

# ТЕМА 5

## Модели обслуживания вычислительных задач

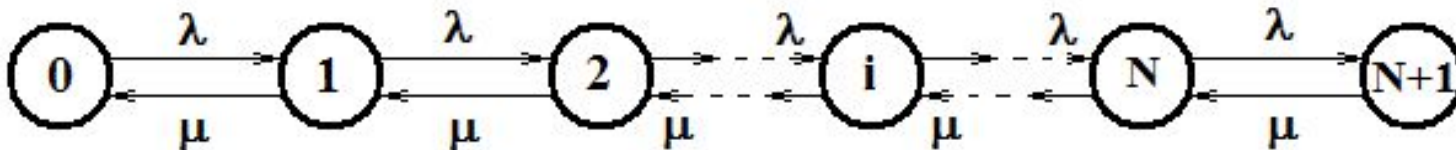
### Раздел

*Одноканальные системы обслуживания с очередью*

# Одноканальная система обслуживания с очередью

## Теоретические основы.

Граф состояний одноканальной системы, у которой число мест в очереди  $N$ .



Интенсивность потока заявок -  $\lambda$ . Интенсивность обслуживания -  $\mu$ .

Общее число состояний -  $N+2$ .

Система дифференциальных уравнений, описывающая поведение СМО:

$$\begin{cases} dP_0(t)/dt = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t); \\ dP_k(t)/dt = -(\lambda + \mu)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + \mu P_{k+1}(t); & k = 1, 2, \dots, N; \\ dP_{N+1}(t)/dt = -\mu P_{N+1}(t) + \lambda P_N(t); \end{cases}$$

где  $P_i(t)$  - вероятность того, что в момент  $t$  СМО находится в состоянии  $i$ .

Для решения системы необходимо одно из уравнений заменить условием нормировки вероятностей

$$\sum_{k=0}^{N+1} P_k = 1$$

## Одноканальная система обслуживания с очередью

Решение системы дифференциальных уравнений позволяет при заданных начальных условиях и известных интенсивностях  $\lambda$  и  $\mu$  определить изменение  $P_i(t)$  вероятностей состояний системы во времени.

В стационарном состоянии вероятности  $P_i(t)$  не меняются со временем, поэтому можно записать систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0; \\ -(\lambda + \mu)P_k + \lambda P_{k-1} + \mu P_{k+1} = 0; & k = 1, 2, \dots, N; \\ -\mu P_{N+1} + \lambda P_N = 0 \end{cases}$$

Из полученной системы алгебраических уравнений нетрудно найти искомые вероятности состояний системы массового обслуживания.

Найденные значения вероятности состояний системы  $P_i$  позволяют определить показатели эффективности системы.

## Одноканальная система обслуживания с очередью

1. Вероятность простоя системы:

$$P_{\text{пр}} = P_0$$

2. Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{\text{отк}} = P_{N+1}$$

3. Вероятность обслуживания

$$P_{\text{об}} = 1 - P_{N+1} \quad \text{или}$$

$$P_{\text{об}} = (P_0 + P_1 + \dots + P_N) = \sum_{k=0}^N P_k$$

4. Пропускная способность системы:

$$C = P_{\text{об}} \lambda$$

5. Среднее количество заявок, проходящих обслуживание в канале:

$$K_s = (P_1 + P_2 + \dots) = \sum_{k=1}^{N+1} P_k$$

6. Среднее количество заявок, находящихся в системе обслуживания:

$$K = (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots) = \sum_{k=1}^{N+1} kP_k$$

7. Средняя длина очереди

$$L = K - K_s$$

8. Средняя продолжительность пребывания заявки в системе:

$$t_c = K/\mu$$

## Одноканальная система обслуживания с очередью

### Задача П5-1.

Определить, как изменятся среднее время пребывания заявки в системе и средняя длина очереди для одноканальной СМО с очередью в установившемся режиме при изменении интенсивности обслуживания с  $0,2 \text{ с}^{-1}$  до  $0,3 \text{ с}^{-1}$ . Интенсивность потока заявок равна  $0,25 \text{ с}^{-1}$ , число мест в очереди 3.

### Решение.

Рассматриваемая система может иметь пять возможных состояний:

«0» - система свободна;

«1» - в системе обслуживается одна заявка, но очередь пуста;

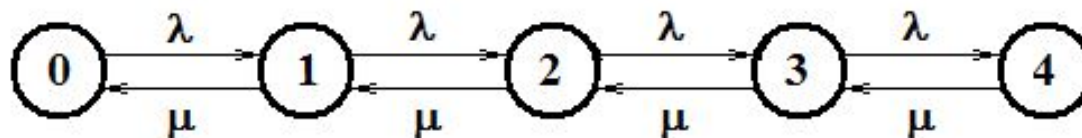
«2» - в системе обслуживается одна заявка и одна находится в очереди;

«3» - в очереди две заявки;

«4» - в очереди три заявки, система полностью занята.

Соответственно, вероятности нахождения системы в этих состояниях -  $P_0, P_1, P_2,$  и т.д.

Граф системы будет иметь вид:



## Одноканальная система обслуживания с очередью

### Задача П5-1.

Из условий задачи интенсивность потока заявок  $\lambda = 0,25 \text{ с}^{-1}$   
Интенсивность обслуживания в первом случае  $\mu_1 = 0,2 \text{ с}^{-1}$ .

Запишем систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} -0,25p_0 + 0,2p_1 = 0 \\ 0,25p_0 - (0,25 + 0,2)p_1 + 0,2p_2 = 0 \\ 0,25p_1 - (0,25 + 0,2)p_2 + 0,2p_3 = 0 \\ 0,25p_2 - (0,25 + 0,2)p_3 + 0,2p_4 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases}$$

Решая данную систему, получим:

$$p_0 = 0,122; p_1 = 0,152; p_2 = 0,19; p_3 = 0,238; p_4 = 0,297.$$

Среднее число заявок, находящихся в СМО:

$$k = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 = 0,152 + 2 \cdot 0,19 + 3 \cdot 0,238 + 4 \cdot 0,297 = 2,44$$

Среднее число заявок, проходящих обслуживание (в канале):

$$k_s = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,152 + 0,19 + 0,238 + 0,297 = 0,88.$$

Средняя длина очереди:

$$k_{cp} = k - k_s = \mathbf{1,56}.$$

Среднее время пребывания в СМО:  $t_c = k/\mu_1 = \mathbf{12,2 \text{ сек.}}$

## Одноканальная система обслуживания с очередью

### Задача П5-1.

Интенсивность обслуживания во втором случае  $\mu_2 = 0,3 \text{ с}^{-1}$ .

Вторая система линейных уравнений.

$$\begin{cases} -0,25p_0 + 0,3p_1 = 0 \\ 0,25p_0 - (0,25 + 0,3)p_1 + 0,3p_2 = 0 \\ 0,25p_1 - (0,25 + 0,3)p_2 + 0,3p_3 = 0 \\ 0,25p_2 - (0,25 + 0,3)p_3 + 0,3p_4 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:

$$p_0 = 0,279; p_1 = 0,232; p_2 = 0,194; p_3 = 0,161; p_4 = 0,134.$$

Среднее число заявок, находящихся в СМО:

$$k = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 = 0,232 + 2 \cdot 0,194 + 3 \cdot 0,161 + 4 \cdot 0,134 = 1,64$$

Среднее число заявок, проходящих обслуживание (в канале):

$$k_s = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,232 + 0,194 + 0,161 + 0,134 = 0,72.$$

Средняя длина очереди:

$$k_{cp} = k - k_s = 0,92.$$

Среднее время пребывания в СМО:  $t_c = k/\mu_2 = 5,49 \text{ сек.}$

## Одноканальная система обслуживания с очередью

### Задача П5-1.

Ответ: При увеличении интенсивности обслуживания заявок в канале с  $0,2 \text{ с}^{-1}$  до  $0,3 \text{ с}^{-1}$  (на 50%), средняя длина очереди сократилась с 1,56 до 0,92 заявок, а среднее время пребывания заявки в системе уменьшилось с 12,2 сек до 5,49 сек (более, чем в два раза).



