	Всего рабочих	r	Al			Ni		
			n	p	r*n*p	n	p	r*n*p
1	60	5		2			3	
2	260	5		3			2	

№ шахты	Всего рабочих	r	Al			Ni		
			n	p	r*n*p	n	p	r*n*p
1	60	5	X	2	10x	60-x	3	5*(60-x)*3
2	260	5	y	3	15y	260-y	2	5*(260-y)*2
Всего на двух шахтах					10x+15y			3500-15x-10y

Так как для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля, то масса алюминия в сплаве в 2 раза больше массы никеля, то есть:

$10x+15y=2\cdot(3500-15x-10y)$,

$40x+35y=7000$.

$x=175-7/8y$ или $y=200-8/7x$

Учтем ограничения на переменные:

$X=175-7/8y\geq 0$

$X=175-7/8y\leq 60$

$0\leq y\leq 260$ $y=200$

$У=200-8/7x\geq 0$

$У=200-8/7x\leq 260$

$0\leq x\leq 60$

Составим функцию $f(x, y)$, которая задает значения массы сплава. Для этого заметим, что масса сплава (на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля) в 3 раза больше массы никеля, следовательно:

$$f(x, y)=3\cdot(3500-15x-10y).$$

Подставим вместо x:

$$f(y)=3\cdot(875+25/8y)$$

Подставляем y max=200:

$$f(200)=45000\text{кг}.$$

Задача 2

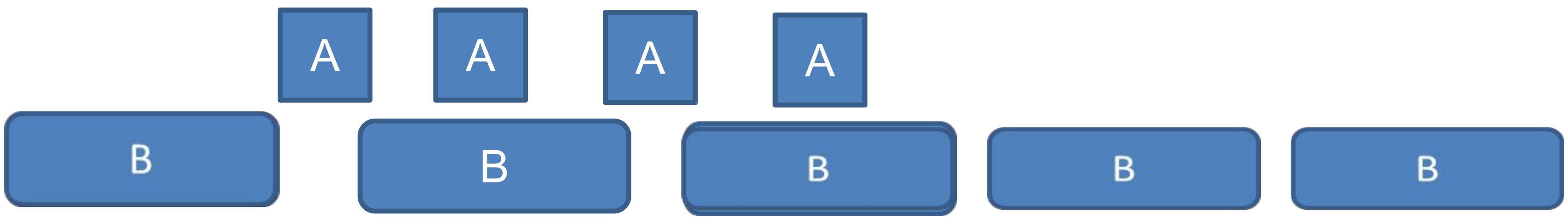
В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x 2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y 2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 2 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Задача 3

Баржа грузоподъемностью 134 тонны перевозит контейнеры типов А и В. Количество загруженных на баржу контейнеров типа В не менее чем на 25% превосходит количество загруженных контейнеров типа А. Вес и стоимость одного контейнера типа А составляет 2 тонны и 5 млн руб., контейнера типа В – 5 тонн и 7 млн руб. соответственно. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость (в млн руб.) всех контейнеров, перевозимых баржей при данных условиях.

Так как количество загруженных на баржу контейнеров типа В должно не менее чем на 25% превосходить количество загруженных контейнеров типа А, значит, на каждые 4 контейнера типа А должно приходиться не менее 5 контейнеров типа В. То есть можно объединить в группу контейнеры разных типов таким образом:



Пусть таких групп будет k. Тогда массу всех контейнеров типа А и массу всех контейнеров типа В можно описать выражениями:

$4k \cdot 2 = 8k$ и $5k \cdot 5 = 25k$.

Тогда масса всех контейнеров: $8k + 25k = 33k$.

Ограничение по грузоподъемности баржи описывает неравенство:

$33k \leq 134$, откуда $k \leq 4\ 2/33$

Так как $k \in N$, то $k=4$, а значит:

Суммарная стоимость всех контейнеров, перевозимых баржей при данных условиях:

$16 \cdot 5+20 \cdot 7=220$ млн руб.

Целесообразно проверить на возможность получить более выгодный в финансовом плане вариант. Так как в найденном варианте масса всех контейнеров будет равна $33k=132$, то до предельной грузоподъемности можно заменить два контейнера типа А одним контейнером типа В. Тогда суммарная стоимость будет равна:

$14 \cdot 5+21 \cdot 7=217$ млн руб.,

что на 3 млн руб. меньше ранее найденного варианта.

Задача 4

Часть денег от капитала 400 млн руб. размещена в банке под 12 % годовых, а другая часть инвестирована в производство, причем через год эффективность вложения ожидается в размере 250 % (то есть вложенная сумма x руб. оборачивается в размере 2,5x руб.), затем отчисляются деньги на издержки, которые задаются квадратичной зависимостью $0{,}0022x^2$. Прибыль от производства облагается налогом в 20 %. Как распределить капитал между банком и производством, чтобы через год получить максимальную прибыль от размещения денег в банк и вложения денег в производство? Сколько рублей составит эта прибыль?

Пусть x млн рублей инвестировано в производство, тогда $400-x$ млн рублей — размещено в банк.
Через год эффективность вложения в производства ожидается в размере $2{,}5x$ млн рублей.
Затем отчисляются деньги на издержки: $2{,}5x-0{,}0022x^2$
Прибыль от производства облагается налогом в 20 %:
$0{,}8(2{,}5x-0{,}0022x^2-x)=2x-0{,}00176x^2$
Через год сумма, размещенная в банк, будет равна:
$1{,}12(400-x)=448-1{,}12x$
Прибыль от размещения денег в банк и вложения денег в производство:
$f(x)=2x-0{,}00176x^2+448-1{,}12x-400$ или
$f(x)=-0{,}00176x^2+0{,}88x+48.$
Наибольшее значение функция принимает в точке $x_{\circ}=0{,}88/2*0{,}00176=250$

Тогда максимальная прибыль от размещения денег в банк и вложения денег в производство равна: $f(250)=-0{,}00176\cdot 250^2+0{,}88\cdot 250+48=158.$