Практическое занятие № 8

Решение начально-краевой задачи для линейного уравнения теплопроводности разностным методом

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}; & u = u(t,x) \\ u(t,x)|_{t=0} = \varphi_0(x); & 0 \le t \le T \\ u(t,x)|_{x=0} = 0; & \\ u(t,x)|_{x=\ell} = 0; & 0 \le x \le L \end{cases}$$

$$\varphi_0(x) = f(x) = x(x-2)\sin(px)$$

на отрезке $[0, L]$, $L = 2$; $a^2 = 0.3$;

Номера в списке группы соответствуют значению p:

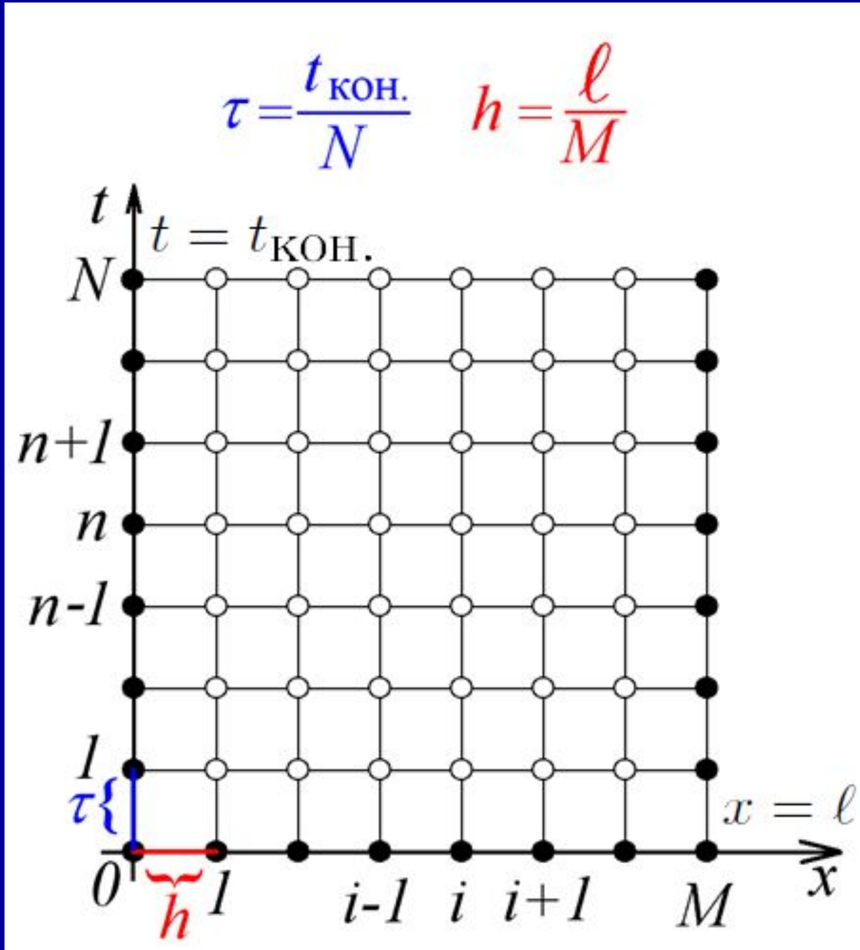
1	7	13	19	$p = 1$
2	8	14	20	$p = 2$
3	9	15	21	$p = 3$
4	10	16	22	$p = 4$
5	11	17	23	$p = 5$
6	12	18	24	$p = 6$

Построение расчетной сетки

$M+1$ — число точек по x, $\quad h = \Delta x = \dfrac{\ell}{M}$ — шаг по пространству

$N+1$ — число точек по t, $\quad \tau = \Delta t = \dfrac{t_{\text{кон.}}}{N}$ — шаг по времени