## Одноканальная система обслуживания с очередью

### Задача П5-2.

Определить, как изменится вероятность отказа для одноканальной СМО без очереди в установившемся режиме при изменении интенсивности обслуживания с  $0,6 \text{ с}^{-1}$  до  $0,9 \text{ с}^{-1}$ . Интенсивность потока заявок равна  $0,5 \text{ с}^{-1}$ .

### Решение.

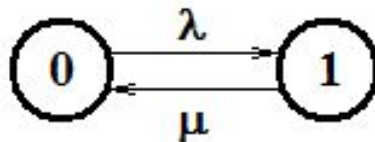
Рассматриваемая система может иметь два возможных состояния:

«0» - система свободна;

«1» - в системе обслуживается заявка, система занята.

Вероятности нахождения системы в этих состояниях -  $p_0, p_1$ .

Граф системы имеет вид:



## Одноканальная система обслуживания с очередью

### Задача П5-2.

Интенсивность обслуживания в первом случае  $\mu_1 = 0,6 \text{ с}^{-1}$ .

Система линейных уравнений. 
$$\begin{cases} -0,5p_0 + 0,6p_1 = 0 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:  $p_0 = 0,55; p_1 = 0,45$ .

Вероятность отказа в первом случае равна  $p_{\text{отк}} = p_1 = 0,45$

Интенсивность обслуживания во втором случае  $\mu_2 = 0,9 \text{ с}^{-1}$ .

Система линейных уравнений. 
$$\begin{cases} -0,5p_0 + 0,9p_1 = 0 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:  $p_0 = 0,64; p_1 = 0,36$ .

Вероятность отказа во втором случае равна  $p_{\text{отк}} = p_1 = 0,36$

Ответ: При увеличении интенсивности обслуживания заявок в канале с  $0,6 \text{ с}^{-1}$  до  $0,9 \text{ с}^{-1}$  (на 50%), вероятность отказа уменьшилась с 0,45 до 0,36 (на 20%).

## Одноканальная система обслуживания с очередью

### Задача П5-3.

Определить, как изменится вероятность отказа для одноканальной СМО без очереди в установившемся режиме при изменении интенсивности потока заявок с  $0,5 \text{ с}^{-1}$  до  $1,0 \text{ с}^{-1}$ . Интенсивность обслуживания равна  $0,9 \text{ с}^{-1}$ .

#### Решение.

При решении предыдущей задачи 5-2 были рассмотрены возможные состояния системы и построен ее граф. Также найдено, что вероятность отказа для  $\mu = 0,9 \text{ с}^{-1}$  и  $\lambda_1 = 0,5 \text{ с}^{-1}$  составила  $p_{\text{отк}} = 0,36$

Рассмотрим работу системы при  $\lambda_2 = 1,0 \text{ с}^{-1}$

Система линейных уравнений.

$$\begin{cases} -1,0p_0 + 0,9p_1 = 0 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:  $p_0 = 0,47; p_1 = 0,53.$

Вероятность отказа во втором случае равна  $p_{\text{отк}} = p_1 = 0,53$

Ответ: При увеличении интенсивности потока заявок с  $0,5 \text{ с}^{-1}$  до  $1,0 \text{ с}^{-1}$  (на 50%), вероятность отказа увеличилась с 0,36 до 0,53 (на 30%).

## Одноканальная система обслуживания с очередью

### Задача П5-4.

Определить, как изменится вероятность отказа для одноканальной СМО в установившемся режиме при увеличении числа мест в очереди с 2 до 3. Интенсивность потока заявок равна  $0,25 \text{ с}^{-1}$ , интенсивность обслуживания  $0,3 \text{ с}^{-1}$ .

### Решение.

Система с двумя местами в очереди может иметь четыре возможных состояния:

«0» - система свободна;

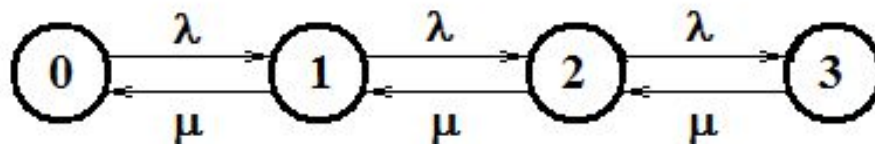
«1» - в системе обслуживается одна заявка, но очередь пуста;

«2» - в системе обслуживается одна заявка и одна находится в очереди;

«3» - в очереди две заявки, система полностью занята

Соответственно, вероятности нахождения системы в этих состояниях -  $p_0, p_1, p_2,$  и т.д.

Граф системы будет иметь вид:



## Одноканальная система обслуживания с очередью

### Задача П5-4.

При  $\lambda_1 = 0,25 \text{ с}^{-1}$  и  $\mu = 0,3 \text{ с}^{-1}$  имеем следующую систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} -0,25p_0 + 0,3p_1 = 0 \\ 0,25p_0 - (0,25 + 0,3)p_1 + 0,3p_2 = 0 \\ 0,25p_1 - (0,25 + 0,3)p_2 + 0,3p_3 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Решая данную систему, получим:

$$p_0 = 0,322; p_1 = 0,268; p_2 = 0,224; p_3 = 0,186.$$

Вероятность отказа в при двух местах в очереди равна  $p_{\text{отк}} = p_3 = 0,186$

Значения вероятностей состояний для системы с тремя местами в очереди было получено ранее при решении задачи 5-1.

Вероятность отказа при трех местах в очереди равна  $p_{\text{отк}} = p_4 = 0,134$

Ответ: При увеличении числа мест в очереди с 2 до 3, вероятность отказа уменьшилась с 0,186 до 0,134 (на 27%).

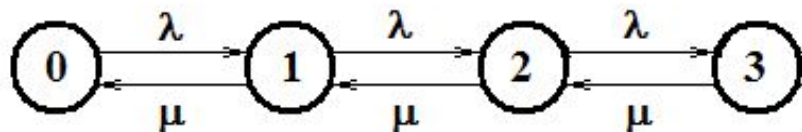
## Одноканальная система обслуживания с очередью

### Задача П5-5.

Рассмотреть изменение во времени вероятностей состояний одноканальной СМО с очередью из 2 мест. Интенсивность потока заявок равна  $0,5 \text{ с}^{-1}$ , интенсивность обслуживания  $0,75 \text{ с}^{-1}$ . В исходном состоянии система свободна.

### Решение.

Граф рассматриваемой системы будет иметь вид:



Составим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} dp_0(t)/dt = -0,5p_0 + 0,75p_1 \\ dp_1(t)/dt = 0,5p_0 - (0,5 + 0,75)p_1 + 0,75p_2 \\ dp_2(t)/dt = 0,5p_1 - (0,5 + 0,75)p_2 + 0,75p_3 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Поскольку в исходном состоянии система свободна, для решения системы следует использовать следующие начальные условия:

$$p_0(0) = 1; p_1(0) = 0; p_2(0) = 0; p_3(0) = 0.$$

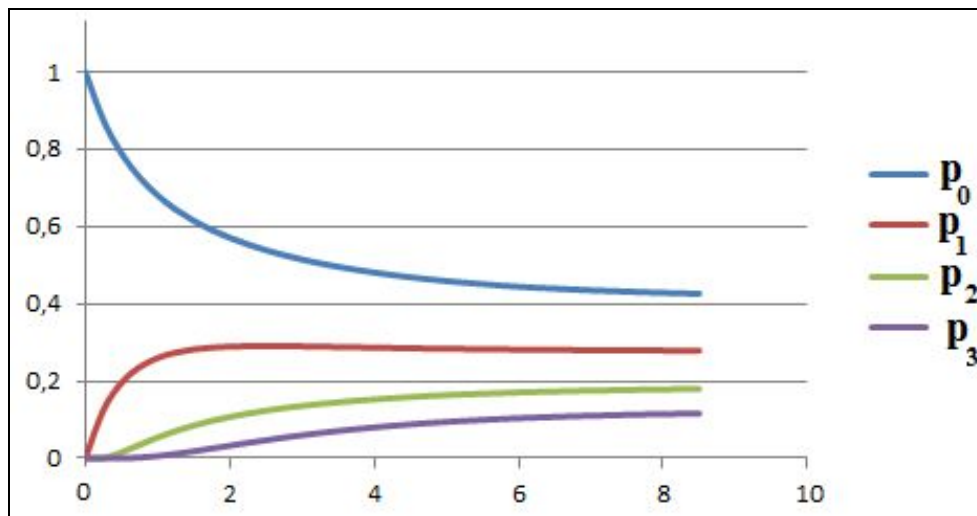
## Одноканальная система обслуживания с очередью

