

Многогранный угол. Трёхгранный угол

Составитель:

Колосова М.И.

Геометрия 10 класс

Пусть даны многоугольник $A_1A_2A_3\dots A_{n-1}A_n$ и точка S , не принадлежащая его плоскости (рис. 17.1).

Соединим точку S со всеми вершинами многоугольника (рис. 17.2). Углы $A_1SA_2, A_2SA_3, \dots, A_nSA_1$ ограничивают часть пространства, содержащую данный многоугольник. Эту часть пространства вместе с указанными углами называют **многогранным углом**.

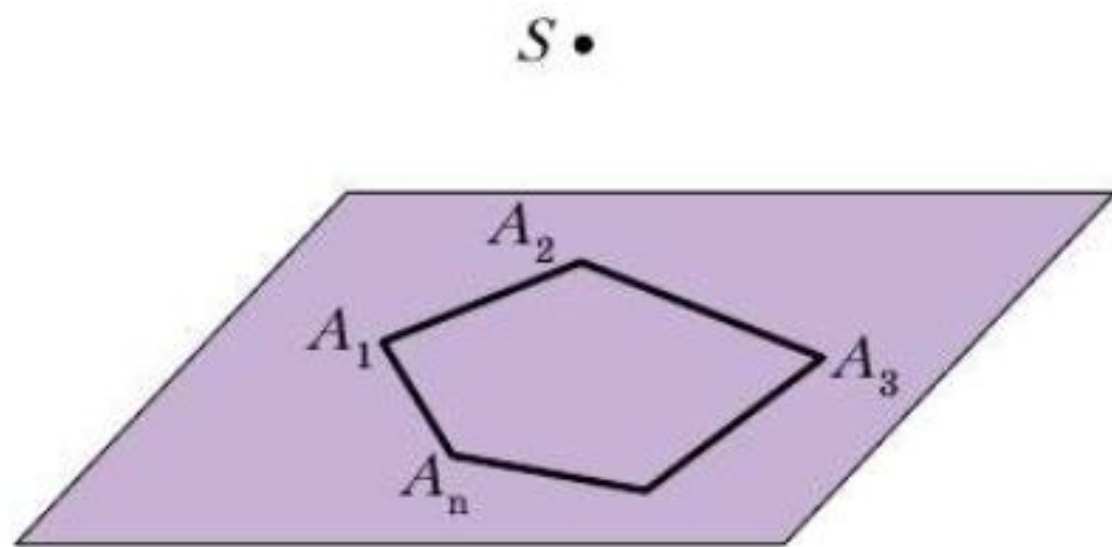


Рис. 17.1

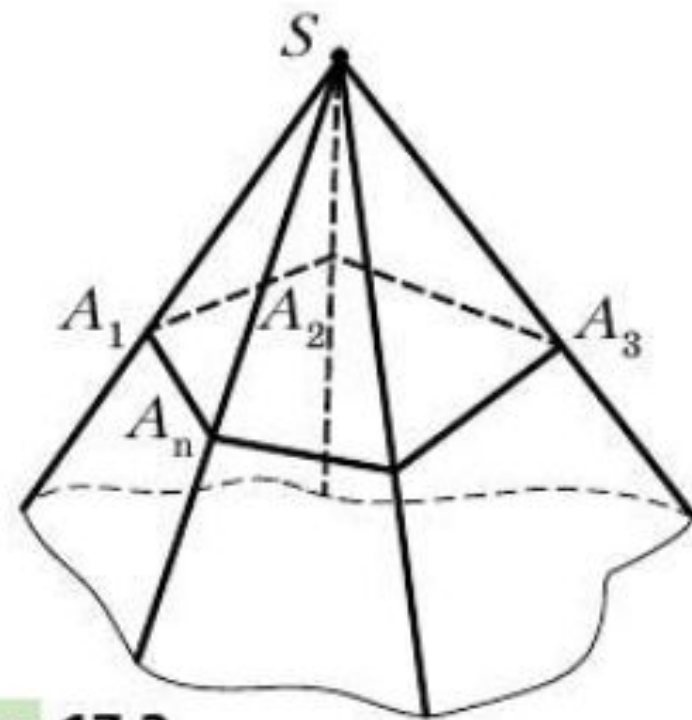


Рис. 17.2

Точку S называют **вершиной** многогранного угла, лучи SA_1, SA_2, \dots, SA_n — его **рёбрами**. Углы $A_1SA_2, A_2SA_3, \dots, A_nSA_1$ называют **гранями** многогранного угла или **плоскими углами** многогранного угла.

