Многогранный угол. Трёхгранный угол

Составитель:

Колосова М.И.

Геометрия 10 класс

Пусть даны многоугольник $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ и точка S, не принадлежащая его плоскости (рис. 17.1).

Соединим точку S со всеми вершинами многоугольника (рис. 17.2). Углы A_1SA_2, A_2SA_3, ..., A_nSA_1 ограничивают часть пространства, содержащую данный многоугольник. Эту часть пространства вместе с указанными углами называют **многогранным углом**.

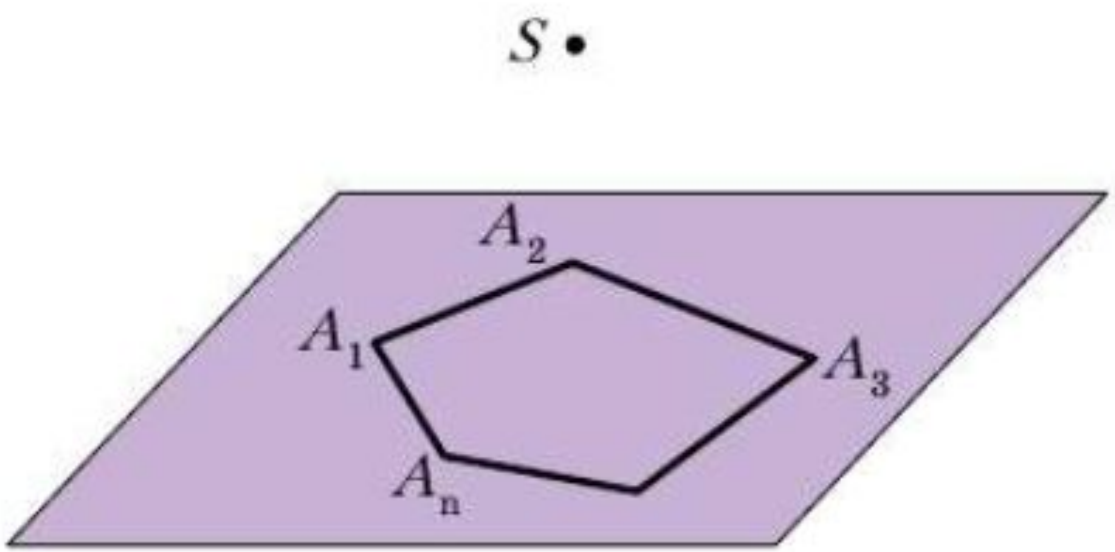

Рис. **17.1**

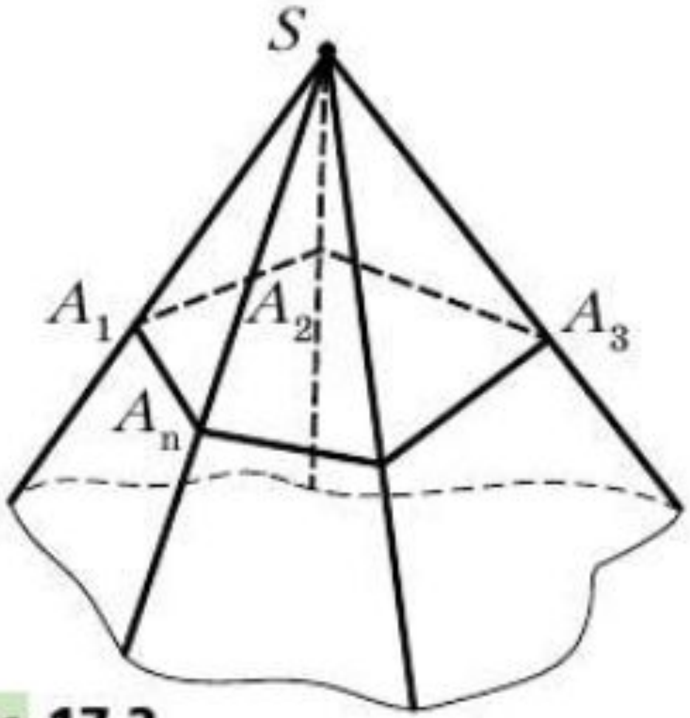

Рис. **17.2**

Точку S называют **вершиной многогранного угла**, лучи SA_1, SA_2, ..., SA_n — его **рёбрами**. Углы A_1SA_2, A_2SA_3, ..., A_nSA_1 называют **гранями многогранного угла** или **плоскими углами многогранного угла**.

Двугранным углом многогранного угла при ребре SA называют двугранный угол с ребром SA, грани которого содержат соседние грани многогранного угла, для которых ребро SA является общим (рис. 17.3).