### Задача П5-5.

Результаты решения сведены в таблицу и приведены на рисунке

Таблица к задаче П5-5  
(первые 7 точек)

Время	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
$P_0$	1	0,789	0,680	0,614	0,570	0,538	0,514	0,495
$P_1$	0	0,195	0,259	0,281	0,289	0,290	0,289	0,288
$P_2$	0	0,015	0,054	0,084	0,107	0,123	0,135	0,145
$P_3$	0	0,000	0,010	0,020	0,032	0,045	0,06	0,074



## Одноканальная система обслуживания с очередью

### Задача П5-5.

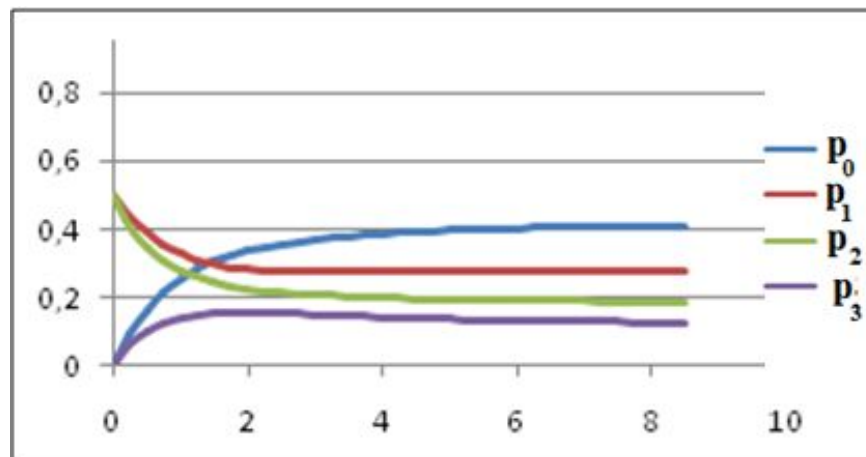
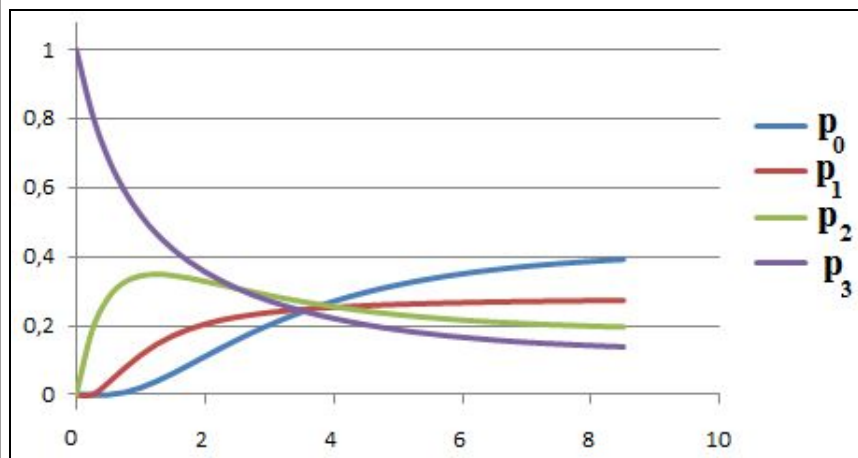
Нетрудно заметить, что по мере увеличения времени значения вероятностей стремятся к постоянным значениям

$$p_0 = 0,415; p_1 = 0,277; p_2 = 0,185; p_3 = 0,123.$$

Следует отметить, что указанные предельные значения достигаются и при других начальных данных, например:

$$\text{При } p_0(0) = 0; p_1(0) = 0; \\ p_2(0) = 0; p_3(0) = 1.$$

$$\text{При } p_0(0) = 0; p_1(0) = 0,5; \\ p_2(0) = 0,5; p_3(0) = 0.$$





## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Д5-1.** Определить вероятности пребывания одноканальной системы обслуживания с очередью в каждом из возможных состояний. Вычислить среднюю длину очереди и среднее время пребывания заявки в системе. Исходные данные:

Число мест в очереди – 4

Средняя периодичность поступления заявок (в табл.)

Среднее время обслуживания одной заявки (в табл.)

Вар.	$T_{\text{ПОСТ}}$	$T_{\text{ОБСЛ}}$	Вар.	$T_{\text{ПОСТ}}$	$T_{\text{ОБСЛ}}$	Вар.	$T_{\text{ПОСТ}}$	$T_{\text{ОБСЛ}}$
<b>1</b>	5	8	<b>11</b>	5	2	<b>21</b>	4	3
<b>2</b>	5	3	<b>12</b>	4	4	<b>22</b>	3	5
<b>3</b>	4	6	<b>13</b>	3	6	<b>23</b>	3	1,5
<b>4</b>	4	2	<b>14</b>	3	2	<b>24</b>	2	3
<b>5</b>	3	4	<b>15</b>	2	4	<b>25</b>	1,5	5
<b>6</b>	2	5	<b>16</b>	2	1,5	<b>26</b>	1,5	2
<b>7</b>	2	2,5	<b>17</b>	1,5	3	<b>27</b>	1	1,5
<b>8</b>	1,5	4	<b>18</b>	1	2,5	<b>28</b>	1,5	4,5
<b>9</b>	1,5	1	<b>19</b>	5	4	<b>29</b>	1,5	2,5
<b>10</b>	5	6	<b>20</b>	4	8	<b>30</b>	1,5	1,5

# Модели обслуживания вычислительных задач

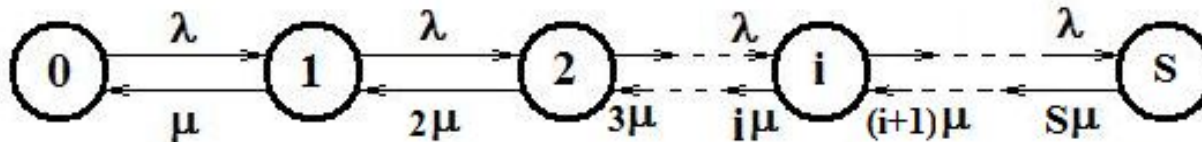
## Раздел

*Многоканальные системы обслуживания без очереди*

# Многоканальная система обслуживания без очереди

## Теоретические основы.

Граф состояний системы без очереди, которая имеет  $S$  одинаковых каналов:



Интенсивность потока заявок -  $\lambda$ . Интенсивностью обслуживания -  $\mu$ .

Общее число состояний -  $S+1$

Система уравнений, описывающая стационарное состояние СМО:

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0; \\ -(\lambda + k\mu)P_k + \lambda P_{k-1} + (k+1)\mu P_{k+1} = 0; & k = 1, 2, \dots, S-1; \\ -S\mu P_S + \lambda P_{S-1} = 0 \end{cases}$$

Условие нормировки вероятностей

$$\sum_{k=0}^S P_k = 1$$

Решение системы позволяет найти вероятности состояний системы массового обслуживания.

## Многоканальная система обслуживания без очереди

Показатели эффективности системы.

