



# ЛЕКЦИЯ №4

# УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

# ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. Уравнение Бернулли для установившегося движения идеальной жидкости. Геометрическое и энергетическое толкование уравнения Бернулли.
2. Уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости. Коэффициент Кориолиса. Общие сведения о гидравлических потерях.
3. Расходомер Вентури. Построение диаграмм по уравнению Бернулли.
4. Краткие сведения о движении газов: условия применимости законов гидравлики к движению газов.

# УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

$$\begin{aligned} & (Xdx + Ydy + Zdz) - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \\ & = \frac{du_x}{d\tau} dx + \frac{du_y}{d\tau} dy + \frac{du_z}{d\tau} dz \end{aligned}$$

$$(Xdx + Ydy + Zdz) = -gdz$$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = dp$$

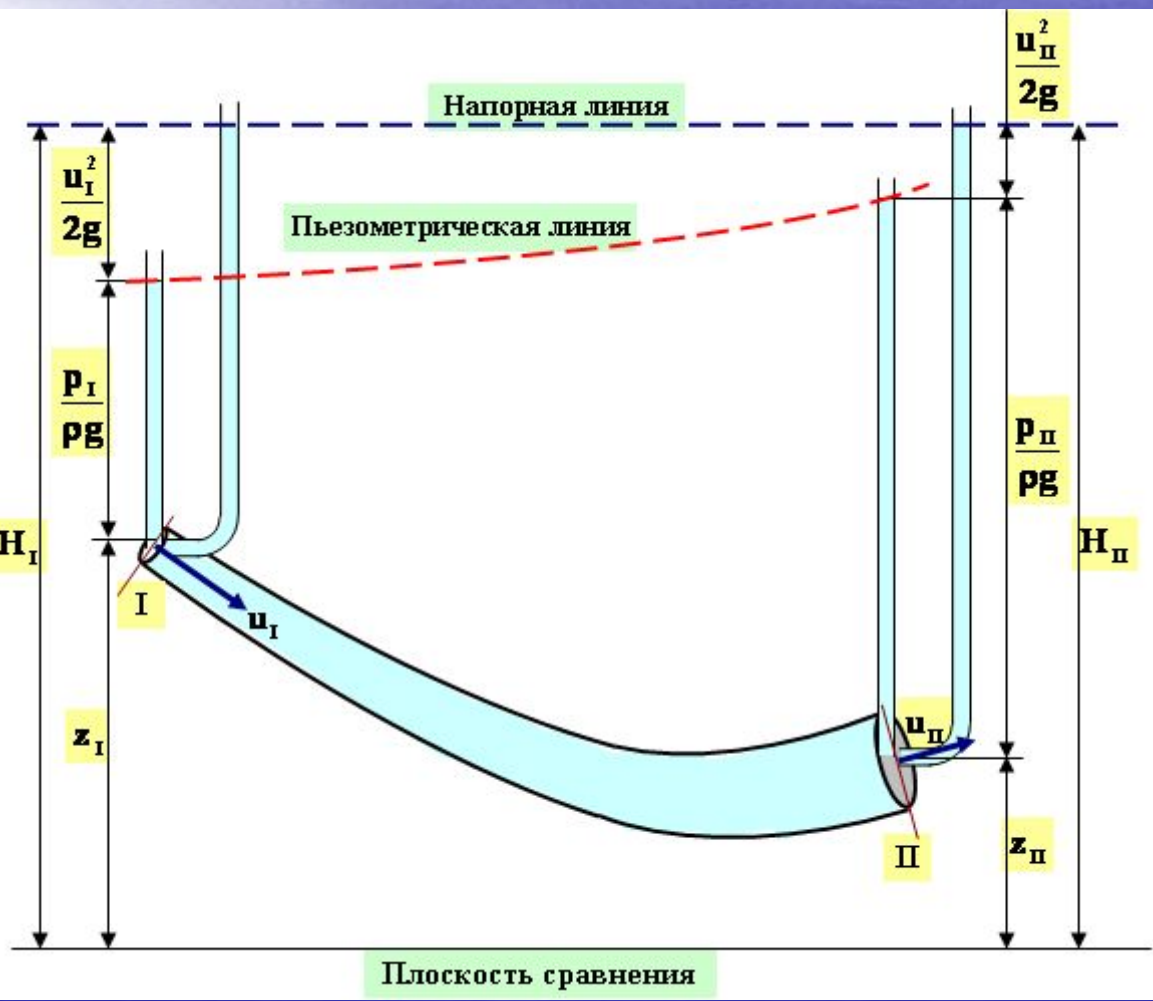
$$\frac{du_x}{d\tau} dx + \frac{du_y}{d\tau} dy + \frac{du_z}{d\tau} dz = \frac{du^2}{2}$$