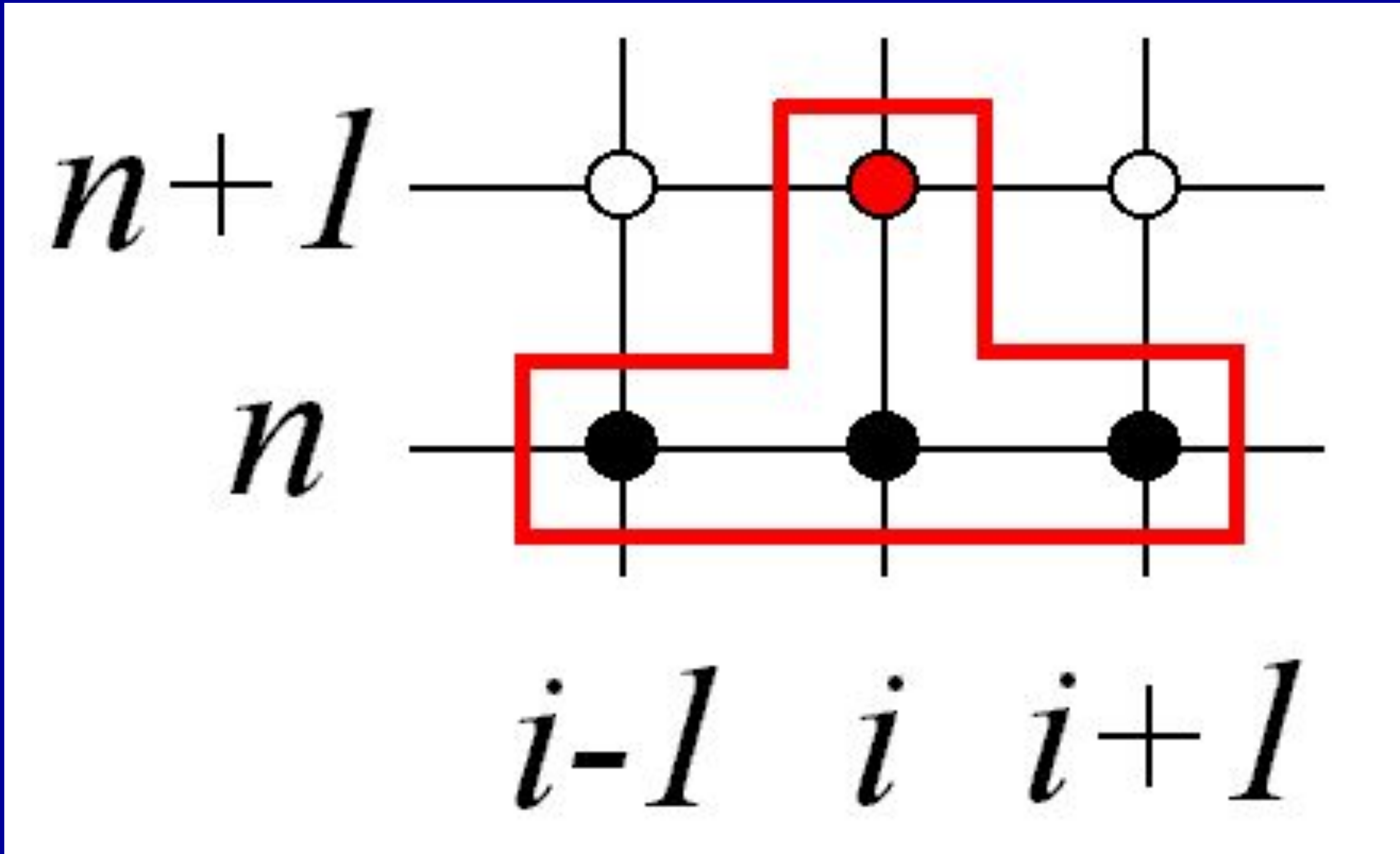
$t_n = \tau \cdot n\ , \quad x_i = h \cdot i \qquad u_i^n = u(n \cdot \tau, i \cdot h) = u(t_n, x_i)$



