

**Взаимное расположение  
прямых в пространстве.  
Угол между двумя  
прямыми.**

*Как известно из курса  
планиметрии, две прямые в  
плоскости могут пересекаться  
(имеют общую точку) или быть  
параллельными (не имеют  
общую точку).*

В пространстве мы можем представить ситуацию, когда две прямые не пересекаются, но они и не параллельны.

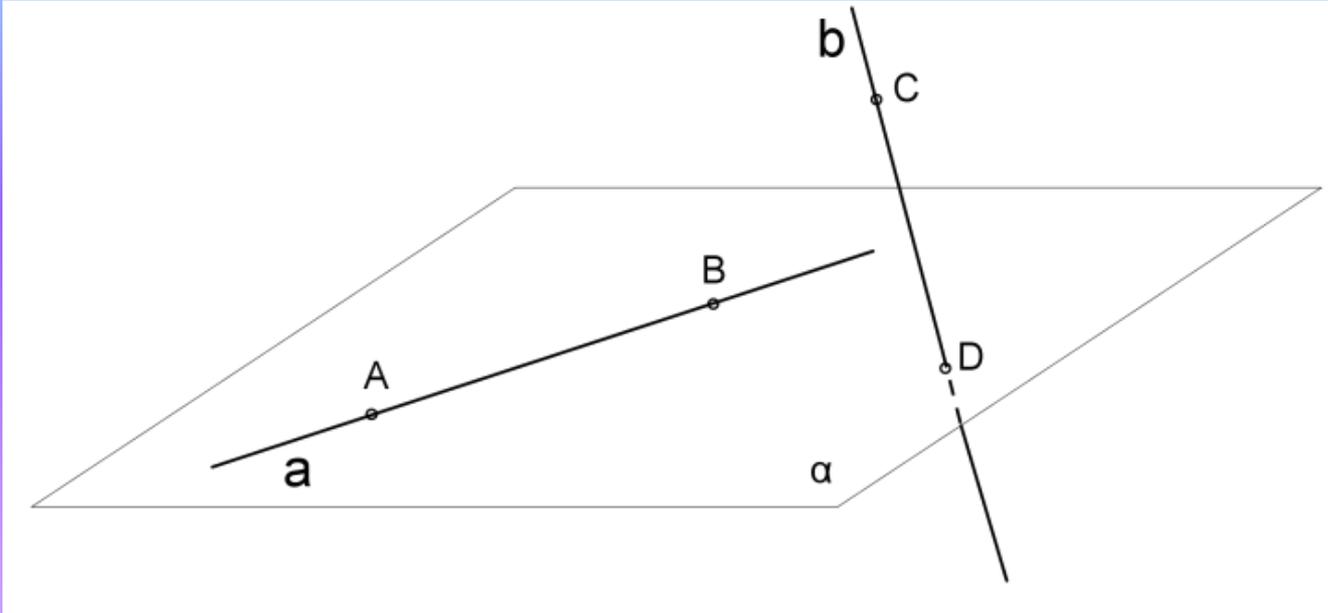


## Определение:

Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

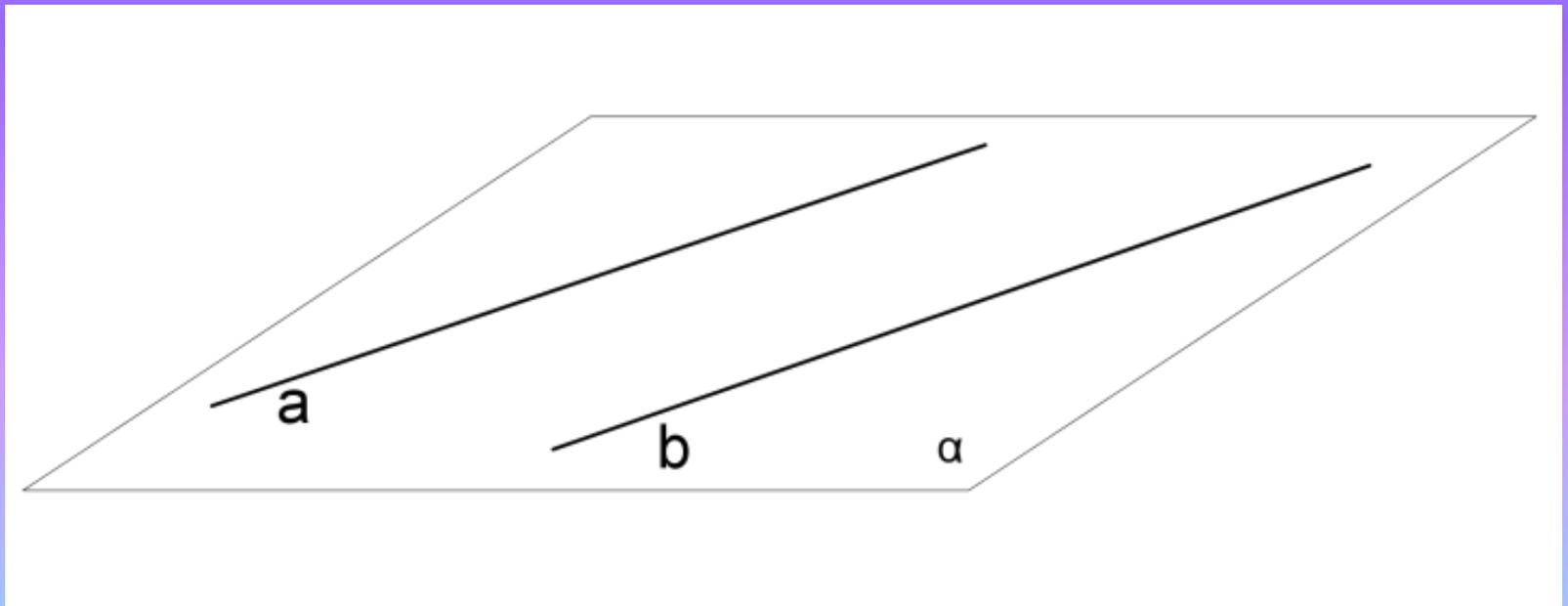
## Теорема "Признак скрещивающихся прямых"

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся (не лежат в одной плоскости).

