

ЕГЭ 2020

ЗАДАЧА №17

На оптимизацию

**Задачи на оптимизацию** – это уже настоящие исследовательские задачи, очень близкие по смыслу (но не по методам решения) к задачам с параметром. Сложность таких задач в том, что не всегда есть готовые методы решения и задача может потребовать своего подхода. Успех в решении таких задач заключается в систематическом тренинге.

Решение любой текстовой задачи складывается из нескольких **основных этапов**:

1. подробный разбор условия задачи для четкого понимания сути описанного в задаче процесса;
2. выбор переменных, количество которых должно быть достаточным для того, чтобы составить уравнения и неравенства. Если переменных оказалось больше, чем число уравнений, но при этом все было сделано верно, то «лишние» переменные взаимно уничтожатся или сократятся. Иногда в процессе решения требуется найти не сами переменные по отдельности, а их комбинацию;
3. формализация или составление уравнений и неравенств. При этом важно обращать внимание на единицы измерения – они должны быть одинаковыми для всех одноименных величин;

4. решение полученного уравнения, неравенства или системы;

5. интерпретация полученного результата и непосредственно сам ответ на вопрос задачи.

## Задача 1.

В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 60 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 260 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 2 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

**Решение.** Для формализации условия подобных задач введем следующие обозначения и выражения.

$t$  – продолжительность рабочего дня;

$n$  – количество рабочих, занятых по добыче конкретного металла;

$p$  – масса металла, добываемого одним рабочим в час (производительность);

$t \cdot n$  – человеко-часы;

$t \cdot n \cdot p$  – масса металла, добываемого на шахте в день.

На основе данных задачи составим таблицу:

№ шахты	Всего рабочих	r	Al			Ni		
			n	p	r*n*p	n	p	r*n*p
1	60	5		2			3	
2	260	5		3			2	

№ шахты	Всего рабочих	r	Al			Ni		
			n	p	$r*n*p$	n	p	$r*n*p$
1	60	5	X	2	$10x$	$60-x$	3	$5*(60-x)*3$
2	260	5	y	3	$15y$	$260-y$	2	$5*(260-y)*2$
Всего на двух шахтах					$10x+15y$			$3500-15x-10y$

Так как для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля, то масса алюминия в сплаве в 2 раза больше массы никеля, то есть:

$$10x + 15y = 2 \cdot (3500 - 15x - 10y),$$
$$40x + 35y = 7000.$$

$$x = 175 - 7/8y \quad \text{или} \quad y = 200 - 8/7x$$



Учтем ограничения на переменные:

$$X=175-7/8y \geq 0$$

$$X=175-7/8y \leq 60$$

$$0 \leq y \leq 260 \quad y = 200$$

$$Y=200-8/7x \geq 0$$

$$Y=200-8/7x \leq 260$$

$$0 \leq x \leq 60$$

Составим функцию  $f(x, y)$ , которая задает значения массы сплава. Для этого заметим, что масса сплава (на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля) в 3 раза больше массы никеля, следовательно:

$$f(x, y) = 3 \cdot (3500 - 15x - 10y).$$

Подставим вместо  $x$ :

$$f(y) = 3 \cdot (875 + 25/8y)$$

Подставляем  $y_{\max} = 200$ :

$$f(200) = 45000 \text{ кг}.$$

## Задача 2

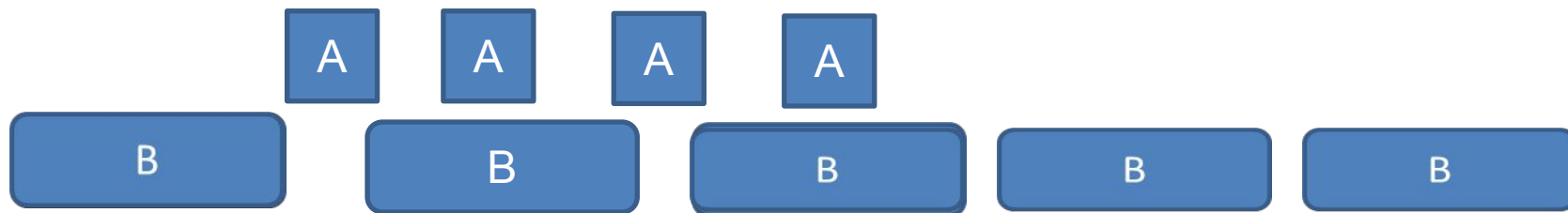
В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи  $x$  кг алюминия в день требуется  $x \cdot 2$  человеко-часов труда, а для добычи  $y$  кг никеля в день требуется  $y \cdot 2$  человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 2 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