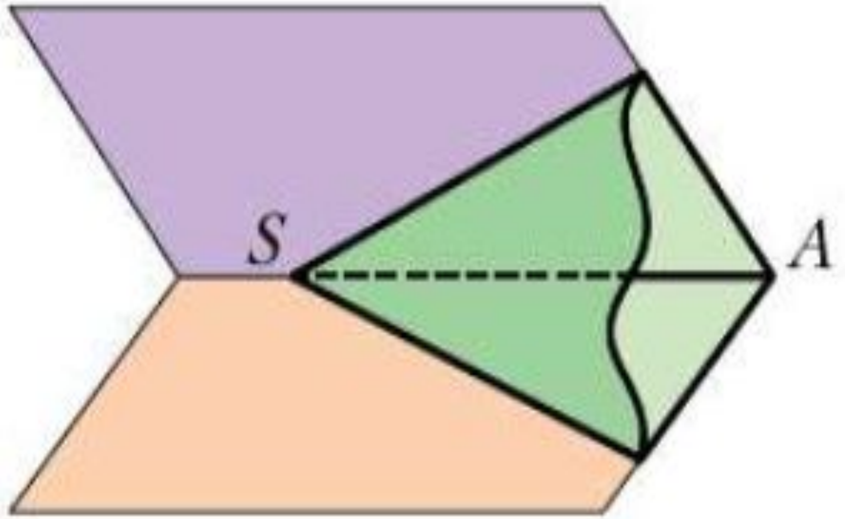

Рис. **17.3**

В зависимости от количества граней многогранные углы называют трёхгранными (рис. 17.4), четырёхгранными (рис. 17.5), пятигранными (рис. 17.6) и т. д.

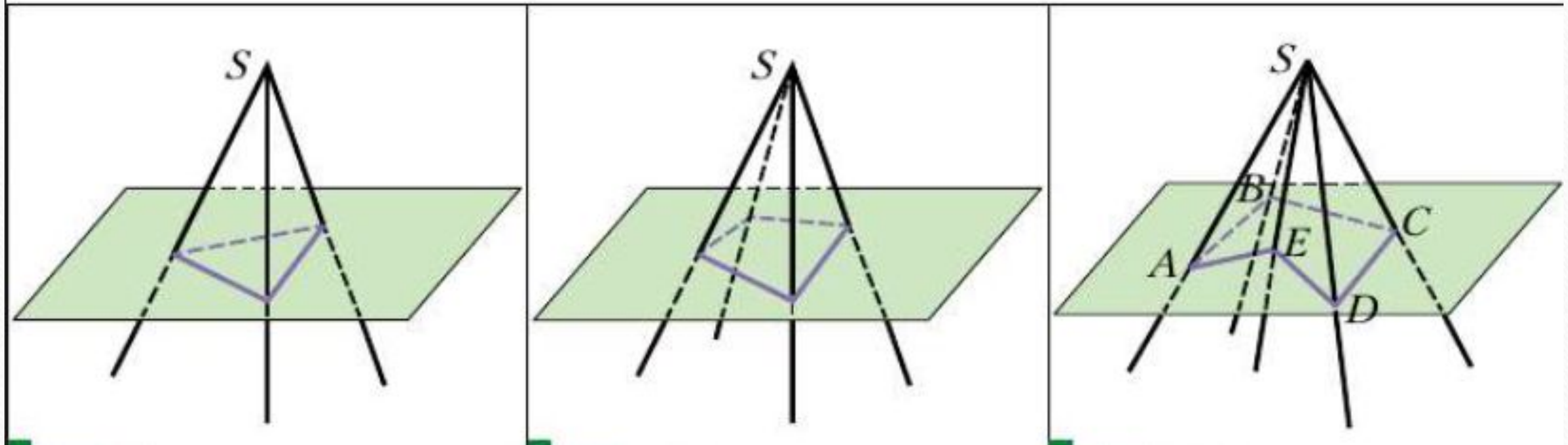

Рис. 17.4 Рис. 17.5 Рис. 17.6

Многогранный угол обозначают с помощью букв, первой указывая вершину, а далее последовательно по одной точке на каждом из рёбер. Например, пятигранный угол, изображённый на рисунке 17.6, обозначают $SABCDE$.

Многогранный угол бывает выпуклым (рис. 17.4, 17.5) и невыпуклым (рис. 17.6).

Определение

Многогранный угол называют выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.

Любой трёхгранный угол является выпуклым.
Остановимся более подробно на свойствах трёхгранного угла.

Теорема 17.1

(первая теорема косинусов для трёхгранного угла)

Если плоские углы трёхгранного угла равны α, β и γ, а двугранный угол, при ребре, противолежащем плоскому углу γ, равен φ, то

$$\cos\varphi = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Теорема 17.2

Каждый плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

Доказательство

Пусть из трёх плоских углов α, β, γ (рис. 17.7) угол α — наибольший. Запишем теорему косинусов для трёхгранного угла $SABC$: $\cos\varphi = \dfrac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$.

