Метод геометрических рядов и точные решения дифференциально-разностных уравнений

Автор дата

Актуальность и цели работы

В последнее время возрос интерес к разработке асимптотических методов нелинейной динамики. Имеется потребность в методах, способных находить точные решения дифференциально разностных уравнений (ДРУ) и систем ДРУ. В работе рассмотрен метод геометрических рядов.

Целью данной работы является описание данного метода и его применение к некоторым широко известным уравнениям.

Метод получения точного решения на примере уравнения Бюргерса

$$\varphi_t - \varphi\varphi_x - \varphi_{xx} = 0, \quad (1)$$

Замена : $\varphi = \varepsilon u, \varepsilon << 1,$ (2)

$$u_t - \varepsilon \cdot u \cdot u_x - u_{xx} = 0 \quad u = u(x,t), \quad (3)$$

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots, \quad (4)$$

$$\varepsilon^0 : u_{0t} - u_{0xx} = 0, \quad (5)$$

$$\varepsilon^1 : u_{1t} - u_{1xx} = u_0 u_{0x}, \quad (6)$$

$$\Rightarrow u_0 = e^\theta, \theta = kx - \omega t \Rightarrow \omega = -k^2, \quad (7)$$

$$\Rightarrow u_1 = Ae^{2\theta}, A = -\frac{1}{2k}, u_1 = -\frac{1}{2k}e^{2\theta}, \quad (8)$$

Метод получения точного решения на примере уравнения Бюргерса

$$(4) \Rightarrow u = e^{\theta} - \frac{\varepsilon}{2k}e^{2\theta} + \frac{\varepsilon^2}{4k^2}e^{3\theta} - \frac{\varepsilon^3}{8k^3}e^{4\theta} + \ldots + (-\frac{\varepsilon}{2k})^n e^{(n+1)\theta} + \ldots = \frac{e^{\theta}}{1 + \frac{\varepsilon}{2k}e^{\theta}}, \quad (9)$$

Обозначим: $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{2k} \Rightarrow u = \dfrac{e^{\theta}}{1 + \alpha e^{\theta}},$ (10)

Замена: $\delta = \theta + \ln\alpha \Rightarrow e^{\delta} = \alpha e^{\theta},$ (11)

$$(10) \Rightarrow u = \frac{1}{\alpha}\frac{e^{\delta}}{1 + e^{\delta}} = \frac{1}{2\alpha}(1 + th\frac{\delta}{2}) = \frac{k}{\varepsilon}(1 + th\frac{\delta}{2}), \quad (12)$$

$\boxed{\varphi = \varepsilon u = k(1 + th\dfrac{\delta}{2})}$ - точное решение уравнения Бюргерса

Цепочка Вольтерры

$$\frac{d}{dt}u_n(t) = u_n(t)\left(u_{n+1}(t) - u_{n-1}(t)\right) \longrightarrow \quad z = dn + \omega t,$$

Переход к уравнению бегущей волны

$$-\omega\frac{d}{dz}u_n(z) + u_n(z)\left(u_{n+1}(z) - u_{n-1}(z)\right) = 0$$

Ищем решение в виде экспоненциального ряда функций с неизвестными коэффициентами

$$u_n = \sum_{k=0}^{\infty} M_k \mathrm{e}^{kz}$$

Следовательно

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} M_k \delta^k \mathrm{e}^{kz}, \quad u_{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} M_k \delta^{-k} \mathrm{e}^{kz},$$

Цепочка Вольтерры

Получим степенной ряд по переменной Z:

$$
\begin{aligned}
u_n = & M_0 + M_1 Z - \frac{\delta M_1^2 Z^2}{(\delta-1)^2 M_0} + \frac{\delta^2\left(\delta^2+\delta+1\right) M_1^3 Z^3}{(\delta+1)^2(\delta-1)^4 M_0^2} \\
& - \frac{\delta^3\left(\delta^2+1\right) M_1^4 Z^4}{(\delta+1)^2(\delta-1)^6 M_0^3} + \frac{\delta^4\left(\delta^4+\delta^3+\delta^2+\delta+1\right) M_1^5 Z^5}{(\delta+1)^4(\delta-1)^8 M_0^4} \\
& - \frac{\delta^5\left(\delta^4+\delta^2+1\right) M_1^6 Z^6}{(\delta+1)^4(\delta-1)^{10} M_0^5} + \frac{\delta^6\left(\delta^6+\delta^5+\delta^4+\delta^3+\delta^2+\delta+1\right) M_1^7 Z^7}{(\delta+1)^6(\delta-1)^{12} M_0^6}
\end{aligned}
$$