## Задача 3

Баржа грузоподъемностью 134 тонны перевозит контейнеры типов А и В. Количество загруженных на баржу контейнеров типа В не менее чем на 25% превосходит количество загруженных контейнеров типа А. Вес и стоимость одного контейнера типа А составляет 2 тонны и 5 млн руб., контейнера типа В – 5 тонн и 7 млн руб. соответственно. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость (в млн руб.) всех контейнеров, перевозимых баржей при данных условиях.

Так как количество загруженных на баржу контейнеров типа В должно не менее чем на 25% превосходить количество загруженных контейнеров типа А, значит, на каждые 4 контейнера типа А должно приходиться не менее 5 контейнеров типа В. То есть можно объединить в группу контейнеры разных типов таким образом:



Пусть таких групп будет  $k$ . Тогда массу всех контейнеров типа А и массу всех контейнеров типа В можно описать выражениями:

$$4k \cdot 2 = 8k \quad \text{и} \quad 5k \cdot 5 = 25k.$$

Тогда масса всех контейнеров:  $8k + 25k = 33k$ .

Ограничение по грузоподъемности баржи описывает неравенство:

$$33k \leq 134, \text{ откуда } k \leq 4 \frac{2}{33}$$

Так как  $k \in \mathbb{N}$ , то  $k=4$ , а значит:

Суммарная стоимость всех контейнеров,  
перевозимых баржей при данных условиях:

$$16 \cdot 5 + 20 \cdot 7 = 220 \text{ млн руб.}$$

Целесообразно проверить на возможность получить более выгодный в финансовом плане вариант. Так как в найденном варианте масса всех контейнеров будет равна  $33k=132$ , то до предельной грузоподъемности можно заменить два контейнера типа А одним контейнером типа В. Тогда суммарная стоимость будет равна:

$$14 \cdot 5 + 21 \cdot 7 = 217 \text{ млн руб.,}$$

что на 3 млн руб. меньше ранее найденного варианта.

## Задача 4

Часть денег от капитала 400 млн руб. размещена в банке под 12 % годовых, а другая часть инвестирована в производство, причем через год эффективность вложения ожидается в размере 250 % (то есть вложенная сумма  $x$  руб. оборачивается в размере  $2,5x$  руб.), затем отчисляются деньги на издержки, которые задаются квадратичной зависимостью  $0,0022x^2$ . Прибыль от производства облагается налогом в 20 %. Как распределить капитал между банком и производством, чтобы через год получить максимальную прибыль от размещения денег в банк и вложения денег в производство? Сколько рублей составит эта прибыль?

Пусть  $x$  млн рублей инвестировано в производство, тогда  $400 - x$  млн рублей — размещено в банк.

Через год эффективность вложения в производства ожидается в размере  $2,5x$  млн рублей.

Затем отчисляются деньги на издержки:  $2,5x - 0,0022x^2$

Прибыль от производства облагается налогом в 20 %:

$$0,8(2,5x - 0,0022x^2 - x) = 2x - 0,00176x^2$$

Через год сумма, размещенная в банк, будет равна:

$$1,12(400 - x) = 448 - 1,12x$$

Прибыль от размещения денег в банк и вложения денег в производство:

$$f(x) = 2x - 0,00176x^2 + 448 - 1,12x - 400 \text{ или}$$

$$f(x) = -0,00176x^2 + 0,88x + 48.$$

Наибольшее значение функция принимает в точке  $x_0 = 0,88/2 \cdot 0,00176 = 250$

Тогда максимальная прибыль от размещения денег в банк и вложения денег в производство равна:  $f(250) = -0,00176 \cdot 250^2 + 0,88 \cdot 250 + 48 = 158.$