Поскольку $\cos\varphi < 1$, то $\dfrac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} < 1$. Учитывая, что $\sin\alpha\sin\beta > 0$, можно записать: $\cos\gamma < \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$. Имеем: $0^\circ < \gamma < 180^\circ$ и $0^\circ \leqslant \alpha - \beta < 180^\circ$. Поэтому из неравенства $\cos\gamma < \cos(\alpha - \beta)$ следует, что $\gamma > \alpha - \beta$, т. е. $\alpha < \beta + \gamma$. ■

Теорема 17.3

Сумма плоских углов трёхгранного угла меньше 360°.

Наглядно этот факт иллюстрирует рисунок 17.8.

Доказательство

Рассмотрим трёхгранный угол $SABC$, в котором $\angle CSB = \alpha$, $\angle ASC = \beta$, $\angle ASB = \gamma$. Докажем, что $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$.

Пусть луч SA_1 — дополнительный лучу SA (рис. 17.9). Тогда $\angle A_1SC = 180^\circ - \beta$, $\angle A_1SB = 180^\circ - \gamma$. К трёхгранному углу SA_1BC применим теорему 17.2. Получаем $\alpha < 180^\circ - \beta + 180^\circ - \gamma$. Отсюда $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$. ■

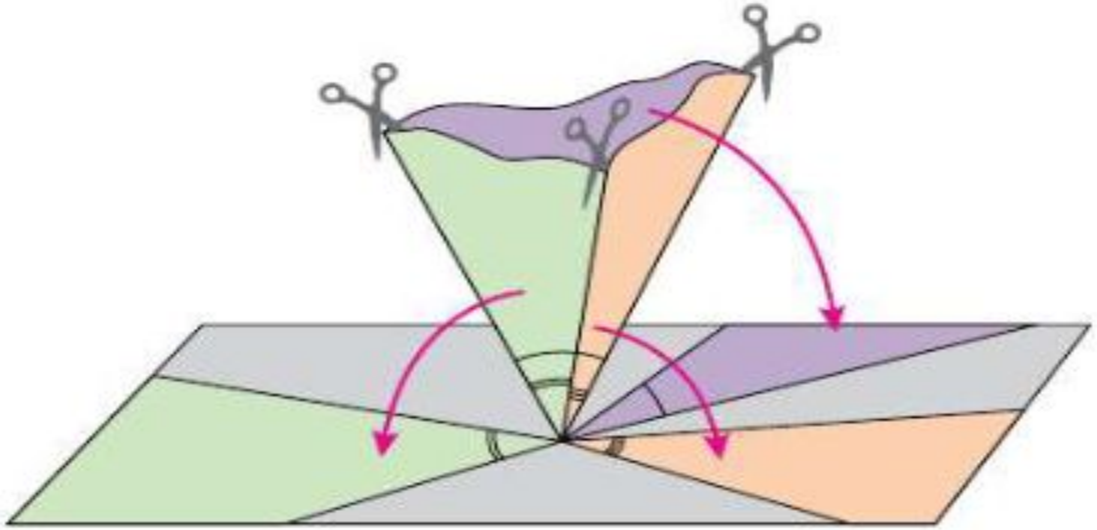

Рис. 17.8

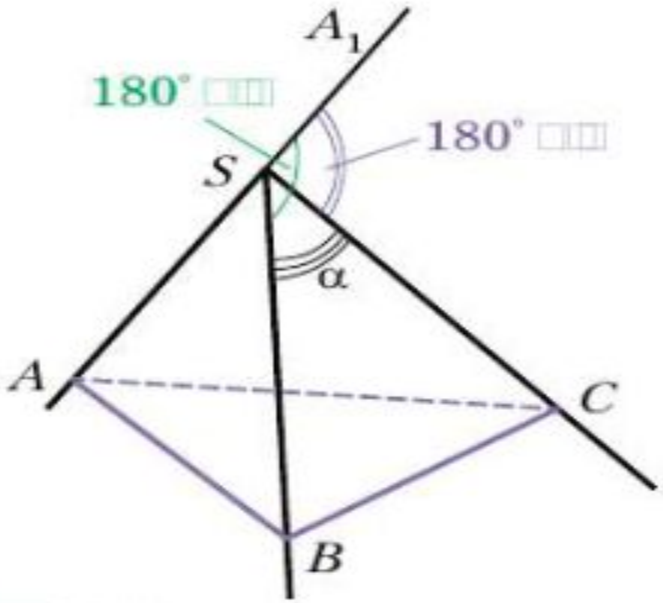

Рис. 17.9

Задача 1. Прямая l образует углы α, β и γ с тремя попарно перпендикулярными прямыми. Докажите, что $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$.

