

Решение начально-краевой задачи для линейного уравнения теплопроводности разностным методом

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}; & u = u(t, x) \\ u(t, x)|_{t=0} = \varphi_0(x); & 0 \leq t \leq T \\ u(t, x)|_{x=0} = 0; \\ u(t, x)|_{x=L} = 0; & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

$$\varphi_0(x) = f(x) = x(x - 2) \sin(px)$$

на отрезке $[0, L]$, $L = 2$; $a^2 = 0.3$;

Номера в списке группы соответствуют значению p :

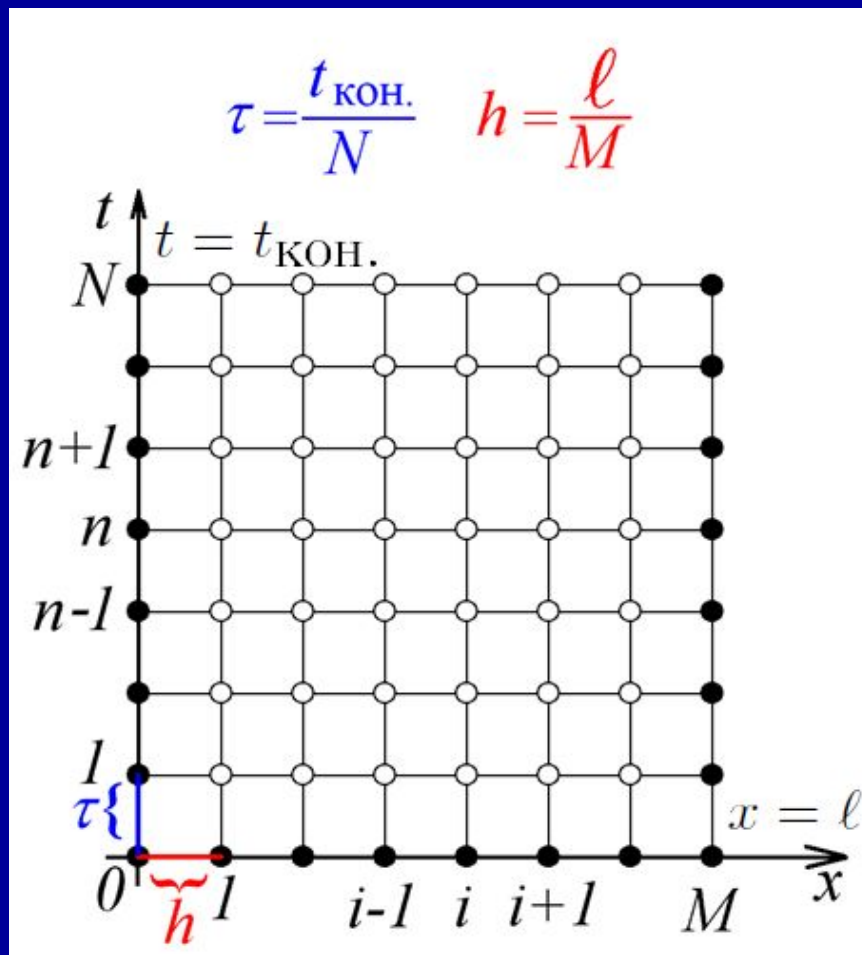
1	7	13	19	$p = 1$
2	8	14	20	$p = 2$
3	9	15	21	$p = 3$
4	10	16	22	$p = 4$
5	11	17	23	$p = 5$
6	12	18	24	$p = 6$

Построение расчетной сетки

$M + 1$ — число точек по x , $h = \Delta x = \frac{\ell}{M}$ — шаг по пространству

$N + 1$ — число точек по t , $\tau = \Delta t = \frac{t_{\text{кон.}}}{N}$ — шаг по времени