1. Вероятность простоя системы:

$$P_{\text{ПР}} = P_0$$

2. Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{\text{ОТК}} = P_S$$

3. Вероятность обслуживания

$$P_{\text{ОБ}} = 1 - P_S \quad \text{или}$$

$$P_{\text{ОБ}} = (P_0 + P_1 + \dots + P_{S-1}) = \sum_{k=0}^{S-1} P_k$$

4. Пропускная способность системы:

$$C = P_{\text{ОБ}} \lambda$$

5. Среднее число занятых каналов

$$K = (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots) = \sum_{k=1}^S kP_k$$

6. Средняя продолжительность пребывания заявки в системе:

$$t_C = K / (S\mu)$$

## Многоканальная система обслуживания без очереди

### Задача П5-6.

Определить, как изменятся пропускная способность, занятость каналов и среднее время пребывания заявки для трехканальной СМО без очереди в установившемся режиме при изменении интенсивности обслуживания с  $0,2 \text{ с}^{-1}$  до  $0,3 \text{ с}^{-1}$ . Интенсивность потока заявок равна  $0,5 \text{ с}^{-1}$ .

### Решение.

Рассматриваемая система может иметь четыре возможных состояния:

«0» - система свободна;

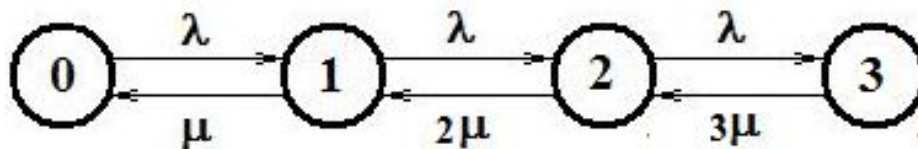
«1» - в системе обслуживается одна заявка (занят один канал);

«2» - занято два канала;

«3» - заняты все три канала.

Соответственно, вероятности нахождения системы в этих состояниях -  $p_0, p_1, p_2,$  и т.д.

Граф системы будет иметь вид:



## Многоканальная система обслуживания без очереди

### Задача П5-6.

Из условий задачи  $\lambda = 0,5 \text{ с}^{-1}$ ;  $\mu_1 = 0,2 \text{ с}^{-1}$ .

Для определения вероятностей состояний СМО следует записать систему из 4 уравнений.

$$\begin{cases} -0,5p_0 + 0,2p_1 = 0 \\ 0,5p_0 - (0,5 + 0,2)p_1 + 2 \cdot 0,2p_2 = 0 \\ 0,5p_1 - (0,5 + 2 \cdot 0,2)p_2 + 3 \cdot 0,2p_3 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Решая данную систему, получим:

$$p_0 = 0,108; p_1 = 0,271; p_2 = 0,339; p_3 = 0,282.$$

Пропускная способность СМО при производительности каналов  $\mu_1 = 0,2 \text{ с}^{-1}$ :

$$C = (1 - p_3)\lambda = (1 - 0,282) \cdot 0,5 = \mathbf{0,36 \text{ с}^{-1}}.$$

Среднее число занятых каналов:

$$K = p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 0,271 + 2 \cdot 0,339 + 3 \cdot 0,282 = \mathbf{1,79}$$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$t_c = K / (S\mu) = 1,79 / (3 \cdot 0,2) = \mathbf{2,99 \text{ с}}$$

## Многоканальная система обслуживания без очереди

### Задача П5-6.

Рассчитаем параметры системы при увеличенной производительности каналов  $\mu_2 = 0,3 \text{ с}^{-1}$ .

Система уравнений.

$$\begin{cases} -0,5p_0 + 0,3p_1 = 0 \\ 0,5p_0 - (0,5 + 0,3)p_1 + 2 \cdot 0,3p_2 = 0 \\ 0,5p_1 - (0,5 + 2 \cdot 0,3)p_2 + 3 \cdot 0,3p_3 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:

$$p_0 = 0,207; p_1 = 0,345; p_2 = 0,288; p_3 = 0,16.$$

Пропускная способность СМО при производительности каналов  $\mu_2 = 0,3 \text{ с}^{-1}$ :

$$C = (1 - p_3)\lambda = (1 - 0,16) \cdot 0,5 = \mathbf{0,42 \text{ с}^{-1}}$$

Среднее число занятых каналов:

$$K = p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 0,345 + 2 \cdot 0,288 + 3 \cdot 0,16 = \mathbf{1,4}$$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$t_C = K / (S\mu) = 1,4 / (3 \cdot 0,3) = \mathbf{1,55 \text{ с}}$$

## Многоканальная система обслуживания без очереди

### Задача П5-6.

Ответ. При увеличении интенсивности обслуживания заявок в канале с  $0,2 \text{ с}^{-1}$  до  $0,3 \text{ с}^{-1}$  (на 50%), пропускная способность системы выросла незначительно с 0,36 до 0,42 заявок в секунду (на 16%), а среднее число занятых каналов уменьшилось с 1,79 до 1,4 (на 20%). В то же время, среднее время пребывания заявки в системе уменьшилось почти вдвое.



## Многоканальная система обслуживания без очереди

### Задача П5-7.

Определить, как изменятся основные параметры СМО без очереди в установившемся режиме при изменении числа каналов от 1 до 3. Интенсивности обслуживания заявками каналами  $0,2 \text{ с}^{-1}$ , интенсивность входящего потока заявок  $0,5 \text{ с}^{-1}$ .

### Решение.

Во всех случаях интенсивность потока заявок  $\lambda = 0,5 \text{ с}^{-1}$ . интенсивность обслуживания  $\mu = 0,2 \text{ с}^{-1}$ .

## Многоканальная система обслуживания без очереди

### Задача П5-7.

#### 1. В системе один канал.

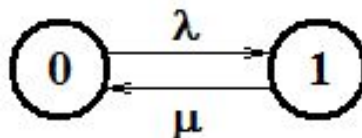
Система может иметь два возможных состояния:

«0» - система свободна;

«1» - в системе обслуживается заявка, система занята.

Вероятности нахождения системы в этих состояниях -  $p_0, p_1$ .

Граф системы имеет вид:



Система линейных уравнений.

$$\begin{cases} -0,5p_0 + 0,2p_1 = 0 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:  $p_0 = 0,29; p_1 = 0,71$ .

Параметры для системы с одним каналом:

Вероятность отказа

$$P_{\text{отк}} = 0,71$$

Вероятность обслуживания

$$P_{\text{об}} = 1 - P_{\text{отк}} = 0,29$$

Пропускная способность системы

$$P_{\text{об}} \lambda = 0,29 \cdot 0,5 = 0,145$$

Среднее число занятых каналов

$$K = p_1 = 0,71$$

Среднее время пребывания заявки в СМО

$$t_c = K / (S\mu) = 0,71 / 0,2 = 3,57 \text{ с}$$

## Многоканальная система обслуживания без очереди

### Задача П5-7.

### 2. В системе два канала.

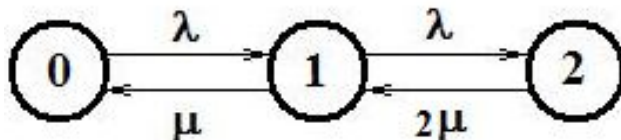
Система может иметь три возможных состояния:

«0» - система свободна;

«1» - в системе обслуживается одна заявка (занят один канал);

«2» - заняты оба канала.

Граф системы имеет вид:



Система линейных уравнений.

$$\begin{cases} -0,5p_0 + 0,2p_1 = 0; \\ 0,5p_0 - (0,5 + 0,2)p_1 + 2 \cdot 0,2p_2 = 0; \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:  $p_0 = 0,15$ ;  $p_1 = 0,38$ ,  $p_2 = 0,47$

Параметры для системы с двумя каналами:

Вероятность отказа

$$P_{\text{отк}} = 0,47$$

Вероятность обслуживания

$$P_{\text{об}} = 1 - P_{\text{отк}} = 0,53$$

Пропускная способность системы

$$P_{\text{об}} \lambda = 0,53 \cdot 0,5 = 0,265$$

Среднее число занятых каналов

$$K = p_1 + 2p_2 = 1,32$$

Среднее время пребывания заявки в СМО

$$t_c = K / (S\mu) = 1,32 / (2 \cdot 0,2) = 3,3 \text{ с}$$

## Многоканальная система обслуживания без очереди

### Задача П5-7.

### 3. В системе три канала.

Данный случай рассмотрен в предыдущей задаче П5-6.

