

Метод геометрических рядов и точные решения дифференциально- разностных уравнений

Автор дата

Актуальность и цели работы

В последнее время возрос интерес к разработке асимптотических методов нелинейной динамики. Имеется потребность в методах, способных находить точные решения дифференциально разностных уравнений (ДРУ) и систем ДРУ. В работе рассмотрен метод геометрических рядов.

Целью данной работы является описание данного метода и его применение к некоторым широко известным уравнениям.

Метод получения точного решения на примере уравнения Бюргерса

$$\varphi_t - \varphi\varphi_x - \varphi_{xx} = 0, \quad (1)$$

$$\text{Замена : } \varphi = \varepsilon u, \varepsilon \ll 1, \quad (2)$$

$$u_t - \varepsilon \cdot u \cdot u_x - u_{xx} = 0 \quad u = u(x, t), \quad (3)$$

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad (4)$$

$$\varepsilon^0 : u_{0t} - u_{0xx} = 0, \quad (5)$$

$$\varepsilon^1 : u_{1t} - u_{1xx} = u_0 u_{0x}, \quad (6)$$

$$\Rightarrow u_0 = e^\theta, \theta = kx - \omega t \Rightarrow \omega = -k^2, \quad (7)$$

$$\Rightarrow u_1 = Ae^{2\theta}, A = -\frac{1}{2k}, u_1 = -\frac{1}{2k}e^{2\theta}, \quad (8)$$

Метод получения точного решения на примере уравнения Бюргерса

$$(4) \Rightarrow u = e^\theta - \frac{\varepsilon}{2k} e^{2\theta} + \frac{\varepsilon^2}{4k^2} e^{3\theta} - \frac{\varepsilon^3}{8k^3} e^{4\theta} + \dots + \left(-\frac{\varepsilon}{2k}\right)^n e^{(n+1)\theta} + \dots = \frac{e^\theta}{1 + \frac{\varepsilon}{2k} e^\theta}, \quad (9)$$

Обозначим: $\alpha = \frac{\varepsilon}{2k} \Rightarrow u = \frac{e^\theta}{1 + \alpha e^\theta},$ (10)

Замена: $\delta = \theta + \ln \alpha \Rightarrow e^\delta = \alpha e^\theta,$ (11)

$$(10) \Rightarrow u = \frac{1}{\alpha} \frac{e^\delta}{1 + e^\delta} = \frac{1}{2\alpha} \left(1 + th \frac{\delta}{2}\right) = \frac{k}{\varepsilon} \left(1 + th \frac{\delta}{2}\right), \quad (12)$$

$\varphi = \varepsilon u = k \left(1 + th \frac{\delta}{2}\right)$ - точное решение уравнения Бюргерса

Цепочка Вольтерры

$$\frac{d}{dt}u_n(t) = u_n(t) (u_{n+1}(t) - u_{n-1}(t)) \longrightarrow z = dn + \omega t,$$

Переход к уравнению бегущей волны

$$-\omega \frac{d}{dz}u_n(z) + u_n(z) (u_{n+1}(z) - u_{n-1}(z)) = 0$$

Ищем решение в виде экспоненциального ряда функций с неизвестными коэффициентами

$$u_n = \sum_{k=0}^{\infty} M_k e^{kz}$$

Следовательно

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} M_k \delta^k e^{kz}, \quad u_{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} M_k \delta^{-k} e^{kz},$$

Цепочка Вольтерры

Получим степенной ряд по переменной Z :

$$u_n = M_0 + M_1 Z - \frac{\delta M_1^2 Z^2}{(\delta - 1)^2 M_0} + \frac{\delta^2 (\delta^2 + \delta + 1) M_1^3 Z^3}{(\delta + 1)^2 (\delta - 1)^4 M_0^2} - \frac{\delta^3 (\delta^2 + 1) M_1^4 Z^4}{(\delta + 1)^2 (\delta - 1)^6 M_0^3} + \frac{\delta^4 (\delta^4 + \delta^3 + \delta^2 + \delta + 1) M_1^5 Z^5}{(\delta + 1)^4 (\delta - 1)^8 M_0^4} - \frac{\delta^5 (\delta^4 + \delta^2 + 1) M_1^6 Z^6}{(\delta + 1)^4 (\delta - 1)^{10} M_0^5} + \frac{\delta^6 (\delta^6 + \delta^5 + \delta^4 + \delta^3 + \delta^2 + \delta + 1) M_1^7 Z^7}{(\delta + 1)^6 (\delta - 1)^{12} M_0^6}$$