Двугранным углом многогранного угла при ребре SA называют двугранный угол с ребром SA , грани которого содержат соседние грани многогранного угла, для которых ребро SA является общим (рис. 17.3).

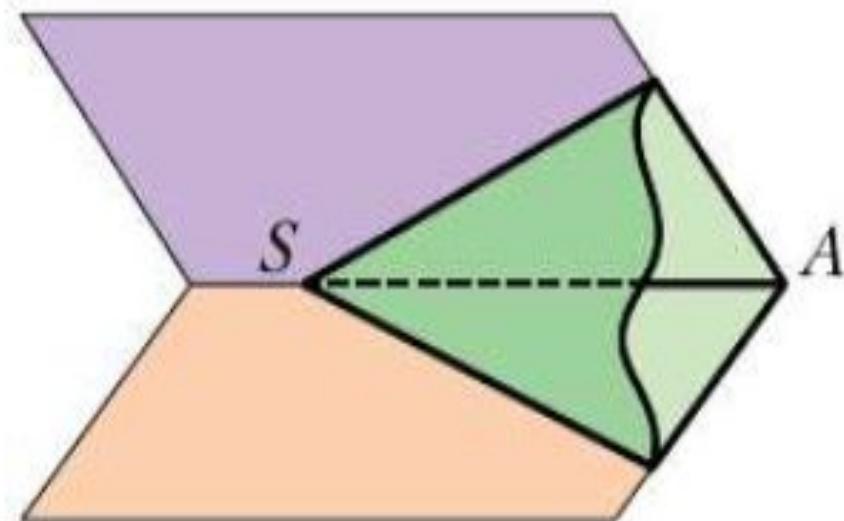


Рис. 17.3

В зависимости от количества граней многогранные углы называют трёхгранными (рис. 17.4), четырёхгранными (рис. 17.5), пятигранными (рис. 17.6) и т. д.