В результате решения системы были получены следующие данные:

$$p_0 = 0,108; p_1 = 0,271; p_2 = 0,339; p_3 = 0,282.$$

Параметры для системы с тремя каналами:

$$\text{Вероятность отказа } P_{\text{отк}} = 0,28$$

$$\text{Вероятность обслуживания } P_{\text{об}} = 1 - P_{\text{отк}} = 0,72$$

$$\text{Пропускная способность системы } P_{\text{об}} \lambda = 0,72 \cdot 0,5 = 0,36$$

$$\text{Среднее число занятых каналов } K = p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 1,72$$

$$\text{Среднее время пребывания заявки в СМО } t_c = K / (S\mu) = 1,79 / (3 \cdot 0,2) = 3,0 \text{ с}$$

Полученные данные можно свести в таблицу.

Число каналов	Вероятность отказа	Вероятность обслуживания	Пропускная способность системы	Среднее число занятых каналов	Среднее время пребывания заявки в СМО
1	0,71	0,29	0,145	0,71	3,57
2	0,47	0,53	0,265	1,32	3,3
3	0,28	0,72	0,36	1,72	3

## Многоканальная система обслуживания без очереди

### Задача П5-8.

Определить, как изменится вероятность отказа четырехканальной СМО без очереди в установившемся режиме при изменении интенсивности потока заявок от  $0,25 \text{ с}^{-1}$  до  $0,75 \text{ с}^{-1}$ . Интенсивности обслуживания каналами  $0,2 \text{ с}^{-1}$

### Решение.

Рассматриваемая система может иметь пять возможных состояний:

«0» - система свободна;

«1» - в системе обслуживается одна заявка (занят один канал);

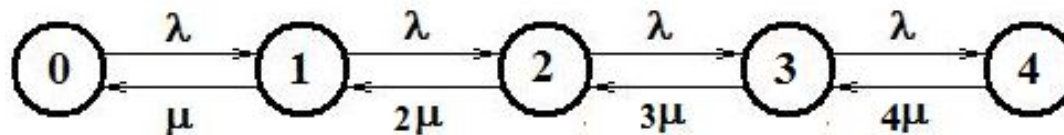
«2» - занято два канала;

«3» - заняты три канала.

«4» - заняты все четыре канала.

Соответственно, вероятности нахождения системы в этих состояниях -  $P_0, P_1, P_2,$  и т.д.

Граф системы будет иметь вид:



## Многоканальная система обслуживания без очереди

### Задача П5-8.

Рассмотрим стационарное состояние системы при  $\lambda_1 = 0,25 \text{ с}^{-1}$ ;  $\mu = 0,2 \text{ с}^{-1}$ .

Для определения вероятностей состояний СМО следует записать систему из 5 уравнений.

$$\begin{cases} -0,25p_0 + 0,2p_1 = 0 \\ 0,25p_0 - (0,25 + 0,2)p_1 + 2 \cdot 0,2p_2 = 0 \\ 0,25p_1 - (0,25 + 2 \cdot 0,2)p_2 + 3 \cdot 0,2p_3 = 0 \\ 0,25p_2 - (0,25 + 3 \cdot 0,2)p_3 + 4 \cdot 0,2p_4 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:

$$p_0 = 0,29; p_1 = 0,36; p_2 = 0,23; p_3 = 0,09; p_4 = 0,03$$

Вероятность отказа  $P_{\text{отк}} = p_4 = \mathbf{0,03}$

## Многоканальная система обслуживания без очереди

### Задача П5-8.

Рассмотрим стационарное состояние системы при  $\lambda_2 = 0,75 \text{ с}^{-1}$ ;  $\mu = 0,2 \text{ с}^{-1}$ ..  
Система из 5 уравнений.

$$\begin{cases} -0,75p_0 + 0,2p_1 = 0 \\ 0,75p_0 - (0,75 + 0,2)p_1 + 2 \cdot 0,2p_2 = 0 \\ 0,75p_1 - (0,75 + 2 \cdot 0,2)p_2 + 3 \cdot 0,2p_3 = 0 \\ 0,75p_2 - (0,75 + 3 \cdot 0,2)p_3 + 4 \cdot 0,2p_4 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:

$$p_0 = 0,03; p_1 = 0,13; p_2 = 0,24; p_3 = 0,31; p_4 = 0,29$$

Вероятность отказа  $P_{\text{отк}} = p_4 = 0,29$

Ответ. При увеличении интенсивности входящего потока задач с  $0,25 \text{ с}^{-1}$  до  $0,75 \text{ с}^{-1}$  (в три раза), вероятность отказа системы (вероятность потери заявки) выросла с  $0,03$  до  $0,29$  (почти в 10 раз).

## Многоканальная система обслуживания без очереди

### Задача П5-9.

СМО без очереди, имеющая три канала с интенсивностью обслуживания  $0,3 \text{ с}^{-1}$  находится в установившемся режиме при интенсивности потока заявок равном  $0,5 \text{ с}^{-1}$ . Оценить, как произойдет переход данной СМО в новое стационарное состояние, если интенсивность потока заявок возрастет вдвое.

### Решение.

Состояния системы такой структуры и граф переходов описаны в решении задачи П5-6. Там же приведено решение системы линейных уравнений для заданных интенсивностей потоков:

При  $\lambda = 0,5 \text{ с}^{-1}$ ;  $\mu = 0,3 \text{ с}^{-1}$  вероятности состояний в установившемся режиме будут равны:

$$p_0 = 0,207; p_1 = 0,345; p_2 = 0,288; p_3 = 0,16.$$

Эти данные послужат исходными (начальными условиями) при исследовании процесса перехода СМО в новый установившийся режим.



## Многоканальная система обслуживания без очереди

### Задача П5-9.

Составим систему дифференциальных уравнений для новой интенсивности потока заявок, т.е. при  $\lambda_2 = 1,0 \text{ с}^{-1}$ :

$$\begin{cases} dp_0(t)/dt = -p_0 + 0,3p_1 \\ dp_1(t)/dt = p_0 - (1 + 0,3)p_1 + 2 \cdot 0,3p_2 = 0 \\ dp_2(t)/dt = p_1 - (1 + 2 \cdot 0,3)p_2 + 3 \cdot 0,3p_3 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Решим систему, используя приведенные выше начальные условия:

$$p_0(0) = 0,207; p_1(0) = 0,345; p_2(0) = 0,288; p_3(0) = 0,16$$

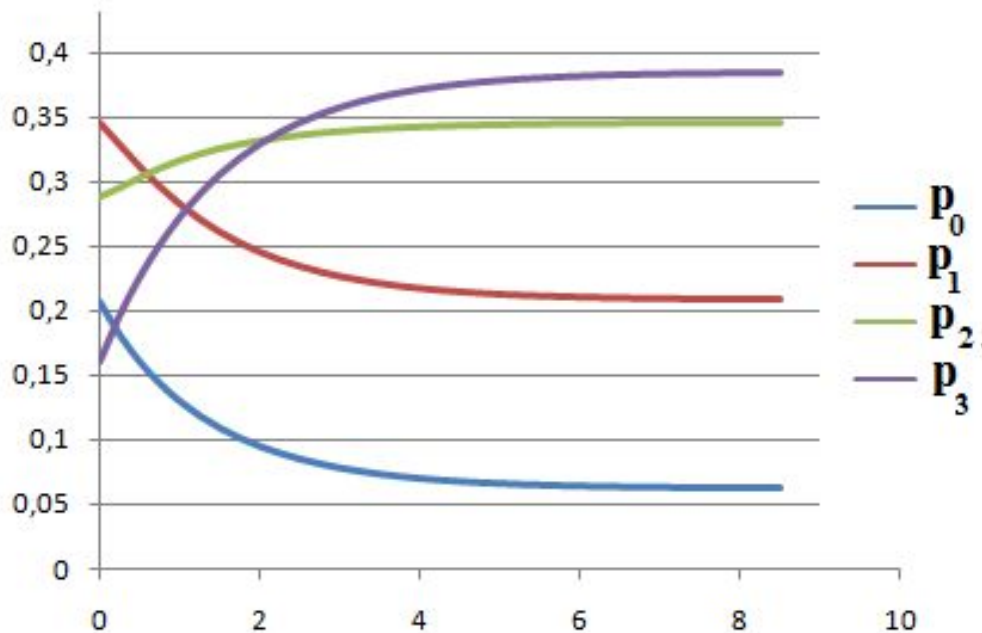
## Многоканальная система обслуживания без очереди