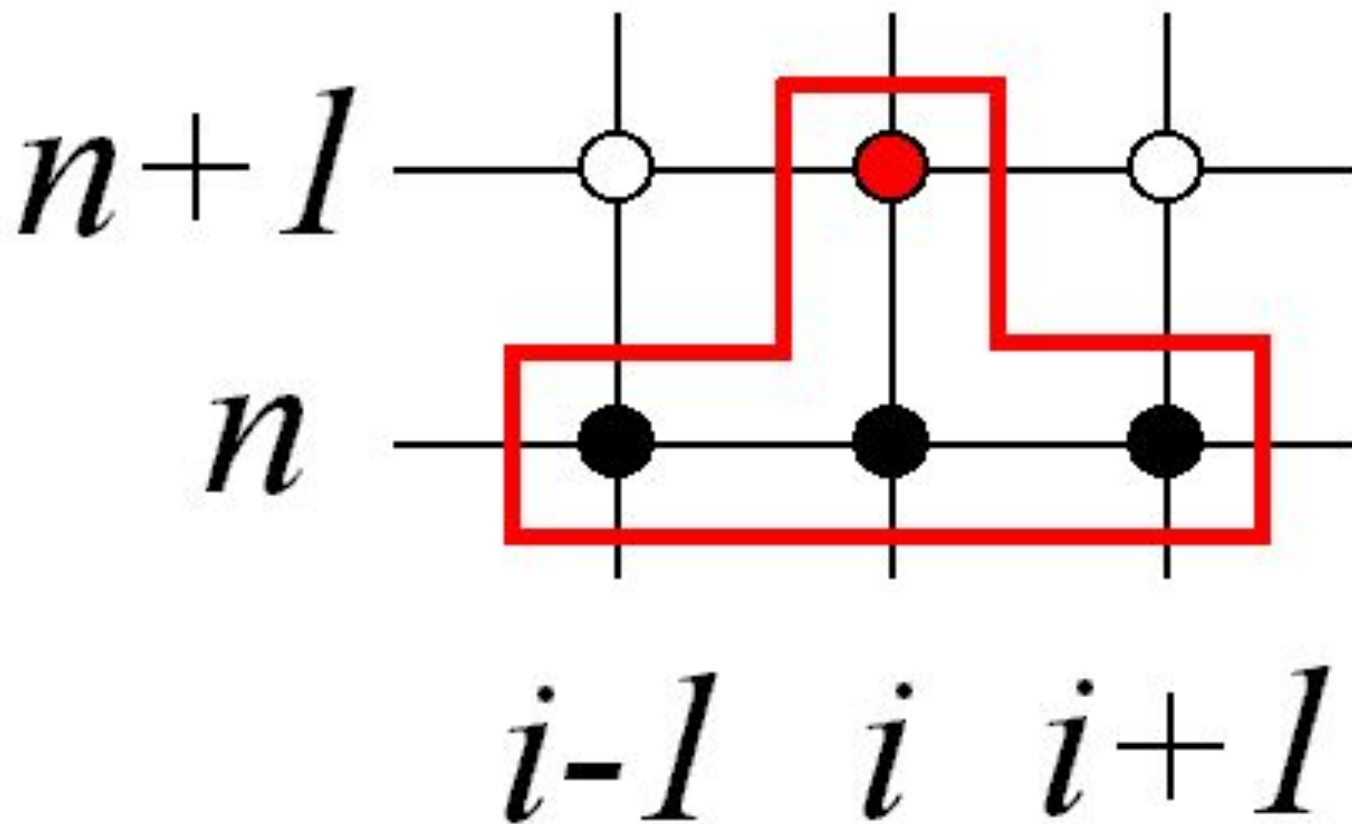
$t_n = \tau \cdot n$, $x_i = h \cdot i$ $u_i^n = u(n \cdot \tau, i \cdot h) = u(t_n, x_i)$