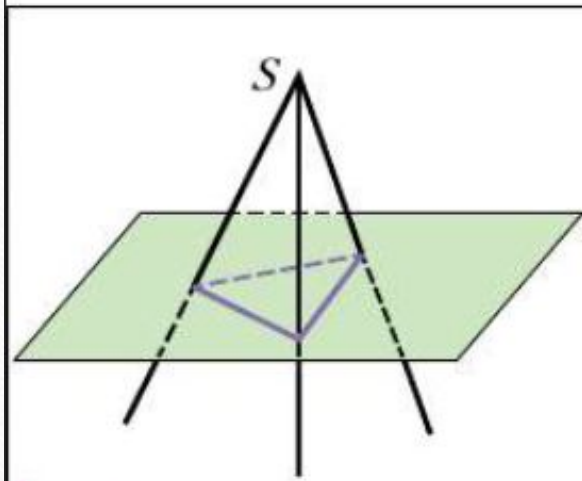


Рис. 17.4

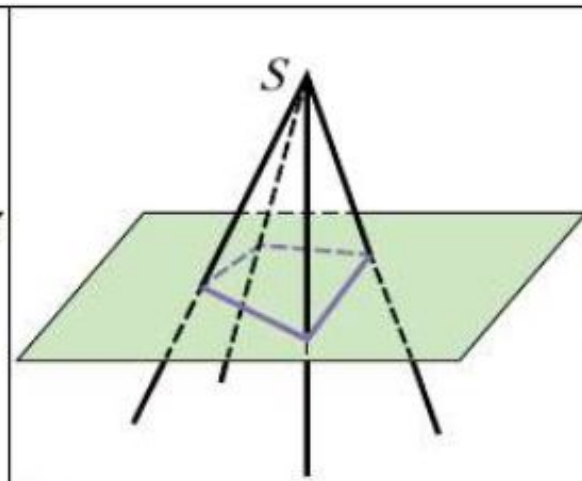


Рис. 17.5

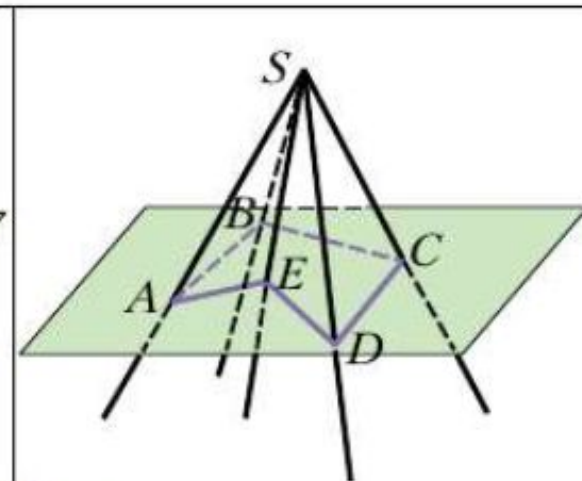


Рис. 17.6

Многогранный угол обозначают с помощью букв, первой указывая вершину, а далее последовательно по одной точке на каждом из рёбер. Например, пятигранный угол, изображённый на рисунке 17.6, обозначают $SABCDE$.

Многогранный угол бывает выпуклым (рис. 17.4, 17.5) и невыпуклым (рис. 17.6).

□ □ ➔ **Определение**

Многогранный угол называют выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.

Любой трёхгранный угол является выпуклым.

Остановимся более подробно на свойствах трёхгранного угла.

□ □ ➔ **Теорема 17.1**

(первая теорема косинусов для трёхгранного угла)

Если плоские углы трёхгранного угла равны α , β и γ , а двугранный угол, при ребре, противолежащем плоскому углу γ , равен φ , то

$$\cos \varphi = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} .$$

□□→ Теорема 17.2

Каждый плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

Доказательство

Пусть из трёх плоских углов α , β , γ (рис. 17.7) угол α — наибольший. Запишем теорему косинусов для трёхгранного угла $SABC$:

$$\cos \varphi = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Поскольку $\cos \varphi < 1$, то $\frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} < 1$. Учитывая, что

$\sin \alpha \sin \beta > 0$, можно записать: $\cos \gamma < \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$.
Имеем: $0^\circ < \gamma < 180^\circ$ и $0^\circ \leq \alpha - \beta < 180^\circ$. Поэтому из неравенства $\cos \gamma < \cos(\alpha - \beta)$ следует, что $\gamma > \alpha - \beta$, т. е. $\alpha < \beta + \gamma$. ■

Теорема 17.3

Сумма плоских углов трёхгранного угла меньше 360° .

Наглядно этот факт иллюстрирует рисунок 17.8.

Доказательство

Рассмотрим трёхгранный угол $SABC$, в котором $\angle CSB = \alpha$, $\angle ASC = \beta$, $\angle ASB = \gamma$. Докажем, что $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$.

Пусть луч SA_1 — дополнительный лучу SA (рис. 17.9). Тогда $\angle A_1SC = 180^\circ - \beta$, $\angle A_1SB = 180^\circ - \gamma$. К трёхгранному углу SA_1BC применим теорему 17.2. Получаем $\alpha < 180^\circ - \beta + 180^\circ - \gamma$. Отсюда $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$. ■