### Задача П5-9.

Результаты решения сведены в таблицу и приведены на рисунке

Таблица к задаче П5-9

Время	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_0$	0,207	0,130	0,095	0,078	0,070	0,066	0,064	0,063	0,063
$P_1$	0,345	0,282	0,245	0,226	0,217	0,212	0,210	0,209	0,208
$P_2$	0,288	0,316	0,332	0,339	0,343	0,344	0,345	0,345	0,346
$P_3$	0,160	0,272	0,329	0,357	0,371	0,378	0,381	0,383	0,384



Нетрудно заметить, что по мере увеличения времени значения вероятностей стремятся к новым постоянным значениям и достигают их за  $7 \div 8$  секунд

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Д5-2.** Определить вероятности пребывания многоканальной системы обслуживания без очереди в каждом из возможных состояний. Вычислить пропускную способность системы и среднее число занятых каналов. Исходные данные:

Число каналов – 5

Средняя периодичность поступления заявок (в табл.)

Среднее время обслуживания одной заявки (в табл.)

Вар.	$T_{\text{пост}}$	$T_{\text{обсл}}$	Вар.	$T_{\text{пост}}$	$T_{\text{обсл}}$	Вар.	$T_{\text{пост}}$	$T_{\text{обсл}}$
<b>1</b>	0,5	8	<b>11</b>	0,5	2	<b>21</b>	0,4	3
<b>2</b>	0,5	3	<b>12</b>	0,4	4	<b>22</b>	0,6	5
<b>3</b>	0,4	6	<b>13</b>	0,6	6	<b>23</b>	0,6	1,5
<b>4</b>	0,4	2	<b>14</b>	0,6	2	<b>24</b>	0,8	3
<b>5</b>	0,6	4	<b>15</b>	0,8	4	<b>25</b>	0,9	5
<b>6</b>	0,8	5	<b>16</b>	0,8	1,5	<b>26</b>	0,9	2
<b>7</b>	0,8	2,5	<b>17</b>	0,9	3	<b>27</b>	0,75	1,5
<b>8</b>	0,9	4	<b>18</b>	0,75	2,5	<b>28</b>	0,91	4,5
<b>9</b>	0,9	1	<b>19</b>	0,5	4	<b>29</b>	0,92	2,5
<b>10</b>	0,5	6	<b>20</b>	0,4	8	<b>30</b>	0,76	1,6

# Модели обслуживания вычислительных задач

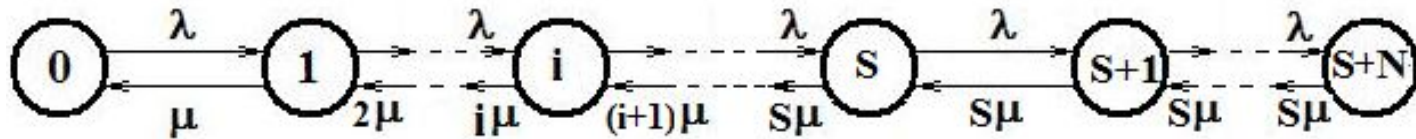
## Раздел

*Многоканальные системы обслуживания с очередью*

# Многоканальная система обслуживания с очередью

## Теоретические основы.

Граф состояний системы, которая имеет  $S$  одинаковых каналов и очередь, в которой  $N$  мест:



Интенсивность потока заявок -  $\lambda$ . Интенсивность обслуживания -  $\mu$ .

Общее число состояний -  $S+N+1$

Система уравнений, описывающая стационарное состояние СМО:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \\ -(\lambda + k\mu)P_k + \lambda P_{k-1} + (k+1)\mu P_{k+1} = 0; \quad 1 \leq k \leq S-1; \\ -(\lambda + S\mu)P_S + \lambda P_{S-1} + S\mu P_{S+1} = 0; \\ -(\lambda + S\mu)P_{S+n} + \lambda P_{S+n-1} + S\mu P_{S+n+1} = 0; \quad 1 \leq n \leq N-1 \\ -S\mu P_{S+N} + \lambda P_{S+N-1} = 0 \end{array} \right.$$

Условие нормировки вероятностей

$$\sum_{k=0}^S P_k + \sum_{n=1}^N P_{S+n} = 1$$

## Многоканальная система обслуживания с очередью

Показатели эффективности СМО

1. *Вероятность простоя, вероятность отказа, и вероятность обслуживания* определяются аналогично ранее рассмотренным случаям:

$$P_{\text{пр}} = P_0 \quad P_{\text{отк}} = P_{S+N} \quad P_{\text{об}} = 1 - P_{S+N} \quad \text{или} \quad P_{\text{об}} = \sum_{k=0}^S P_k + \sum_{n=1}^{N-1} P_{S+n}$$

2. Также аналогично ранее рассмотренным случаям находится *пропускная способность* системы:

$$C = P_{\text{об}} \lambda$$

3. *Среднее число занятых каналов или среднее количество заявок, проходящих обслуживание* :

$$K_s = \sum_{k=1}^S k P_k + S \sum_{i=1}^N P_{S+i}$$

4. *Средняя длина очереди*:

$$L = \sum_{i=1}^N i P_{S+i}$$

5. *Среднее время ожидания заявки в очереди*:

$$t_{\text{ож}} = L / (S\mu)$$

6. *Среднее количество заявок, находящихся в системе*:  $K = K_s + L$

7. *Средняя продолжительность пребывания заявки в системе*:

$$t_c = K / (S\mu)$$

## Многоканальная система обслуживания с очередью

### Задача П5-10.

Определить, как изменится вероятность отказа, если у четырехканальной СМО без очереди два из имеющихся каналов заменить на два места в очереди. Интенсивность потока заявок в установившемся режиме  $0,25 \text{ с}^{-1}$ , интенсивности обслуживания заявок каналами  $0,2 \text{ с}^{-1}$

### Решение.

Вероятность отказа четырехканальной СМО без очереди при указанных интенсивностях потоков была определена в задаче П5-8 и составила:

$$P_{\text{отк1}} = 0,03$$

Двухканальная система с двумя местами в очереди может иметь пять возможных состояний:

«0» - система свободна;

«1» - в системе обслуживается одна заявка, очередь пуста;

«2» - в системе обслуживаются две заявки, очередь пуста;

«3» - в системе обслуживаются две заявки и одна находится в очереди;

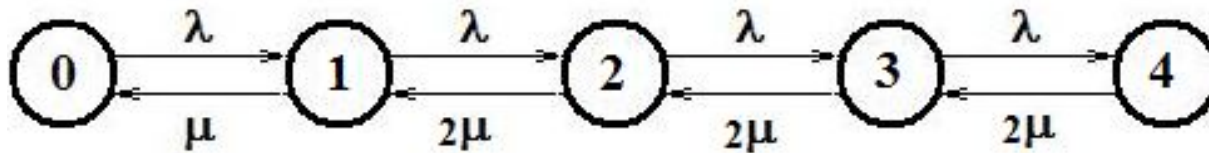
«4» - в системе обслуживаются две заявки и две находятся в очереди, система полностью занята.

Соответственно, вероятности нахождения системы в этих состояниях -  $P_0, P_1, P_2,$  и т.д.

## Многоканальная система обслуживания с очередью

### Задача П5-10.

Граф двухканальной системы с двумя местами в очереди будет иметь вид:



Для определения вероятностей состояний СМО следует записать систему из 5 уравнений.

$$\begin{cases} -0,25p_0 + 0,2p_1 = 0 \\ 0,25p_0 - (0,25 + 0,2)p_1 + 2 \cdot 0,2p_2 = 0 \\ 0,25p_1 - (0,25 + 2 \cdot 0,2)p_2 + 2 \cdot 0,2p_3 = 0 \\ 0,25p_2 - (0,25 + 2 \cdot 0,2)p_3 + 2 \cdot 0,2p_4 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:

$$p_0 = 0,26; p_1 = 0,33, p_2 = 0,2; p_3 = 0,13; p_4 = 0,08$$

Вероятность отказа

$$P_{\text{отк}} = p_4 = \mathbf{0,08}$$

Ответ. При замене двух каналов двумя местами в очереди вероятность отказа возрастет.