$$dz + \frac{dp}{\rho g} + \frac{du^2}{2g} = 0$$

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = H = \text{const}$$

# УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

$$z_I + p_I / \rho g + u_I^2 / 2g = z_{II} + p_{II} / \rho g + u_{II}^2 / 2g = H = \text{const}$$



- Z** Геометрический напор
- $\frac{p}{\rho g}$**  Пьезометрический (статический) напор
- $\frac{u^2}{2g}$**  Скоростной (динамический) напор

# УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

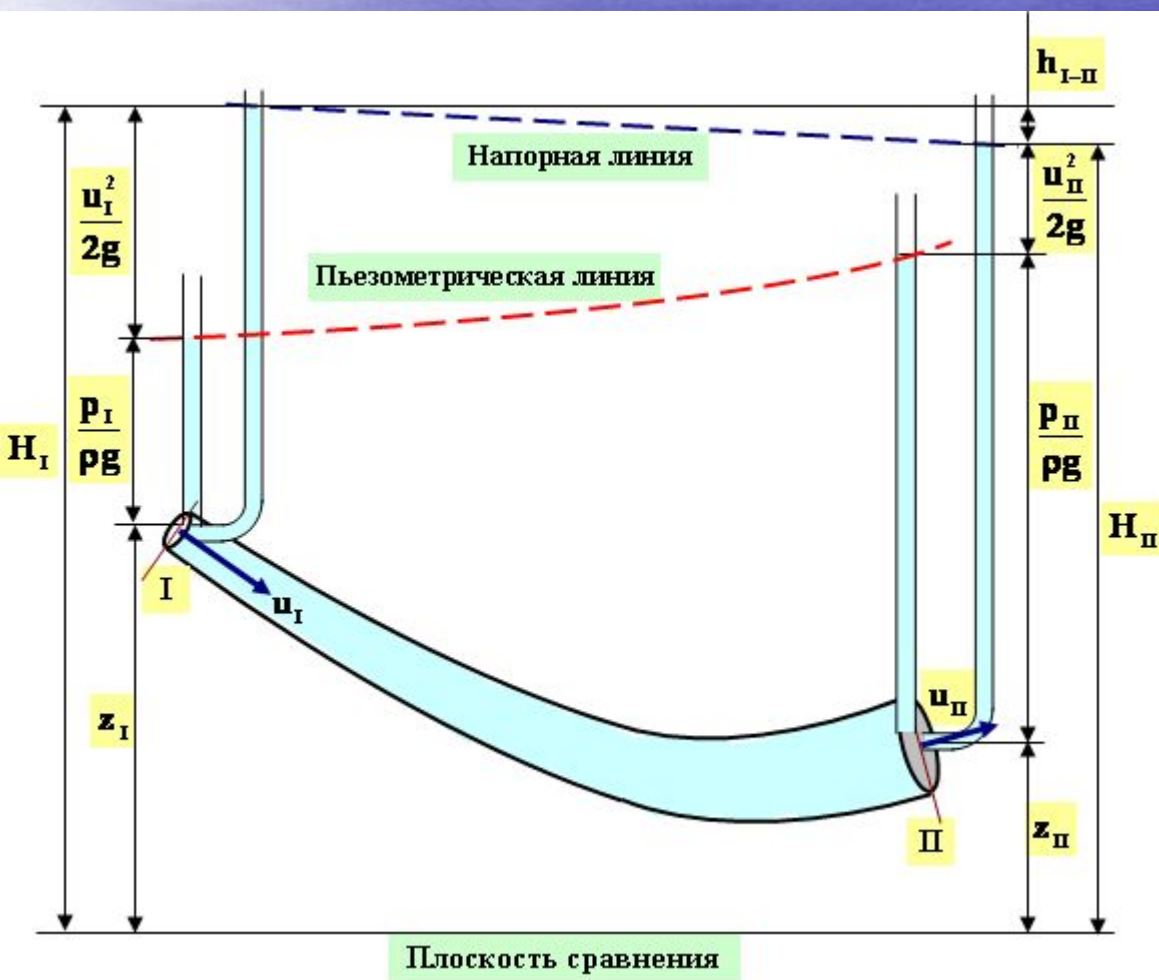
$$z_I + p_I / \rho g + u_I^2 / 2g = z_{II} + p_{II} / \rho g + u_{II}^2 / 2g + h_{wI-II}$$