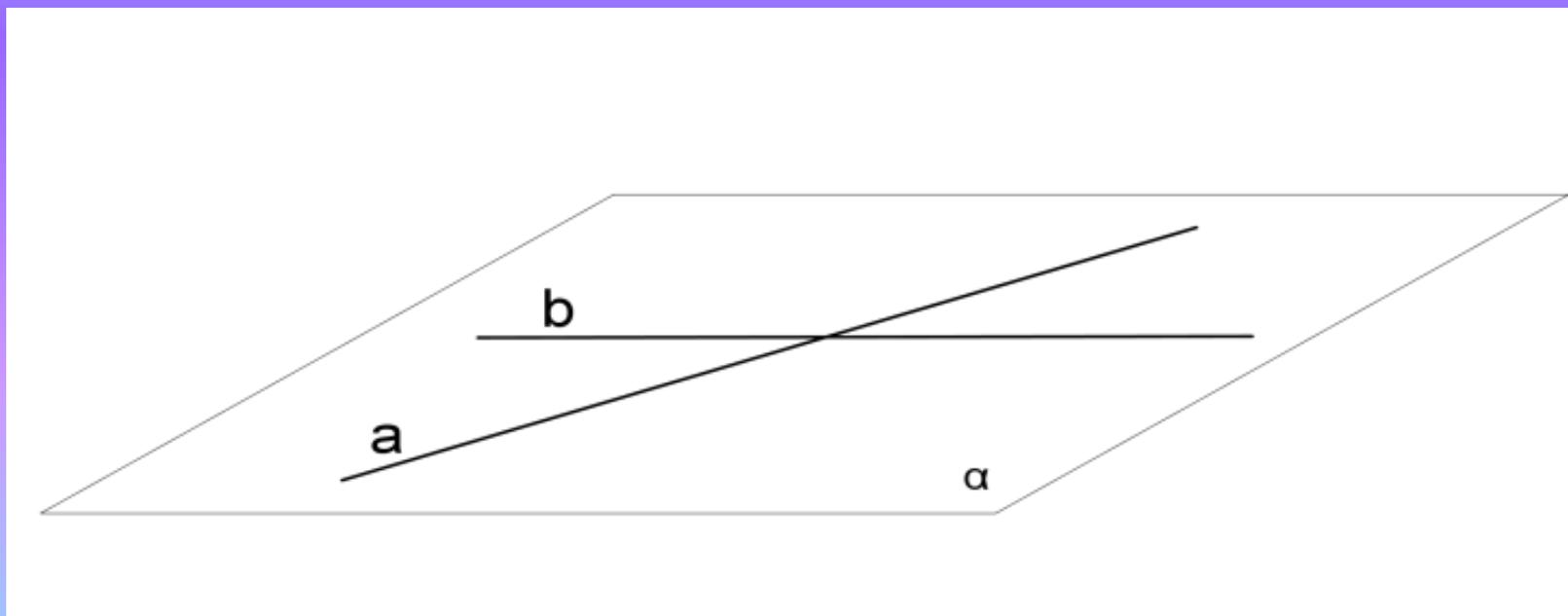


В пространстве прямые расположены  
следующим образом:

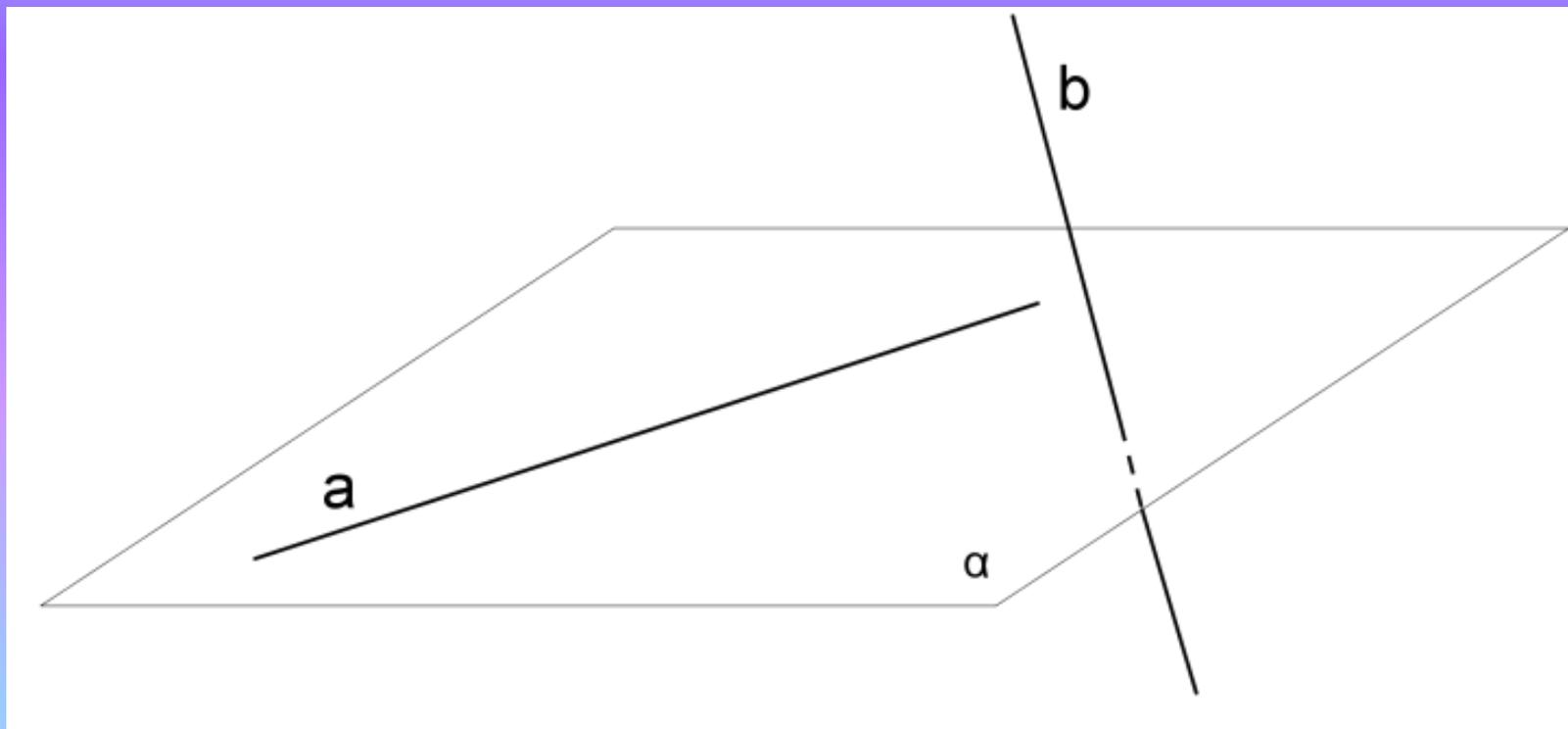
## 1. Параллельны



В пространстве прямые расположены  
следующим образом:  
2. Пересекающиеся



В пространстве прямые расположены  
следующим образом:  
3. Скрещивающиеся

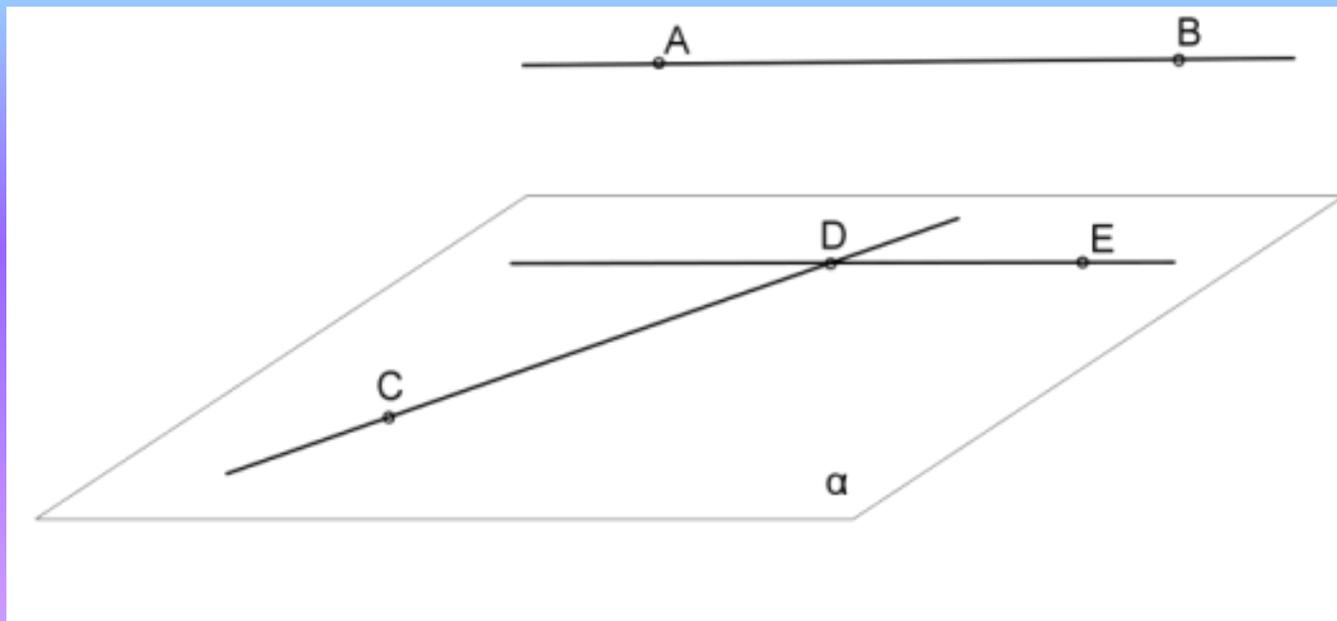


## Теорема

Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

## Доказательство

Рассмотрим скрещивающиеся прямые  $AB$  и  $CD$ .



1. Через точку  $D$  можно провести прямую  $DE$  параллельную  $AB$ .
  2. Через пересекающиеся прямые  $CD$  и  $DE$  можно провести плоскость  $\alpha$
  3. Так как прямая  $AB$  не лежит в этой плоскости и параллельна прямой  $DE$ , то она параллельна плоскости.
  4. Эта плоскость единственная, так как любая другая плоскость, проходящая через  $CD$ , будет пересекаться с  $DE$  и  $AB$ , которая ей параллельна.