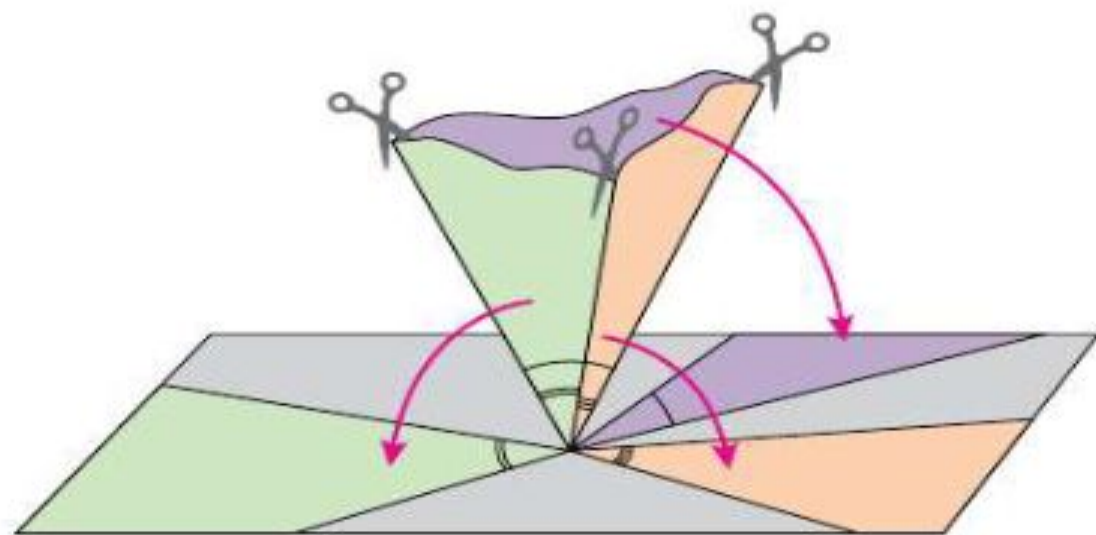


Рис. 17.8

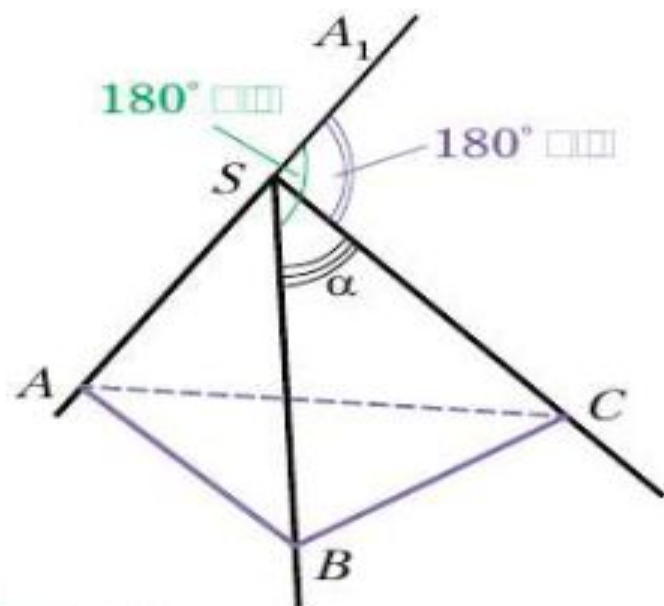


Рис. 17.9

Задача 1. Прямая l образует углы α , β и γ с тремя попарно перпендикулярными прямыми. Докажите, что $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$.

Решение. Можно считать, что прямая l про-

ходит через вершины S и B прямоугольного параллелепипеда и образует углы α , β и γ с его рёбрами, выходящими из одной вершины S (рис. 17.10).

Расположим ещё два равных данному прямоугольных параллелепипеда так, как показано на рисунке 17.11. Поскольку треугольники SBE и SCE равны, то $\angle CSB = 2\alpha$. Аналогично можно доказать, что $\angle ASC = 2\beta$ и $\angle ASB = 2\gamma$.

