

Используя пример задачи, определить ошибку первого (α) и второго рода (β) и написать вывод. Варианты задания:

- а) поставщик полагает, что доля дефектных изделий составляет не более $(3 + \text{№}/2)$ %;
- б) заказчик считает, что доля дефектных изделий $(20 + \text{№})$ %.

В элементе «Задание № 1» прикрепить документ с ответом.

Проводится приемочный контроль партии продукции. Известно, что в партии могут содержаться дефектные изделия. Поставщик полагает, что доля дефектных изделий составляет не более 3%, а заказчик считает, что качество изготовления изделий низкое и доля дефектных изделий значительна и составляет 20%. Между поставщиком и заказчиком достигнута следующая договоренность: партия продукции принимается, если в выборке из 10 изделий будет обнаружено не более одного дефектного изделия.

Требуется в процессе решения примера сформулировать:

- нулевую (основную) и альтернативную гипотезы,
- определить критическую область и область принятия нулевой гипотезы,
- определить, в чем состоят ошибки первого и второго рода, и найти их вероятность.

Если смотреть на ситуацию с точки зрения заказчика (потребителя), учитывая, что заказчик всегда прав, то нулевой гипотезой H_0 следует принять гипотезу, что продукция содержит 20% брака. Альтернативная гипотеза H_1 соответствует версии поставщика – 3% брака.

Поскольку отбирается 10 изделий, то множество возможных результатов (наличие дефектного изделия) составит $N = (0, 1, 2, 3 \dots 10)$, так как в выборке может оказаться и 0, и 10 дефектных изделий. По условиям поставок, принятым и заказчиком, и поставщиком, гипотеза заказчика H_0 считается:

- отвергнутой, если число дефектов находится в области $n = \{0, 1\}$;
- принятой, если число дефектов находится в области $n = \{2, 3, 4 \dots 10\}$.

Область результатов выборки, при попадании в которую принятая гипотеза отвергается, называется **критической**. В нашем случае это – область $n = \{0, 1\}$.

Напомним, что ошибка первого рода возникает тогда, когда гипотеза H_0 отвергается, хотя она верна. Для нашего примера это означает, что партия изделий принимается (закупается), хотя в ней 20% дефектных изделий. Ошибка второго рода для нашего примера возникает тогда, когда нулевая гипотеза принимается (т.е. партия бракуется), в то время как верна альтернативная гипотеза (дефектных изделий всего 3%). Найдем вероятность этих ошибок.

Сначала заметим, что число дефектных изделий m является биномиальной, случайной величиной. Если допустить, что гипотеза H_0 верна то в выборке $N=10$ этому соответствует 2 случая: $m=0$ и $m=1$. Тогда биномиальная величина имеет вид $B_i(10;2)$. Найдем вероятность каждого из двух событий:

$$P(m=0) = (0,8)^{10} = 0,107,$$

$$P(m=1) = 10 \cdot (0,8)^9 \cdot 0,2 = 0,268.$$

Тогда ошибка первого рода α будет равна сумме этих вероятностей:

$$\alpha = P(m \leq 1) = P(m=0/H_0) + P(m=1/H_0) = 0,375.$$

Если верна гипотеза H_1 , то вероятность выбрать дефектное изделие составляет по условию примера 0,03 (3%). Ошибка второго рода произойдет, если из 10 изделий в выборке окажутся дефектных 2 и более. В этом случае биномиальная величина имеет вид $B_i(10; 0,03)$. Тогда для событий $m \leq 1$ вероятность составит:

$$P(m=0) = (0,97)^{10} = 0,737,$$

$$P(m=1) = 10 \cdot (0,97)^9 \cdot 0,03 = 0,228.$$

Таким образом, вероятность альтернативных событий ($m > 1$) составит величину ошибки второго рода β :

$$\begin{aligned} \beta = P(m > 1 / H_1) &= 1 - P(m \leq 1 / H_1) = 1 - P(m = 0 / H_1) - P(m = 1 / H_1) = \\ &= 1 - 0,737 - 0,228 = 0,035. \end{aligned}$$

Из сравнения ошибок α и β можно заключить, что оговоренная процедура по приему партии выгодна скорее поставщику, чем потребителю (заказчику).