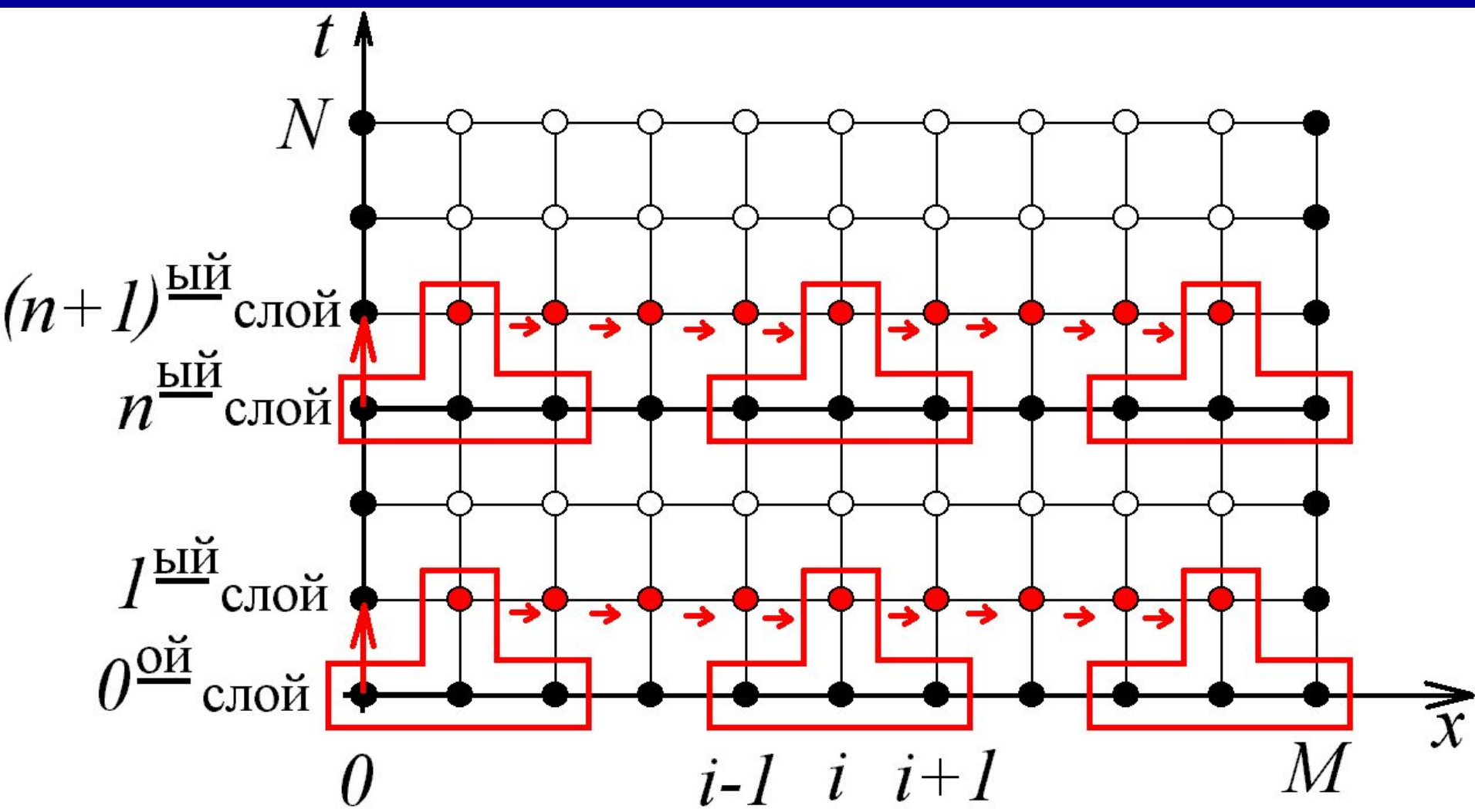
$$u_i^{n+1} = \frac{a^2\tau}{h^2}u_{i+1}^n + \left(1 - 2\frac{a^2\tau}{h^2}\right)u_i^n + \frac{a^2\tau}{h^2}u_{i-1}^n$$