Далее осуществляется проверка, что ряд является геометрическим, путем вычисления для него нескольких первых диагональных аппроксимант Паде:

$$[1/1] = M_0 \frac{(\delta - 1)^2 M_0 + (\delta^2 - \delta + 1) M_1 Z}{(\delta - 1)^2 M_0 + \delta M_1 Z},$$

$$[2/2] = M_0 \frac{((\delta + 1)(\delta - 1)^2 M_0 + M_1 Z) ((\delta + 1)(\delta - 1)^2 M_0 + \delta^3 M_1 Z)}{((\delta + 1)(\delta - 1)^2 M_0 + \delta M_1 Z) ((\delta + 1)(\delta - 1)^2 M_0 + \delta^2 M_1 Z)}$$

$$[3/3] = [2/2].$$

Цепочка Вольтерры

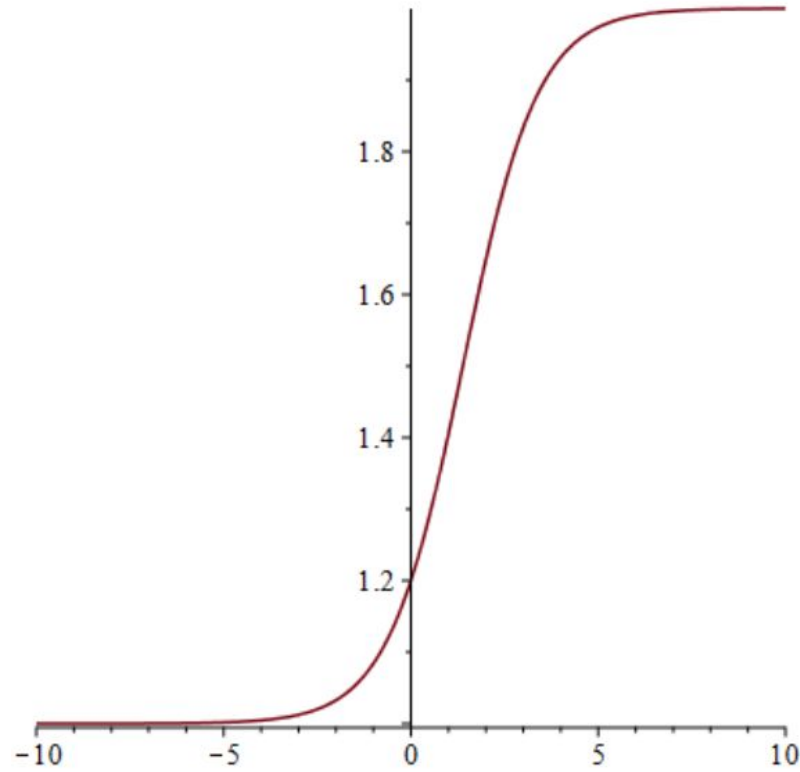


График решения уравнения (3.11) при $M_0 = 2$, $M_1 = 1$, $\delta = 1$.

Модифицированное дискретное уравнение Савада-Котера

$$\frac{d}{dt}u_n = u_{n+1}u_n^3u_{n-1}(u_{n+2}u_{n+1} - u_{n-1}u_{n-2}) - u_n^2(u_{n+1} - u_{n-1}).$$

Перейдя к текущей переменной получим:

$$-\omega \frac{d}{dz}u_n + u_{n+1}u_n^3u_{n-1}(u_{n+2}u_{n+1} - u_{n-1}u_{n-2}) - u_n^2(u_{n+1} - u_{n-1}) = 0.$$