## Многоканальная система обслуживания с очередью

### Задача П5-11.

Имеется двухканальная СМО с двумя местами в очереди, описанная в предыдущей задаче. Определить, какой путь модернизации структуры эффективнее – увеличить число каналов или увеличить число мест в очереди.

### Решение.

Для системы, рассмотренной в предыдущей задаче интенсивность потока заявок  $0,25 \text{ с}^{-1}$ , интенсивности обслуживания заявок каналами  $0,2 \text{ с}^{-1}$

Решение системы уравнений для установившегося режима таково:

$$p_0 = 0,26; p_1 = 0,33, p_2 = 0,2; p_3 = 0,13; p_4 = 0,08$$

Рассчитанные параметры эффективности:

Вероятность отказа

$$P_{\text{отк}} = 0,08$$

Вероятность обслуживания

$$P_{\text{об}} = 1 - P_{\text{отк}} = 0,92$$

Пропускная способность системы

$$P_{\text{об}} \lambda = 0,92 \cdot 0,25 = 0,23$$

Среднее число занятых каналов

$$K_s = p_1 + 2p_2 + 2(p_3 + p_4) = 1,15$$

Средняя длина очереди

$$L = p_3 + 2p_4 = 0,29$$

Среднее время ожидания в очереди

$$\tau_{\text{ож}} = L / (S\mu) = 0,72 \text{ с}$$

Среднее число заявок в системе

$$K = K_s + L = 1,45$$

Среднее время пребывания заявки в СМО  $t_c = K / (S\mu) = 3,3 \text{ с}$

## Многоканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-11.

Рассмотрим случай увеличения числа каналов.

Допустим имеем систему, с числом каналов  $S = 3$ ; числом мест в очереди  $N = 2$ . Система будет иметь шесть возможных состояний:

«0» - система свободна;

«1» - в системе обслуживается одна заявка, очередь пуста;

«2» - в системе обслуживаются две заявки, очередь пуста;

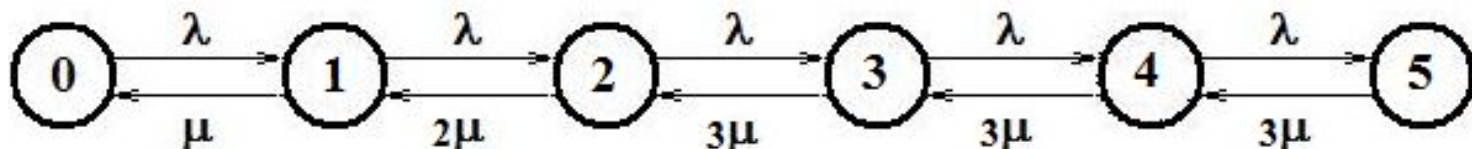
«3» - в системе обслуживаются три заявки, очередь пуста;

«4» - в системе обслуживаются три заявки и одна находится в очереди;

«5» - в системе обслуживаются три заявки и две находятся в очереди, система полностью занята.

Соответственно, вероятности нахождения системы в этих состояниях -  $P_0, P_1, P_2,$  и т.д.

Граф системы будет иметь вид:



## Многоканальная система обслуживания с очередью

### Задача П5-11.

Для определения вероятностей состояний СМО следует записать систему из 6 уравнений.

$$\begin{cases} -0,25p_0 + 0,2p_1 = 0 \\ 0,25p_0 - (0,25 + 0,2)p_1 + 2 \cdot 0,2p_2 = 0 \\ 0,25p_1 - (0,25 + 2 \cdot 0,2)p_2 + 3 \cdot 0,2p_3 = 0 \\ 0,25p_2 - (0,25 + 3 \cdot 0,2)p_3 + 3 \cdot 0,2p_4 = 0 \\ 0,25p_3 - (0,25 + 3 \cdot 0,2)p_4 + 3 \cdot 0,2p_5 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:

$$p_0 = 0,28; p_1 = 0,35; p_2 = 0,22; p_3 = 0,09; p_4 = 0,04; p_5 = 0,02$$

## Многоканальная система обслуживания с очередью

### Задача П5-11.

Параметры эффективности трехканальной СМО с двумя местами в очереди:

Вероятность отказа	$P_{\text{отк}} = 0,02$
Вероятность обслуживания	$P_{\text{об}} = 1 - P_{\text{отк}} = 0,98$
Пропускная способность системы	$P_{\text{об}} \lambda = 0,92 \cdot 0,25 = 0,24$
Среднее число занятых каналов	$K_s = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 3(p_4 + p_5) = 1,23$
Средняя длина очереди	$L = p_4 + 2p_5 = 0,07$
Среднее время ожидания в очереди	$\tau_{\text{ож}} = L / (S\mu) = 0,12 \text{ с}$
Среднее число заявок в системе	$K = K_s + L = 1,3$
Среднее время пребывания заявки в СМО	$t_c = K / (S\mu) = 2,1 \text{ с}$

## Многоканальная система обслуживания с очередью

**Задача П5-11.** Рассмотрим случай увеличения числа мест в очереди.

Теперь будем иметь систему, у которой число каналов  $S = 2$ ; число мест в очереди  $N = 3$ .

Система будет иметь шесть возможных состояний:

«0» - система свободна;

«1» - в системе обслуживается одна заявка, очередь пуста;

«2» - в системе обслуживаются две заявки, очередь пуста;

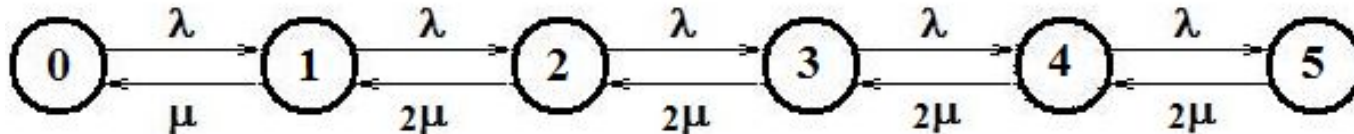
«3» - в системе обслуживаются две заявки и одна находится в очереди;

«4» - в системе обслуживаются две заявки и две находятся в очереди;

«5» - в системе обслуживаются две заявки и три находятся в очереди, система полностью занята.

Соответственно, вероятности нахождения системы в этих состояниях -  $p_0, p_1, p_2,$  и т.д.

Граф системы будет иметь вид:



## Многоканальная система обслуживания с очередью

### Задача П5-11.

Для определения вероятностей состояний СМО следует записать систему из 6 уравнений.

$$\begin{cases} -0,25p_0 + 0,2p_1 = 0 \\ 0,25p_0 - (0,25 + 0,2)p_1 + 2 \cdot 0,2p_2 = 0 \\ 0,25p_1 - (0,25 + 2 \cdot 0,2)p_2 + 2 \cdot 0,2p_3 = 0 \\ 0,25p_2 - (0,25 + 2 \cdot 0,2)p_3 + 2 \cdot 0,2p_4 = 0 \\ 0,25p_3 - (0,25 + 2 \cdot 0,2)p_4 + 2 \cdot 0,2p_5 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:

$$p_0 = 0,25; p_1 = 0,31; p_2 = 0,19; p_3 = 0,12; p_4 = 0,08; p_5 = 0,05$$

## Многоканальная система обслуживания с очередью

### Задача П5-11.

Параметры эффективности двухканальной СМО с тремя местами в очереди:

Вероятность отказа	$P_{\text{отк}} = 0,05$
Вероятность обслуживания	$P_{\text{об}} = 1 - P_{\text{отк}} = 0,95$
Пропускная способность системы	$P_{\text{об}} \lambda = 0,92 \cdot 0,25 = 0,24$
Среднее число занятых каналов	$K_s = p_1 + 2p_2 + 2(p_3 + p_4 + p_5) = 1,19$
Средняя длина очереди	$L = p_3 + 2p_4 + 3p_5 = 0,42$
Среднее время ожидания в очереди	$\tau_{\text{ож}} = L / (S\mu) = 1,04 \text{ с}$
Среднее число заявок в системе	$K = K_s + L = 1,6$
Среднее время пребывания заявки в СМО	$t_c = K / (S\mu) = 4,02 \text{ с}$

Анализ полученных данных позволяет указать на следующее.