$$H_{II} = H_I - h_{wI-II}$$

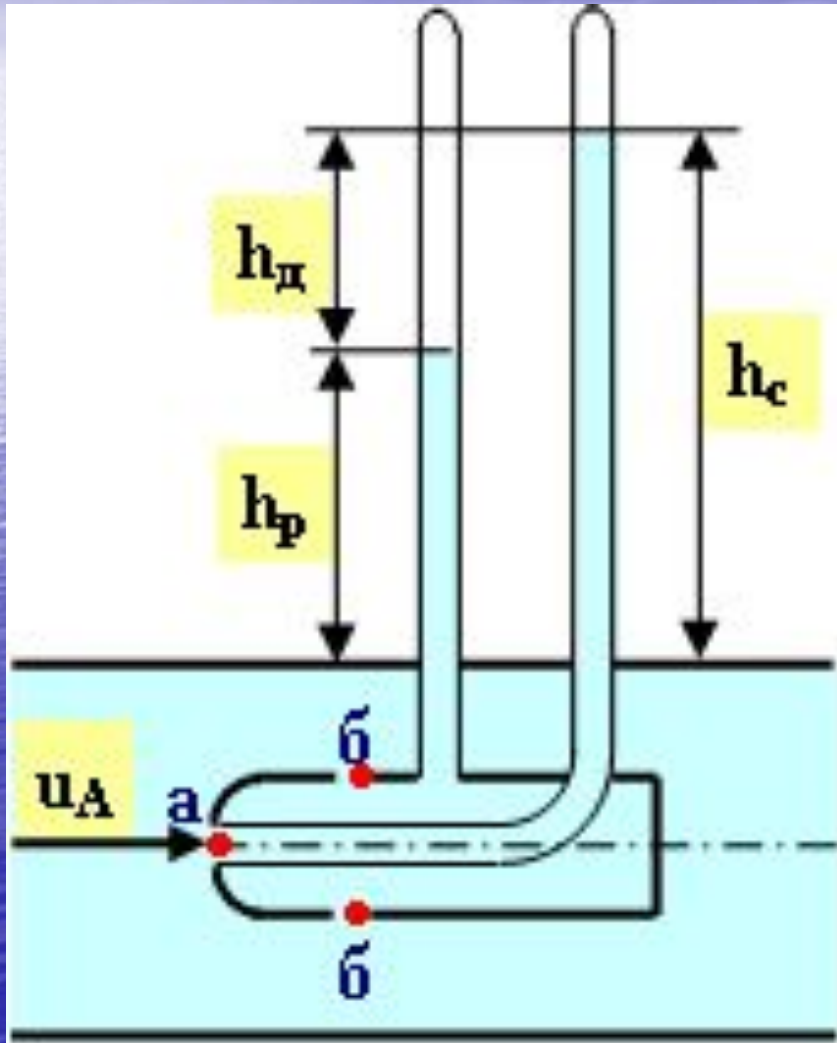
**Z** Потенциальная энергия положения

$\frac{p}{\rho g}$  Потенциальная энергия давления

$\frac{u^2}{2g}$  Кинетическая энергия



# ТРУБКА ПИТО-ПРАНДТЛЯ



$$u_A = c = \sqrt{2gh_D}$$

$$u_A^2 = 2gh_D$$

$$h_D = \frac{u_A^2}{2g}$$

# УСЛОВИЯ ПРИМЕНЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

- Уравнение Бернулли, а также уравнение неразрывности, применяют только для установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости.
- Уравнение Бернулли составляют для двух живых сечений, нормальных к направлению скорости. Эти сечения должны располагаться на прямолинейных участках потока.