Очевидно, что точка S не принадлежит плоскости ABC . Рассмотрим трёхгранный угол $SABC$. В силу теоремы 17.3 получаем, что $2\alpha + 2\beta + 2\gamma < 360^\circ$. Отсюда $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$. ■

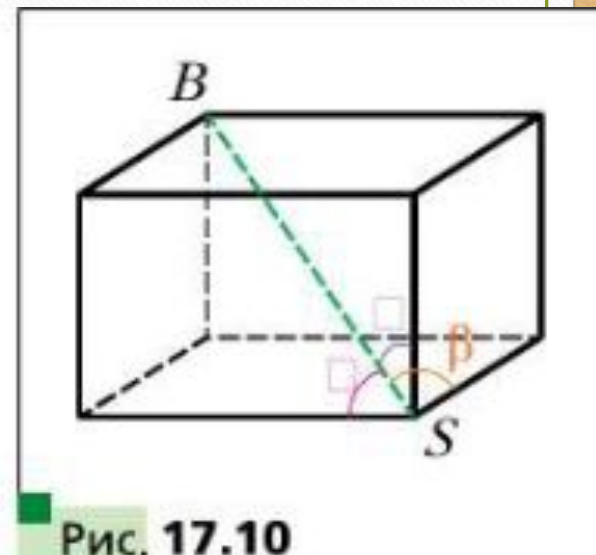


Рис. 17.10

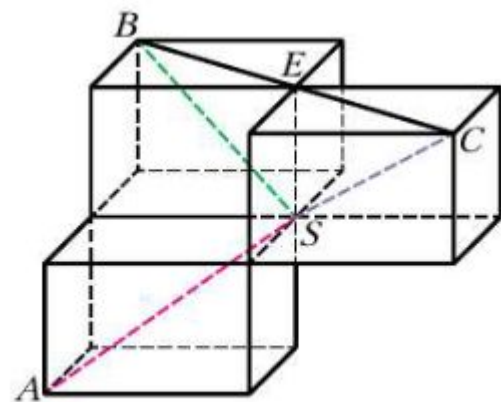


Рис. 17.11

Задача 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $DA = 3$ см, $DC = \sqrt{5}$ см, $DD_1 = 1$ см. Найдите угол между плоскостями $AB_1 C_1$ и $A_1 B_1 C$ (рис. 17.12).

Решение. Плоскости $AB_1 C_1$ и $A_1 B_1 C$ имеют общие точки D и B_1 . Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой DB_1 .

Пусть $\angle ADB_1 = \alpha$ и $\angle CDB_1 = \beta$, двугранный угол трёхгранного угла $DAB_1 C$ при ребре DB_1 равен φ . Тогда в силу теоремы 17.1 можно записать:

$$\cos \varphi = \frac{\cos 90^\circ - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{-\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} = -\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta.$$

Из прямоугольного треугольника ABB_1 находим:

$$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{5 + 1} = \sqrt{6} \text{ см.}$$

Из прямоугольного треугольника CBV_1 находим:

$$CB_1 = \sqrt{CB^2 + BB_1^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} \text{ см.}$$

Имеем: $DA \perp AA_1 B_1$. Следовательно, $DA \perp AB_1$. Аналогично можно доказать, что $DC \perp CB_1$.

Из прямоугольного треугольника DAB_1 имеем: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{\sqrt{6}}$. Из

прямоугольного треугольника DCB_1 имеем: $\operatorname{ctg} \beta = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$. Тогда

$$\cos \varphi = -\frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Отсюда } \varphi = 150^\circ. \text{ Поскольку угол между двумя}$$

плоскостями не превосходит 90° , то искомый угол равен 30° .

Ответ: 30° . ■

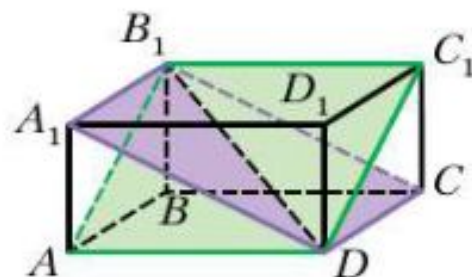


Рис. 17.12

17.1. Все плоские углы трёхгранного угла равны 90° . Докажите, что все двугранные углы также равны 90° .

17.10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ рёбра AB , AD и AA_1 равны 4 см, 3 см и $\sqrt{11}$ см соответственно. Найдите угол между плоскостями ABD_1 и CBD_1 .