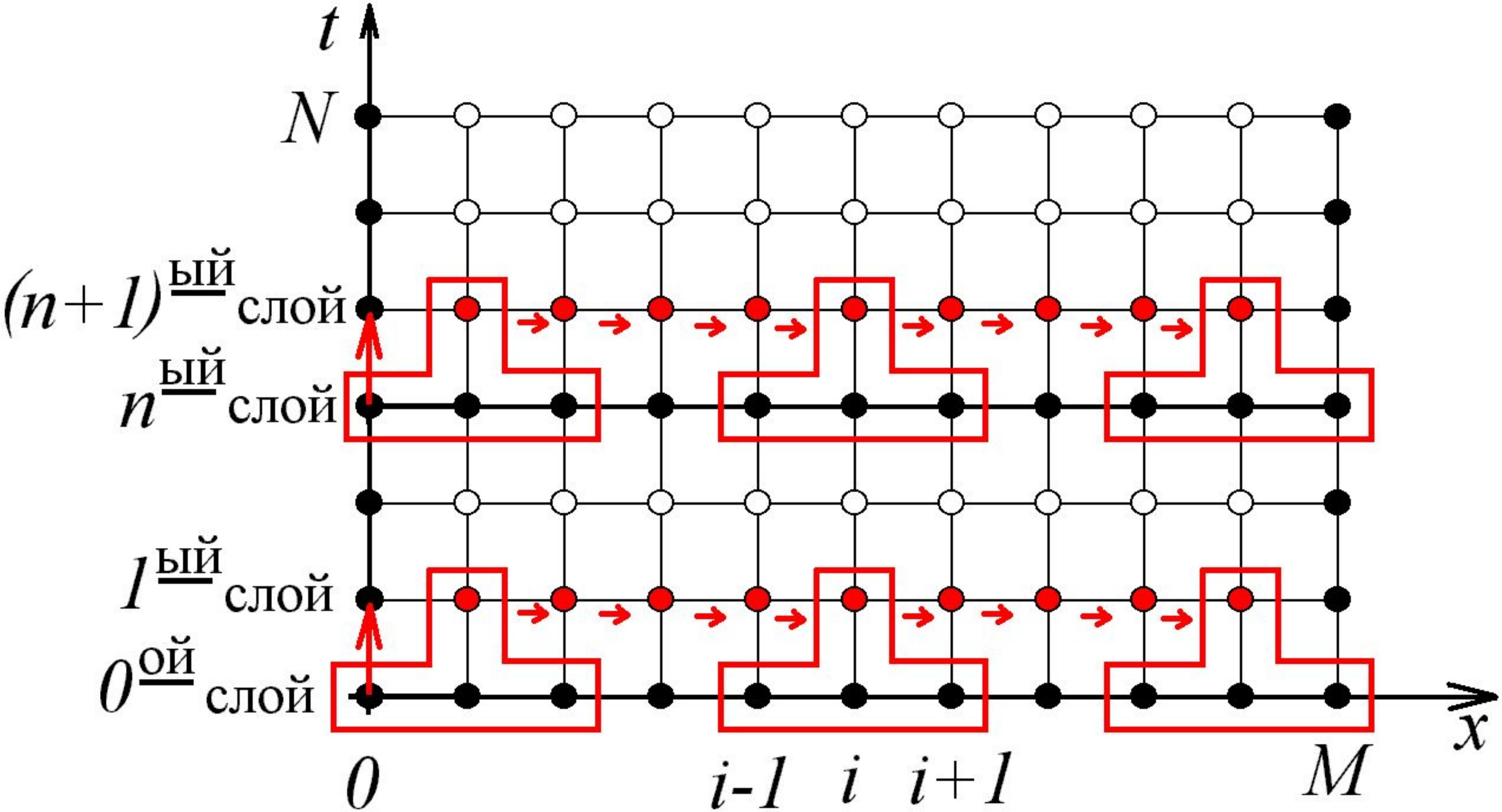
$$u_i^{n+1} = \frac{a^2\tau}{h^2} u_{i+1}^n + \left(1 - 2\frac{a^2\tau}{h^2}\right) u_i^n + \frac{a^2\tau}{h^2} u_{i-1}^n$$

явная схема

Шаблон:



Алгоритм счета:



Условие устойчивости счета:

все коэффициенты положительны, в том числе

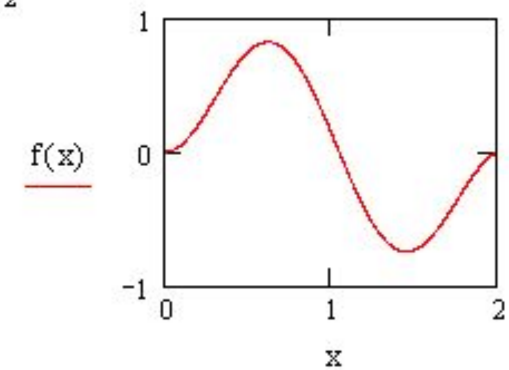
$$1 - 2\frac{a^2\tau}{h^2} \geq 0\ ; \quad 1 \geq 2\frac{a^2\tau}{h^2}\ ; \quad \frac{h^2}{2a^2} \geq \tau$$

$$\boxed{\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}}$$

$p := 3$

$f(x) := x \cdot (2 - x) \cdot \sin(p \cdot x)$ функция, задающая начальноеусловие

$L := 2$



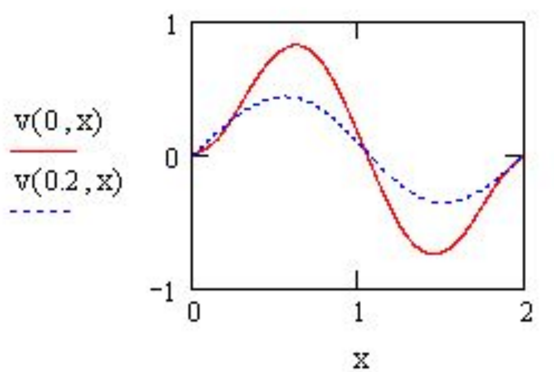
Построение решения в виде отрезка ряда Фурье

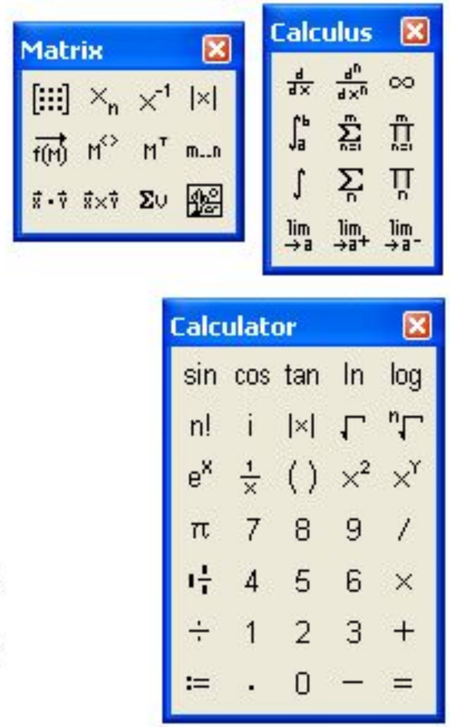
$N1 := 10 \qquad n1 := 0, 1 .. N1$

$$r_{n1} := \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n1 \cdot x}{L}\right) dx$$

$$A_{n1} := 2 \cdot \frac{r_{n1}}{L}$$

$$v(t,x) := \sum_{n1=1}^{N1} A_{n1} \cdot e^{-\left(\pi^2 \cdot n1^2 akv \cdot \frac{t}{L^2}\right)} \sin\left(\frac{\pi \cdot n1 \cdot x}{L}\right)$$





Построение решения разностным методом

$M := 200$ число точек по x

$Mb1 := M - 1$

$i := 0, 1 .. M$ индекс для нумерации точек по x

$A := 0$ левый конец отрезка по оси x, на котором строится решенине

$B := L$ правый конец отрезка по оси x, на котором строится решенине

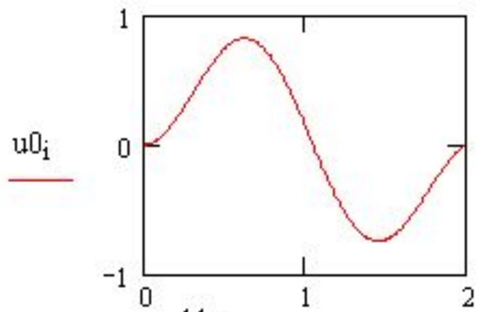
$B = 2$

$h := \frac{(B - A)}{M}$ шаг по пространственной переменной

$h = 0.01$

$hkv := h \cdot h \qquad hkv = 1 \times 10^{-4}$

$x_i := i \cdot h \quad u0_i := f(x_i)$



$tauMAX := \frac{hkv}{(2 \cdot akv)}$

$tauMAX = 1.666667 \times 10^{-4}$

$tau := tauMAX \cdot 0.6$ получение tau - шага по времени - уменьшением tauMAX для устойчивости счета