- Одно из расчетных сечений, это сечение, где известны геометрический напор, давление, скорость (чаще всего это свободная поверхность жидкости в резервуаре), второе – сечение, где требуется определить эти значения (сечение на выходе из трубопровода).
- Нумеровать расчетные сечения следует так, чтобы жидкость двигалась от первого ко второму, в противном случае должен быть изменен на обратный знак величины  $h_w$ .

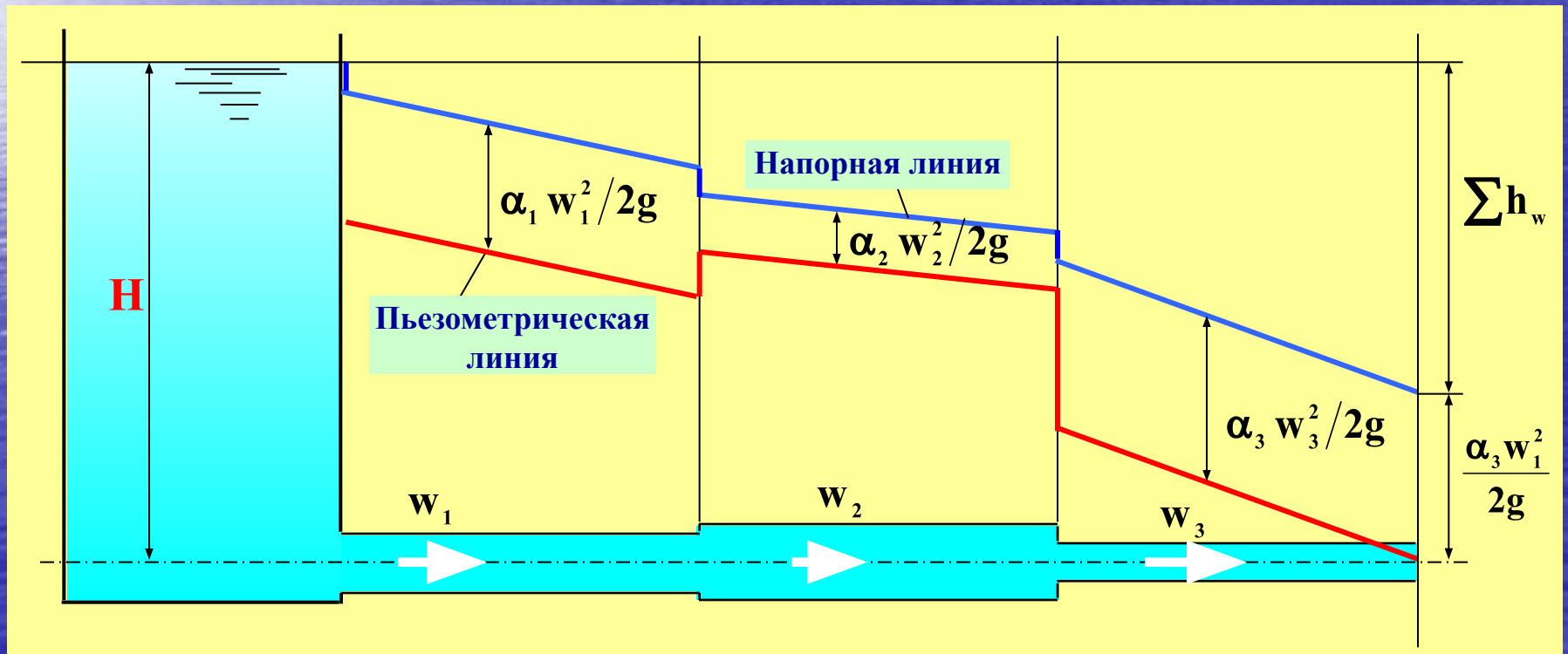
# УСЛОВИЯ ПРИМЕНЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