Далее осуществляется проверка, что ряд является геометрическим, путем вычисления для него нескольких первых диагональных аппроксимант Паде:

$$
[1/1] = M_0 \frac{(\delta-1)^2 M_0 + \left(\delta^2-\delta+1\right) M_1 Z}{(\delta-1)^2 M_0 + \delta M_1 Z},
$$

$$
[2/2] = M_0 \frac{\left((\delta+1)(\delta-1)^2 M_0 + M_1 Z\right)\left((\delta+1)(\delta-1)^2 M_0 + \delta^3 M_1 Z\right)}{\left((\delta+1)(\delta-1)^2 M_0 + \delta M_1 Z\right)\left((\delta+1)(\delta-1)^2 M_0 + \delta^2 M_1 Z\right)}
$$

$$
[3/3] = [2/2].
$$

Цепочка Вольтерры

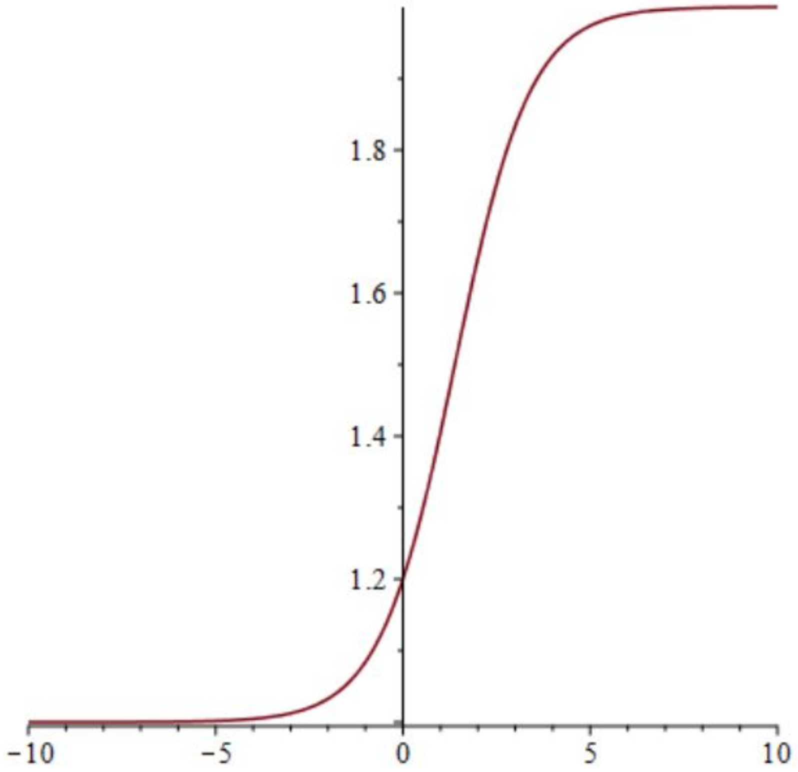

График решения уравнения (3.11) при $M_0 = 2, M_1 = 1, \delta = 1$.

Модифицированное дискретное уравнение Савада-Котера

$$\frac{d}{dt}u_n = u_{n+1}u_n^3u_{n-1}\left(u_{n+2}u_{n+1} - u_{n-1}u_{n-2}\right) - u_n^2\left(u_{n+1} - u_{n-1}\right).$$

Перейдя к текущей переменной получим:

$$-\omega\frac{d}{dz}u_n + u_{n+1}u_n^3u_{n-1}\left(u_{n+2}u_{n+1} - u_{n-1}u_{n-2}\right) - u_n^2\left(u_{n+1} - u_{n-1}\right) = 0.$$