- Теорема доказана.

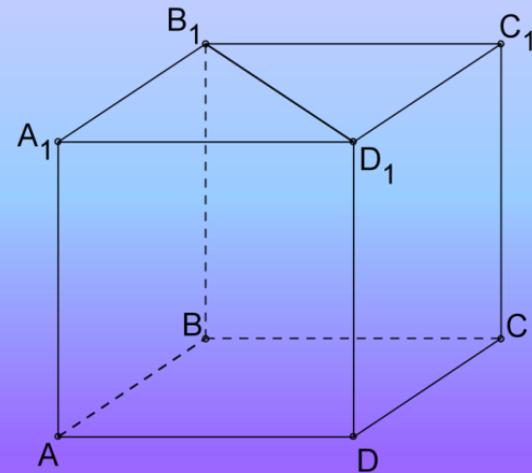
# Углы между прямыми

1. Если прямые параллельны, то угол между ними  $0^{\circ}$ .
2. Углом между двумя пересекающимися прямыми называют величину меньшего из углов, образованных этими прямыми. Если все углы равны, то эти прямые перпендикулярны (образуют угол  $90^{\circ}$ ).
3. Углом между двумя скрещивающимися прямыми называют угол между двумя пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимися прямым.

# Обрати внимание!!!

Провести соответственные параллельные прямые данным скрещивающимися прямым можно через любую точку. Иногда удобно выбрать эту точку на одной из данных скрещивающихся прямых и провести через эту точку прямую параллельную другой из скрещивающихся прямых.