- Горизонтальную плоскость сравнения желательно проводить через центр тяжести выходного (второго) сечения, тогда  $z_2 = 0$ , а  $z_1$  – будет величиной положительной.
- Последний член уравнения должен учитывать все потери напора между расчетными сечениями как местные, так и потери на трение (по длине).
- Если в уравнении Бернулли имеется ряд неизвестных скоростей, то их можно определить из уравнения неразрывности, выразив все неизвестные скорости через одну, которая уже рассчитывается по уравнению Бернулли.



# УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ПОТОКА РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

$$H = \frac{w_3^2}{2g} + \sum h_{w_{I-II}}$$



# УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ПОТОКА РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

$$H = \frac{w_3^2}{2g} + (\zeta_{\text{BX}} + \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1}) \cdot \frac{w_1^2}{2g} + (\zeta_{\text{BP}} + \lambda_2 \cdot \frac{l_2}{d_2}) \cdot \frac{w_2^2}{2g} + (\zeta_{\text{BC}} + \lambda_3 \cdot \frac{l_3}{d_3}) \cdot \frac{w_3^2}{2g}$$

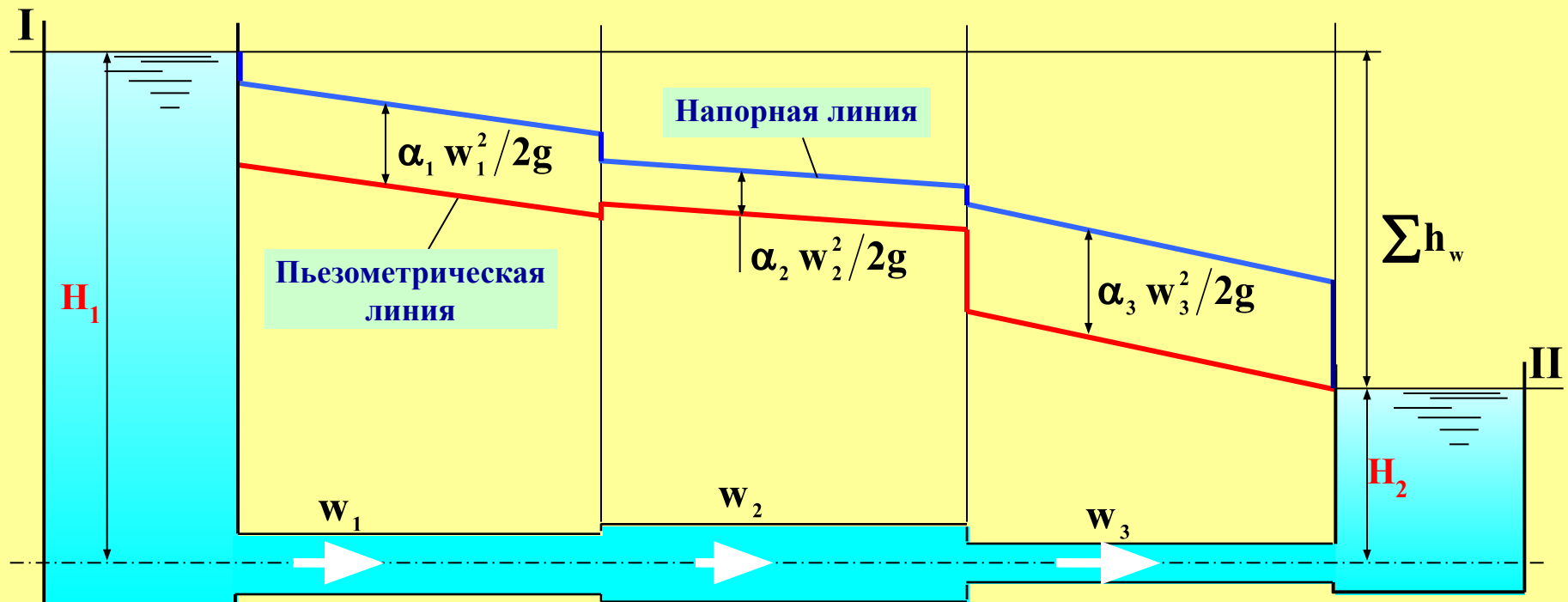
$$w_1 \cdot (\pi d_1^2 / 4) = w_2 \cdot (\pi d_2^2 / 4) = w_3 \cdot (\pi d_3^2 / 4) = V_c$$