Применяя те же преобразования что и в предыдущем случае, собирая по степеням экспоненциальной функции и приравнивая к нулю коэффициент при e^z , получаем:

$$\omega = M_0^2(1 - \delta^{-2})(M_0^4(\delta^2 + \delta + 1) - \delta).$$

Модифицированное дискретное уравнение Савада-Котера

Как и в предыдущем случае, последовательно приравнявая коэффициенты при $e^{2z}, e^{3z} \dots$ к нулю находим коэффициенты M^2, M^3, \dots после замены $e^Z = Z$ ряд принимает форму

$$\begin{aligned} u_n &= M_0 + M_1 Z - \frac{2\delta M_1^2 Z^2}{M_0(\delta - 1)^2} + \frac{3\delta^2 M_1^3 Z^3}{M_0^2(\delta - 1)^4} - \frac{4\delta^3 M_1^4 Z^4}{M_0^3(\delta - 1)^6} + \dots \\ &= M_0 + M_1 Z + \sum_{n=2} \left(-\frac{\delta}{M_0} \right)^{n-1} \frac{n M_1^n Z^n}{(\delta - 1)^{2n}} \end{aligned}$$

Расчет аппроксимаций Паде показывает, что $[1/1] = [2/2], [2/2] = [3/3]$. После обратной замены $Z = e^z$, аппроксиманта

$$[2/2] = M_0 + \frac{M_0^2 M_1 (\delta - 1)^4 e^z}{(M_0(\delta - 1)^2 + M_1 \delta e^z)^2}$$

становится точным решением уравнения.

Модифицированное дискретное уравнение Савада-Котера

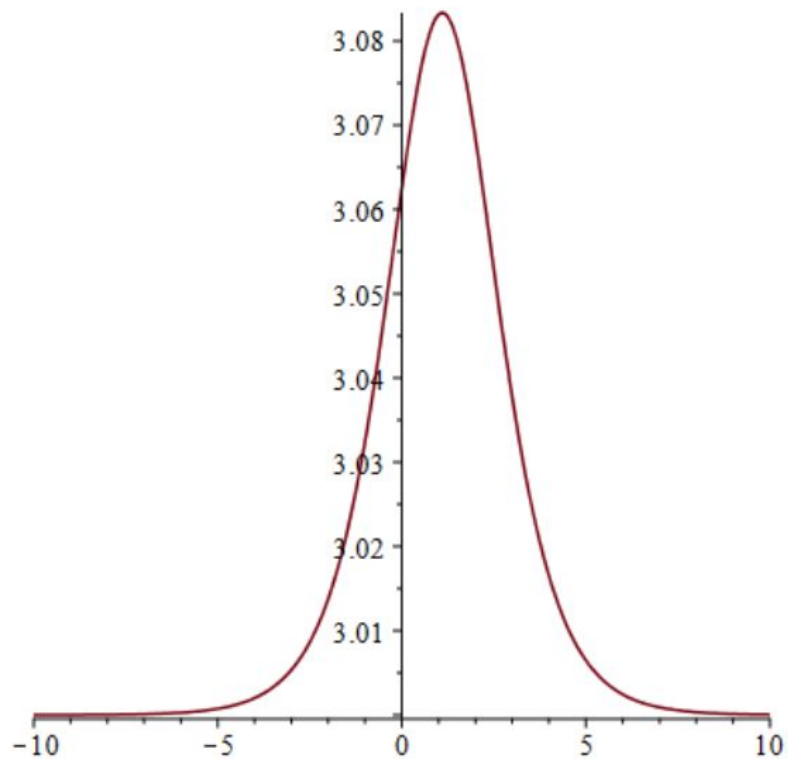


График решения уравнения (4.6) при $M_0 = 1$, $M_1 = 2$, $\delta = 1$.

Заключение

В работе рассмотрено применение метода геометрических рядов на нескольких известных дифференциально-разностных уравнениях. Метод достаточно универсален и способен решать ДРУ с полиномиальной и рациональной правой частью, содержащей как явно определенные элементарные функции зависимой переменной, так и функции, являющиеся решениями заданных ОДУ. Данный метод хорошо поддается алгоритмизации в современных системах символьной математики.

Спасибо за внимание!