ЯВНАЯ СХЕМА

Шаблон:



Алгоритм счета:



Условие устойчивости счета:

все коэффициенты положительны, в том числе

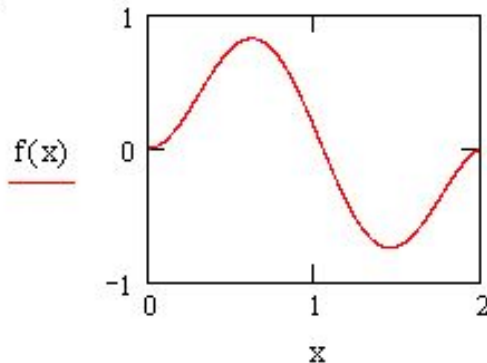
$$1 - 2\frac{a^2\tau}{h^2} \geq 0; \quad 1 \geq 2\frac{a^2\tau}{h^2}; \quad \frac{h^2}{2a^2} \geq \tau$$

$$\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}$$

$p := 3$

$f(x) := x \cdot (2 - x) \cdot \sin(p \cdot x)$ функция, задающая начальное условие

$L := 2$



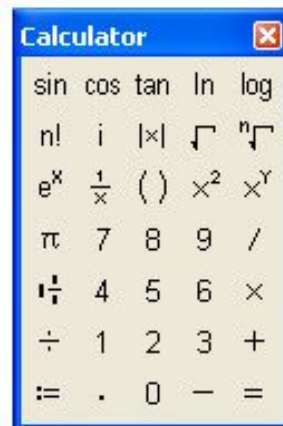
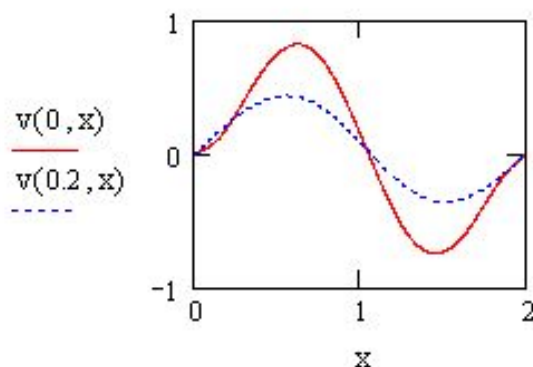
Построение решения в виде отрезка ряда Фурье

$N1 := 10$ $n1 := 0, 1 \dots N1$

$$r_{n1} := \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n1 \cdot x}{L}\right) dx$$

$$A_{n1} := 2 \cdot \frac{r_{n1}}{L}$$

$$v(t, x) := \sum_{n1=1}^{N1} A_{n1} \cdot e^{-\left(\pi^2 \cdot n1^2 \cdot \text{akt} \cdot \frac{t}{L^2}\right)} \sin\left(\frac{\pi \cdot n1 \cdot x}{L}\right)$$



Построение решения разностным методом

$M := 200$ число точек по x

$Mb1 := M - 1$

$i := 0, 1 \dots M$ индекс для нумерации точек по x

$A := 0$ левый конец отрезка по оси x , на котором строится решение

$B := L$ правый конец отрезка по оси x , на котором строится решение

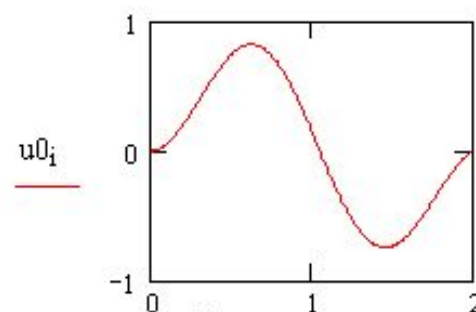
$B = 2$

$h := \frac{(B - A)}{M}$ шаг по пространственной переменной

$h = 0.01$

$hkv := h \cdot h$ $hkv = 1 \times 10^{-4}$

$x_i := i \cdot h$ $u0_i := f(x_i)$



$\tau_{MAX} := \frac{hkv}{(2 \cdot akv)}$

$\tau_{MAX} = 1.666667 \times 10^{-4}$

$\tau := \tau_{MAX} \cdot 0.6$ получение τ - шага по времени - уменьшением τ_{MAX} для устойчивости счета