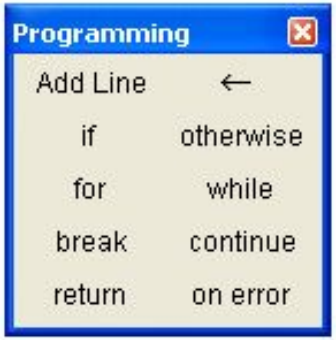
$tau = 1 \times 10^{-4}$

$k1 := akv \cdot \frac{tau}{hkv} \qquad k1 = 0.3$

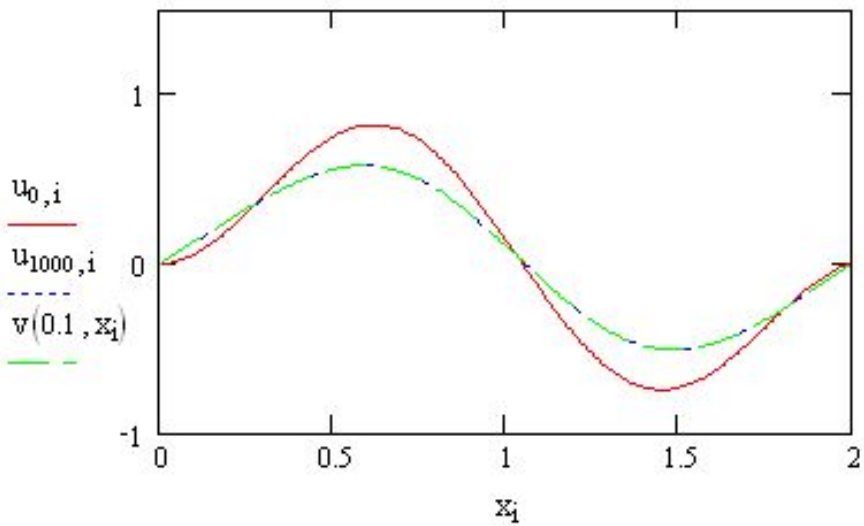
$k2 := 1 - 2 \cdot k1 \qquad k2 = 0.4$

$N := 1000$ число временных слоев

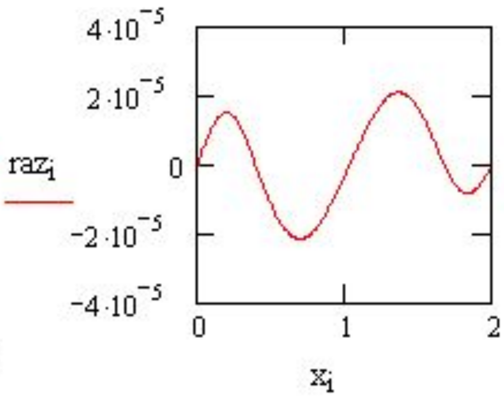
```
prog(my) := | p ← 0
            | for  i ∈ 0..M
            |   p0,i ← u0i
            | for  n ∈ 1..N
            |   | nb1 ← n − 1
            |   | pn,0 ← 0
            |   | pn,M ← 0
            |   | for  i ∈ 1..Mb1
            |   |   | ip1 ← i + 1
            |   |   | ib1 ← i − 1
            |   |   | pn,i ← k1·pnb1,ip1 + k2·pnb1,i + k1·pnb1,ib1
            | p
```



$u := \text{prog}(1)$



$raz_i := u_{1000,i} - v(0.1, x_i)$



Что будет, если условие устойчивости нарушить?