**Задача №1**  
**Дан куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$**

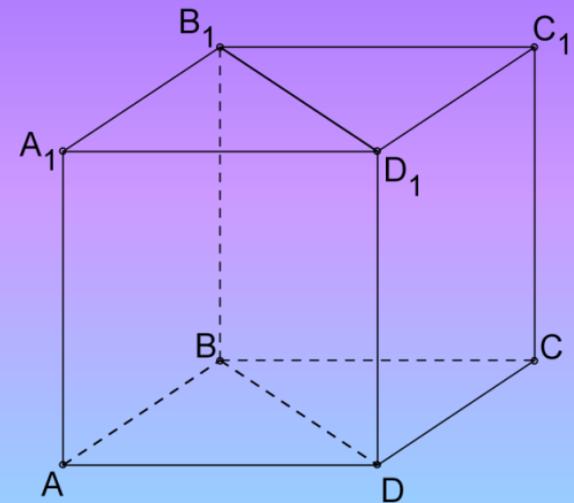


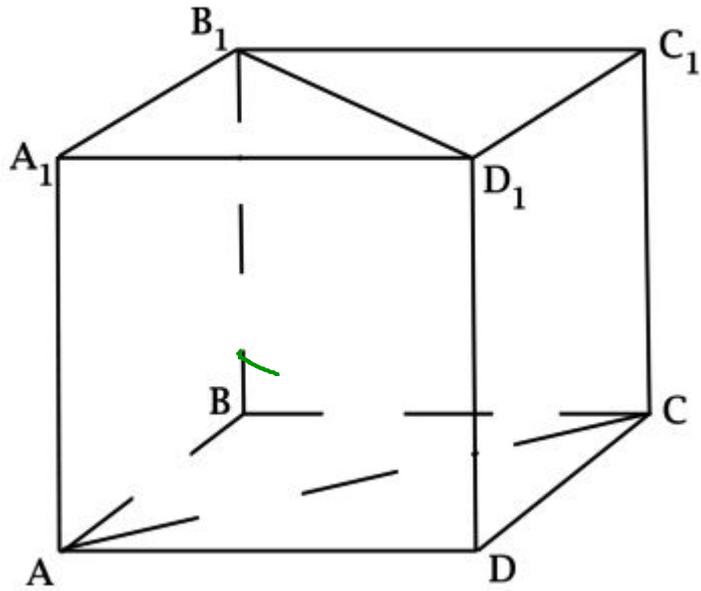
Найти угол между  $AB$  и  $B_1D_1$

Выберем точку  $V$  на прямой  $AB$  и проведём через  $V$  прямую  $VD$  параллельно  $B_1D_1$

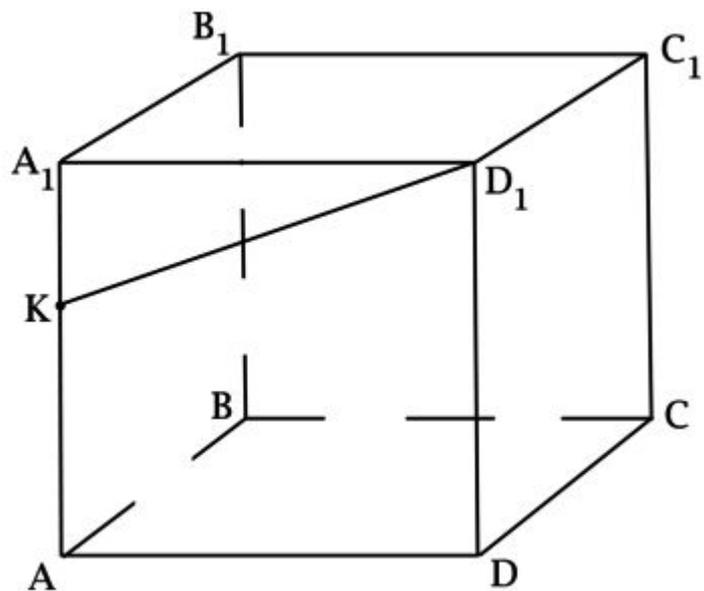
Угол между  $AB$  и  $VD$   $45^\circ$  так как  $ABCD$  квадрат.

Соответственно, угол между  $AB$  и  $B_1D_1$  тоже  $45^\circ$





$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб. Найдите угол между прямыми, содержащими отрезки  $AC$  и  $B_1 D_1$ . Ответ дайте в градусах.



$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб. Точка  $K$  лежит на ребре  $AA_1$ . Найдите угол между прямыми, содержащими отрезки  $D_1K$  и  $AB$ . Ответ дайте в градусах.

Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точка  $K$  – середина стороны  $B_1 C_1$ , а точка  $L$  – середина стороны  $C_1 D_1$ . Найдите угол между прямыми  $AB_1$  и  $KL$ . Ответ дайте в градусах.