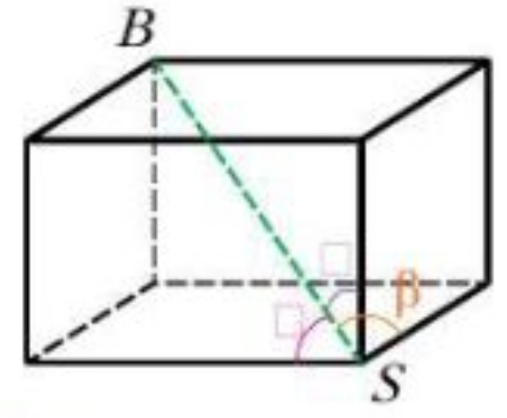

Рис. 17.10

Решение. Можно считать, что прямая l проходит через вершины S и B прямоугольного параллелепипеда и образует углы α, β и γ с его рёбрами, выходящими из одной вершины S (рис. 17.10).

Расположим ещё два равных данному прямоугольных параллелепипеда так, как показано на рисунке 17.11. Поскольку треугольники SBE и SCE равны, то $\angle CSB = 2\alpha$. Аналогично можно доказать, что $\angle ASC = 2\beta$ и $\angle ASB = 2\gamma$.

Очевидно, что точка S не принадлежит плоскости ABC. Рассмотрим трёхгранный угол $SABC$. В силу теоремы 17.3 получаем, что $2\alpha + 2\beta + 2\gamma < 360^\circ$. Отсюда $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$. ■

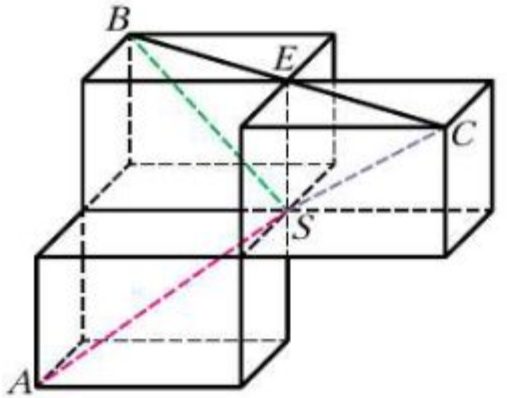

Рис. 17.11

Задача 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $DA = 3$ см, $DC = \sqrt{5}$ см, $DD_1 = 1$ см. Найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и A_1B_1C (рис. 17.12).

Решение. Плоскости AB_1C_1 и A_1B_1C имеют общие точки D и B_1. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой DB_1.

Пусть $\angle ADB_1 = \alpha$ и $\angle CDB_1 = \beta$, двугранный угол трёхгранного угла DAB_1C при ребре DB_1 равен φ. Тогда в силу теоремы 17.1 можно записать: $\cos\varphi = \dfrac{\cos 90^\circ - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \dfrac{-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = -\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$.

Из прямоугольного треугольника ABB_1 находим:

$$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{5+1} = \sqrt{6} \text{ см.}$$

Из прямоугольного треугольника CBB_1 находим:

$$CB_1 = \sqrt{CB^2 + BB_1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \text{ см.}$$

Имеем: $DA \perp AA_1B_1$. Следовательно, $DA \perp AB_1$. Аналогично можно доказать, что $DC \perp CB_1$.

Из прямоугольного треугольника DAB_1 имеем: $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{6}}$. Из прямоугольного треугольника DCB_1 имеем: $\operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$. Тогда $\cos\varphi = -\dfrac{3}{\sqrt{6}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда $\varphi = 150^\circ$. Поскольку угол между двумя плоскостями не превосходит 90°, то искомый угол равен 30°.

Ответ: 30°. ■

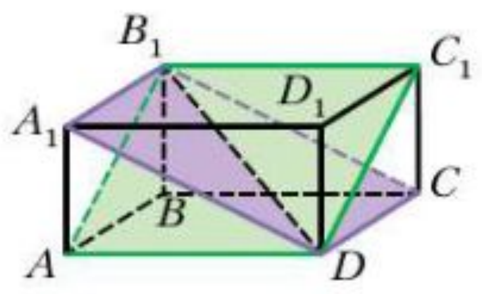

Рис. **17.12**

17.1. Все плоские углы трёхгранного угла равны 90°. Докажите, что все двугранные углы также равны 90°.

17.10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра AB, AD и AA_1 равны 4 см, 3 см и $\sqrt{11}$ см соответственно. Найдите угол между плоскостями ABD_1 и CBD_1.