$$H = \frac{w_3^2}{2g} + [\zeta_{\text{BX}} \cdot \frac{d_3^4}{d_1^4} + \lambda_1 \cdot \frac{l_1 d_3^4}{d_1^5}] \cdot \frac{w_3^2}{2g} + [\zeta_{\text{BP}} \cdot \frac{d_3^4}{d_2^4} + \lambda_2 \cdot \frac{l_2 d_3^4}{d_2^5}] \cdot \frac{w_3^2}{2g} + (\zeta_{\text{BC}} + \lambda_3 \cdot \frac{l_3}{d_3}) \cdot \frac{w_3^2}{2g}$$

$$w_3 = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \zeta_{\text{BX}} \frac{d_3^4}{d_1^4} + \lambda_1 \frac{l_1 d_3^4}{d_1^5} + \zeta_{\text{BP}} \frac{d_3^4}{d_2^4} + \lambda_2 \frac{l_2 d_3^4}{d_2^5} + \zeta_{\text{BC}} + \lambda_3 \frac{l_3}{d_3}}}$$

# УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ПОТОКА РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

$$H_1 - H_2 = \sum h_{w_{I-II}}$$



# УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ПОТОКА РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

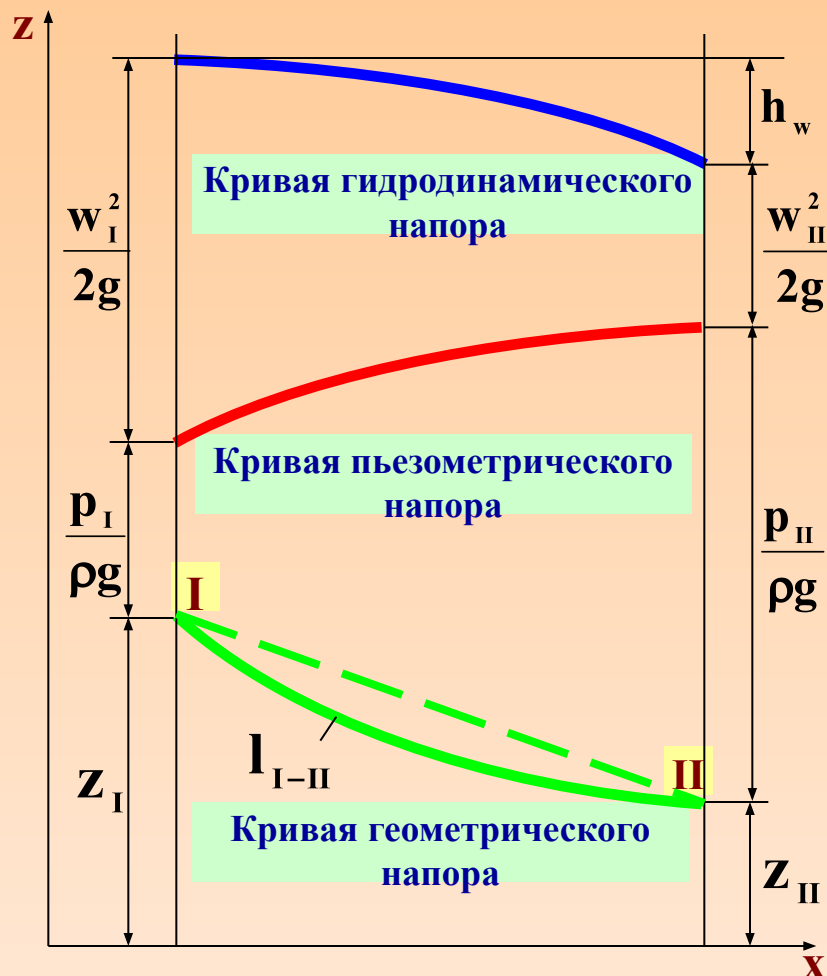
$$H_1 - H_2 = H_0 = (\zeta_{\text{вх}} + \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1}) \cdot \frac{w_1^2}{2g} + (\zeta_{\text{вп}} + \lambda_2 \cdot \frac{l_2}{d_2}) \cdot \frac{w_2^2}{2g} + (\zeta_{\text{вс}} + \lambda_3 \cdot \frac{l_3}{d_3}) \cdot \frac{w_3^2}{2g} + \zeta_{\text{вых}} \cdot \frac{w_3^2}{2g}$$