$\tau = 1 \times 10^{-4}$

$k1 := akv \cdot \frac{\tau}{hkv}$ $k1 = 0.3$

$k2 := 1 - 2 \cdot k1$ $k2 = 0.4$

$N := 1000$ число временных слоев

```

prog(my) :=
  p ← 0
  for i ∈ 0..M
    p0,i ← u0,i
  for n ∈ 1..N
    nb1 ← n - 1
    pn,0 ← 0
    pn,M ← 0
    for i ∈ 1..Mb1
      ip1 ← i + 1
      ib1 ← i - 1
      pn,i ← k1 · pnb1,ip1 + k2 · pnb1,i + k1 · pnb1,ib1
  p

```

Programming

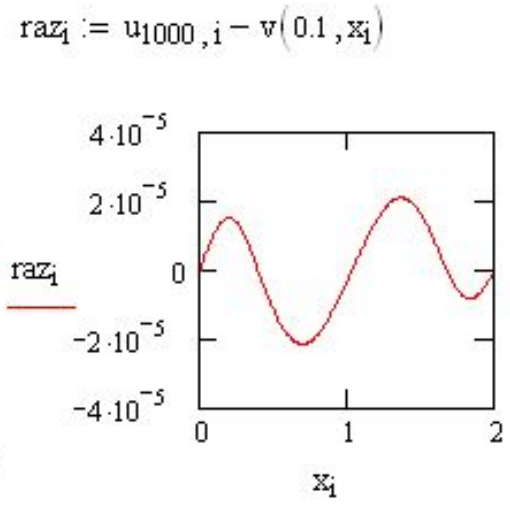
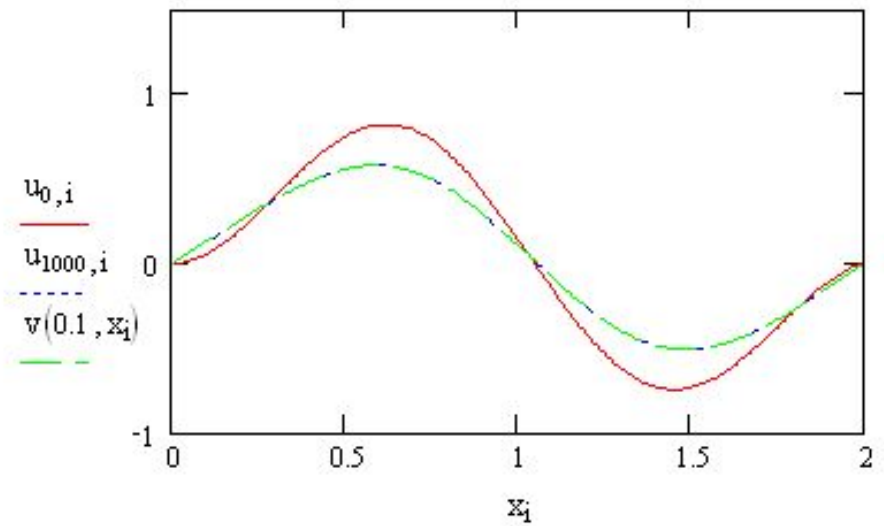
Add Line	←
if	otherwise
for	while
break	continue
return	on error

Matrix

	\times_n	\times^{-1}	$ \times $
$f(\vec{t})$	$M^{\langle \rangle}$	M^T	m..n
$\# \cdot \vec{v}$	$\# \times \vec{v}$	Σv	$\frac{d}{dt}$

Graph

u := prog(1)



Что будет, если условие устойчивости нарушить?