1. В обоих случаях модернизации вероятность отказа уменьшается, однако, увеличение числа каналов уменьшает эту вероятность значительно.
2. Пропускная способность системы практически не меняется.
3. Среднее время пребывания заявки в СМО при увеличении числа каналов значительно меньше, чем при увеличении числа мест в очереди.

Вывод: Модернизация системы путем увеличения числа каналов более эффективна, чем увеличение числа мест в очереди.

## Многоканальная система обслуживания с очередью

### Задача П5-12.

Определить среднее время пребывания автомобилиста на заправке, если на заправочной станции имеются две колонки с необходимым бензином, а средняя продолжительность процесса заправки 2,5 минуты. Автомобили, нуждающиеся в пополнении бензином, появляются, в среднем, каждые 1,5 минуты. Принять, что если очередь к каждой из колонок превышает 2 машины, водитель предпочитает найти другую станцию.

### Решение.

Заправочную станцию можно рассматривать, как СМО. При этом число каналов – это число заправочных колонок, т.е.  $S = 2$ . Число мест в общей очереди  $N = 4$ .

Система будет иметь семь возможных состояний:

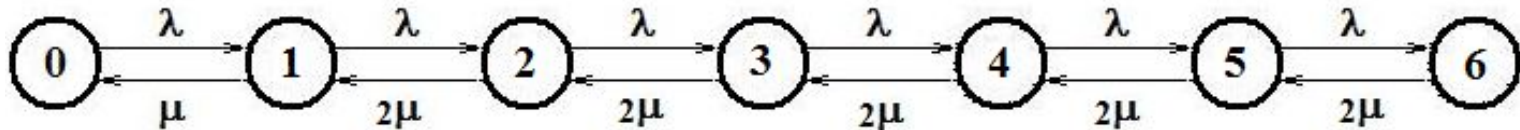
- «0» - заправочная станция свободна;
- «1» - заправляется один автомобиль, очереди нет;
- «2» - заправляются два автомобиля, очереди нет;
- «3» - заправляются два автомобиля и один находится в очереди;
- «4» - заправляются два автомобиля и два находятся в очереди;
- «5» - заправляются два автомобиля и три находятся в очереди;
- «6» - заправляются два автомобиля и четыре находятся в очереди.



## Многоканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-12.

Граф системы будет иметь вид:



Исходя из заданной периодичности потоков, определим их интенсивности.

Интенсивность входящего потока:  $\lambda = 1/T_{\text{ЗАЯВ}} = 1/1,5 = 0,67 \text{ мин}^{-1}$

Интенсивность обслуживания:  $\mu = 1/T_{\text{ОБСЛ}} = 1/2,5 = 0,4 \text{ мин}^{-1}$

Для определения вероятностей состояний СМО следует записать систему из 7 уравнений.

$$\begin{cases} -0,67p_0 + 0,4p_1 = 0 \\ 0,67p_0 - (0,67 + 0,4)p_1 + 2 \cdot 0,4p_2 = 0 \\ 0,67p_1 - (0,67 + 2 \cdot 0,4)p_2 + 2 \cdot 0,4p_3 = 0 \\ 0,67p_2 - (0,67 + 2 \cdot 0,4)p_3 + 2 \cdot 0,4p_4 = 0 \\ 0,67p_3 - (0,67 + 2 \cdot 0,4)p_4 + 2 \cdot 0,4p_5 = 0 \\ 0,67p_4 - (0,67 + 2 \cdot 0,4)p_5 + 2 \cdot 0,4p_6 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:

$$p_0 = 0,13; p_1 = 0,22, p_2 = 0,18; p_3 = 0,15; p_4 = 0,13; p_5 = 0,11; p_6 = 0,09$$

## Многоканальная система обслуживания с очередью

### Задача П5-12.

Вероятность того, что автомобилист откажется от обслуживания на данной заправке:

$$P_{\text{отк}} = p_6 = 0,09$$

Среднее число занятых колонок (каналов)

$$K_s = p_1 + 2p_2 + 2(p_3 + p_4 + p_5 + p_6) = 1,53$$

Средняя длина общей очереди

$$L = p_3 + 2p_4 + 3p_5 + 4p_6 = 1,1$$

Средняя длина очереди к отдельной колонке

$$L^* = L/2 = 1,1/2 = 0,55$$

Среднее время ожидания в очереди

$$\tau_{\text{ож}} = L/(S\mu) = 1,35 \text{ мин}$$

Среднее число автомобилей на заправке

$$K = K_s + L = 2,6$$

Среднее время пребывания автомобиля на заправке

$$t_c = K/(S\mu) = 3,26 \text{ мин}$$

# Модели обслуживания вычислительных задач

*Прочие виды многоканальных систем обслуживания*

## Многоканальная система с неодинаковыми каналами

### Задача П5-13.

Рассмотреть параметры работы двухканальной СМО без очереди, если производительность каналов неодинакова. Поток заявок имеет интенсивность  $\lambda = 0,5 \text{ с}^{-1}$ . Интенсивность обслуживания первым каналом  $\mu_1 = 0,2 \text{ с}^{-1}$ , вторым  $\mu_2 = 0,1 \text{ с}^{-1}$ . Заявка в первую очередь принимается на обслуживание каналом, имеющим большую производительность.

### Решение.

Система может иметь четыре возможных состояния:

«0» - система свободна;

«1» - занят первый (более производительный) канал, второй свободен;

«2» - занят второй канал, первый (более производительный) свободен;

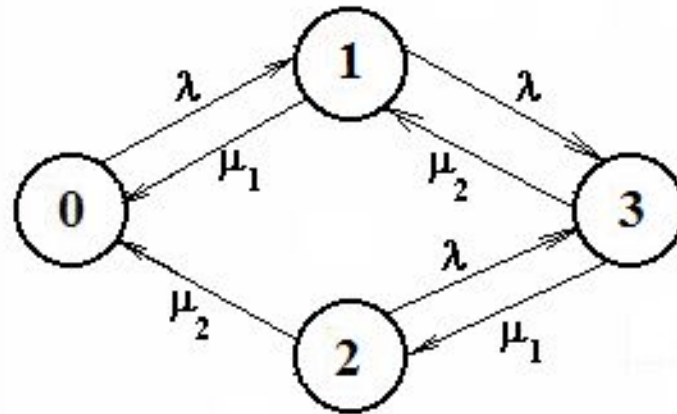
«3» - заняты оба канала, система полностью загружена.

Вероятности нахождения системы в этих состояниях -  $P_0, P_1, P_2, P_3$ .

## Многоканальная система с неодинаковыми каналами

### Задача П5-13.

Граф системы будет иметь вид:



Запишем систему из четырех уравнений для установившегося режима:

$$\begin{cases} -0,5p_0 + 0,2p_1 + 0,1p_2 = 0 \\ 0,5p_0 - (0,5 + 0,2)p_1 + 0,1p_3 = 0 \\ -(0,5 + 0,1)p_2 + 0,2p_3 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:

$$p_0 = 0,1; p_1 = 0,15; p_2 = 0,19; p_3 = 0,56$$

## Многоканальная система с неодинаковыми каналами

### Задача П5-13.

Вероятность отказа	$P_{\text{отк}} = 0,56$	
Вероятность обслуживания	$P_{\text{об}} = 1 - P_{\text{отк}} = 0,44$	
Вероятность простоя	$p_0 = 0,1;$	
Вероятность загрузки первого процессора:	$p_1 + p_3 = 0,71;$	
Вероятность загрузки второго процессора:	$p_2 + p_3 = 0,75.$	