Применяя те же преобразования что и в предыдущем случае, собирая по степеням экспоненциальной функции и приравнивая к нулю коэффициент при e^z, получаем:

$$\omega = M_0^2\left(1 - \delta^{-2}\right)\left(M_0^4\left(\delta^2 + \delta + 1\right) - \delta\right).$$

Модифицированное дискретное уравнение Савада-Котера

Как и в предыдущем случае, последовательно приравнивая коэффициенты при e^{2z}, e^{3z}.. к нулю находим коэффициенты M^2, M^3, ... после замены $e^Z=Z$ ряд принимает форму

$$
\begin{aligned}
u_n &= M_0 + M_1 Z - \frac{2\delta M_1^2 Z^2}{M_0(\delta-1)^2} + \frac{3\delta^2 M_1^3 Z^3}{M_0^2(\delta-1)^4} - \frac{4\delta^3 M_1^4 Z^4}{M_0^3(\delta-1)^6} + \cdots \\
&= M_0 + M_1 Z + \sum_{n=2} \left(-\frac{\delta}{M_0}\right)^{n-1} \frac{n M_1^n Z^n}{(\delta-1)^{2n}}
\end{aligned}
$$

Расчет аппроксимаций Паде показывает, что [1/1] = [2/2], [2/2]= [3/3]. После обратной замены $Z=e^Z$, аппроксиманта

$$
[2/2] = M_0 + \frac{M_0^2 M_1 (\delta-1)^4 \mathrm{e}^z}{\left(M_0(\delta-1)^2 + M_1 \delta \mathrm{e}^z\right)^2}
$$

становится точным решением уравнения.

Модифицированное дискретное уравнение Савада-Котера

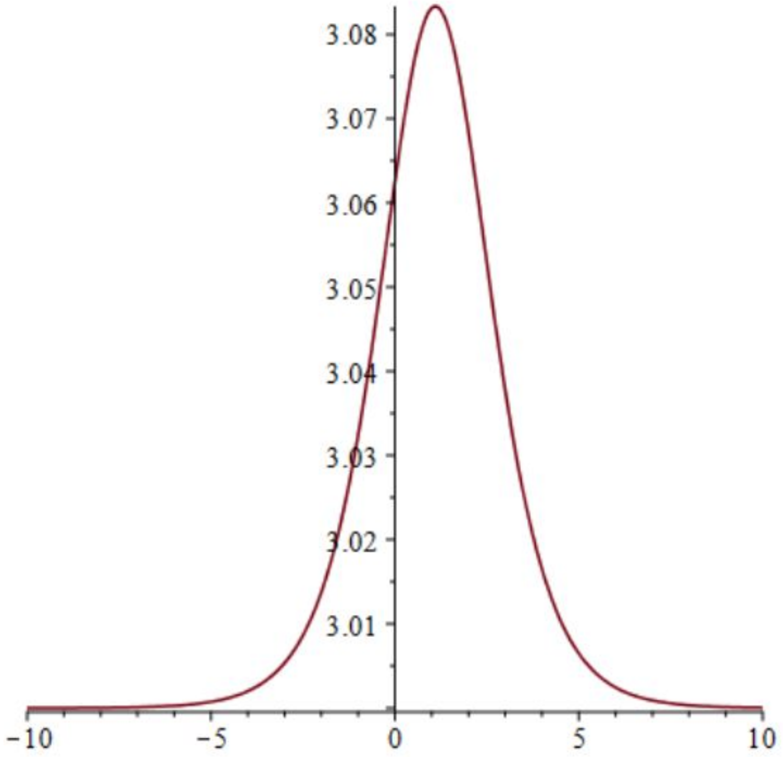

График решения уравнения (4.6) при $M_0 = 1, M_1 = 2, \delta = 1.$

Заключение

В работе рассмотрено применение метода геометрических рядов на нескольких известных дифференциально-разностных уравнениях.Метод достаточно универсален и способен решать ДРУ с полиномиальной и рациональной правой частью, содержащей как явно определенные элементарные функции зависимой переменной, так и функции, являющиеся решениями заданных ОДУ. Данный метод хорошо поддается алгоритмизации в современных системах символьной математики.

Спасибо за внимание!