$$w_1 \cdot (\pi d_1^2 / 4) = w_2 \cdot (\pi d_2^2 / 4) = w_3 \cdot (\pi d_3^2 / 4) = V_c$$

$$H_0 = [\zeta_{\text{вх}} \frac{d_3^4}{d_1^4} + \lambda_1 \frac{l_1 d_3^4}{d_1^5}] \cdot \frac{w_3^2}{2g} + [\zeta_{\text{вп}} \frac{d_3^4}{d_2^4} + \lambda_2 \frac{l_2 d_3^4}{d_2^5}] \cdot \frac{w_3^2}{2g} + (\zeta_{\text{вс}} + \lambda_3 \cdot \frac{l_3}{d_3}) \cdot \frac{w_3^2}{2g} + \zeta_{\text{вых}} \frac{w_3^2}{2g}$$

$$w_3 = \sqrt{\frac{2gH_0}{\zeta_{\text{вх}} \frac{d_3^4}{d_1^4} + \lambda_1 \frac{l_1 d_3^4}{d_1^5} + \zeta_{\text{вп}} \frac{d_3^4}{d_2^4} + \lambda_2 \frac{l_2 d_3^4}{d_2^5} + \zeta_{\text{вс}} + \lambda_3 \frac{l_3}{d_3} + \zeta_{\text{вых}}}}$$

# УКЛОНЫ ПОТОКА



Гидравлический уклон

$$I_r = \frac{h_w}{l_{I-II}} = \frac{(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 w_1^2}{2g}) - (z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 w_2^2}{2g})}{l_{I-II}}$$

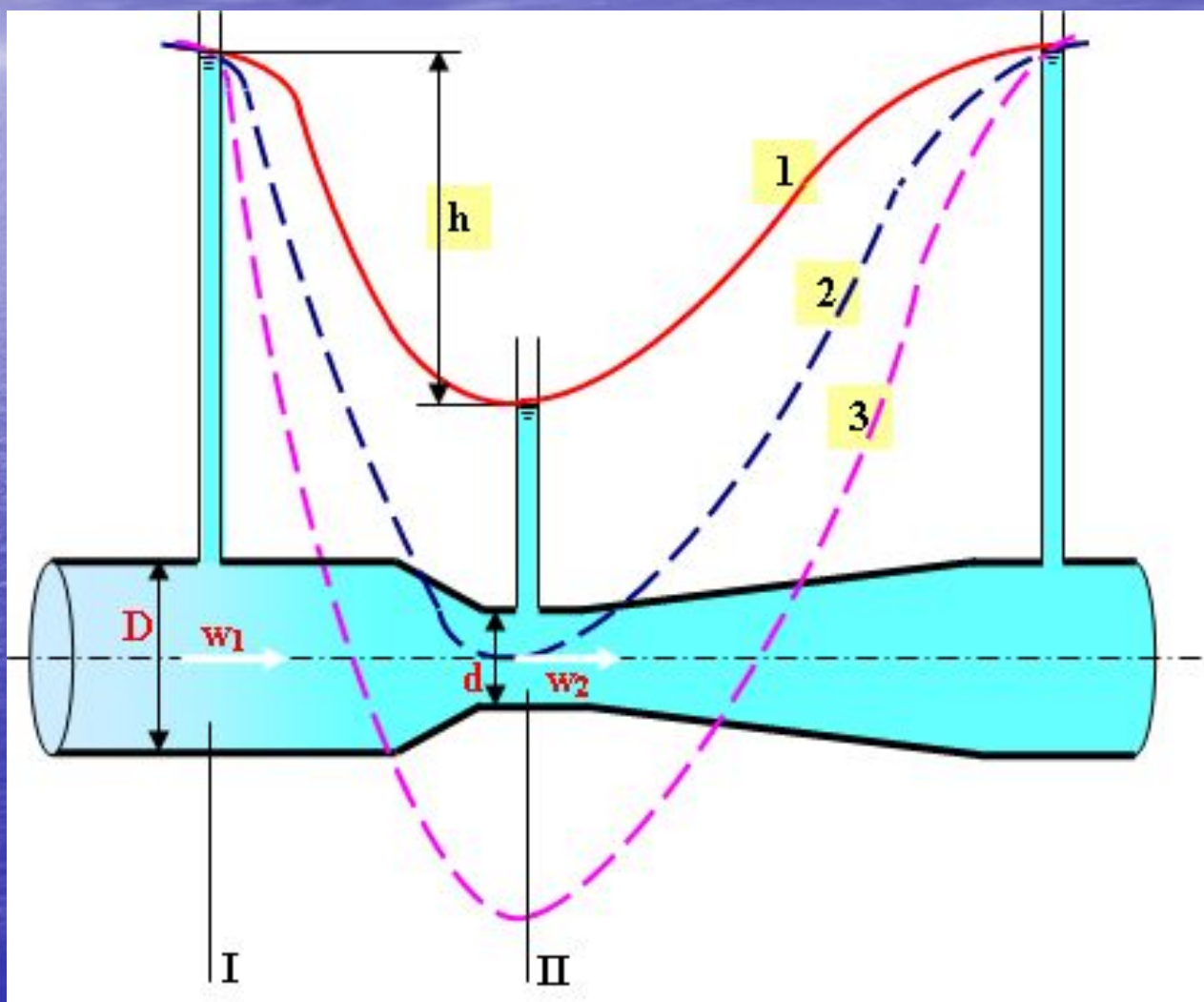
Пьезометрический уклон

$$I_p = \frac{(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}) - (z_2 + \frac{p_2}{\rho g})}{l_{I-II}}$$

Геометрический уклон

$$i = \frac{z_1 - z_2}{l_{I-II}}$$

# РАСХОДОМЕР ВЕНТУРИ



# РАСХОДОМЕР ВЕНТУРИ

## Определение расхода

$$p_1 / \rho g + w_1^2 / 2g = p_2 / \rho g + w_2^2 / 2g$$

$$p_1 / \rho g - p_2 / \rho g = h = w_2^2 / 2g - w_1^2 / 2g$$

$$h = (w_2^2 - w_1^2) / 2g = (w_1^2 / 2g) ((w_2^2 / w_1^2) - 1)$$

$$h = (w_1^2 / 2g) ((D/d)^4 - 1)$$

$$w_1 = \sqrt{2gh / ((D/d)^4 - 1)}$$

$$V_{c_T} = (\pi D^2 / 4) \cdot \sqrt{2gh / ((D/d)^4 - 1)} = c \sqrt{h}$$

$$V_c = \mu c \sqrt{h}$$

$$\mu = 0,95 \div 0,98$$

# РАСХОДОМЕР ВЕНТУРИ

$$V_c = \text{const} \quad H = \text{const}$$

Линия 1

$$h_{\text{и}} = H - \frac{w_2^2}{2g} = H - \frac{V_c^2}{F_2^2 \cdot 2g}$$

Сечение II – избыточное давление

Линия 2

$$H = \frac{V_c^2}{F_2^2 \cdot 2g} \quad \text{при} \quad F_2 = \sqrt{\frac{V_c^2}{2gH}}$$

Сечение II – атмосферное давление

Линия 3

$$F_2 < \sqrt{\frac{V_c^2}{2gH}}$$

Сечение II – вакуум