ТЕМА 5
Модели обслуживания вычислительных задач

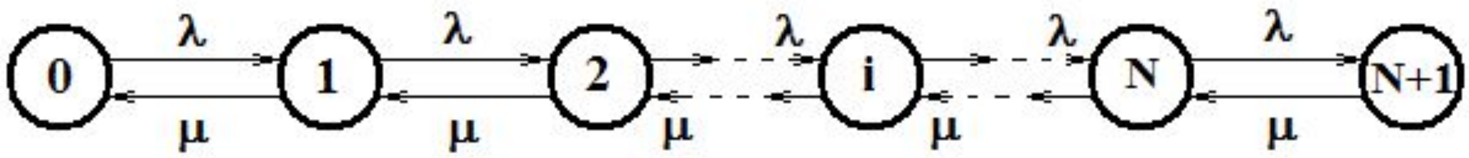
Раздел

Одноканальные системы обслуживания с очередью

Одноканальная система обслуживания с очередью

Теоретические основы.

Граф состояний одноканальной системы, у которой число мест в очереди **N**.



Интенсивность потока заявок – **λ**. Интенсивность обслуживания – **μ**.
Общее число состояний – **N+2.**

Система дифференциальных уравнений, описывающая поведение СМО:

$$\begin{cases} dP_0(t)/dt = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t); \\ dP_k(t)/dt = -(\lambda+\mu)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + \mu P_{k+1}(t); \quad k = 1,2,\ldots N; \\ dP_{N+1}(t)/dt = -\mu P_{N+1}(t) + \lambda P_N(t); \end{cases}$$

где $P_i(t)$ – вероятность того, что в момент **t** СМО находится в состоянии **i**.

Для решения системы необходимо одно из уравнений заменить условием нормировки вероятностей

$$\sum_{k=0}^{N+1} P_k = 1$$

Одноканальная система обслуживания с очередью

Решение системы дифференциальных уравнений позволяет при заданных начальных условиях и известных интенсивностях **λ** и **μ** определить изменение $\mathbf{P_i(t)}$ вероятностей состояний системы во времени.

В стационарном состоянии вероятности $\mathbf{P_i(t)}$ не меняются со временем, поэтому можно записать систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0; \\ -(\lambda + \mu) P_k + \lambda P_{k-1} + \mu P_{k+1} = 0; \quad k = 1,2,\ldots N; \\ -\mu P_{N+1} + \lambda P_N = 0 \end{cases}$$

Из полученной системы алгебраических уравнений нетрудно найти искомые вероятности состояний системы массового обслуживания.

Найденные значения вероятности состояний системы $\mathbf{P_i}$ позволяют определить показатели эффективности системы.

Одноканальная система обслуживания с очередью

1. Вероятность простоя системы:

$$P_{ПР} = P_0$$

2. Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{ОТК} = P_{N+1}$$

3. Вероятность обслуживания

$P_{ОБ} = 1\text{-}P_{N+1}$ или $$P_{ОБ} = (P_0 + P_1 + ... + P_N) = \sum_{k=0}^{N} P_k$$

4. Пропускная способность системы:

$$C = P_{ОБ}\,\lambda$$

5. Среднее количество заявок, проходящих обслуживание в канале:

$$K_S = (P_1 + P_2 + ...) = \sum_{k=1}^{N+1} P_k$$

6. Среднее количество заявок, находящихся в системе обслуживания:

$$K = (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + ...) = \sum_{k=1}^{N+1} kP_k$$

7. Средняя длина очереди

$$L = K - K_S$$

8. Средняя продолжительность пребывания заявки в системе:

$$t_C = K/\mu$$

Одноканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-1.

Определить, как изменятся среднее время пребывания заявки в системе и средняя длина очереди для одноканальной СМО с очередью в установившемся режиме при изменении интенсивности обслуживания с
0,2 c^{-1} до 0,3 c^{-1}. Интенсивность потока заявок равна 0,25 c^{-1}, число мест в очереди 3.

Решение.

Рассматриваемая система может иметь пять возможных состояний:
«0» - система свободна;
«1» - в системе обслуживается одна заявка, но очередь пуста;
«2» - в системе обслуживается одна заявка и одна находится в очереди;
«3» - в очереди две заявки;
«4» - в очереди три заявки, система полностью занята.

Соответственно, вероятности нахождения системы в этих состояниях - $\mathbf{p_o}$, $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, и т.д.

Граф системы будет иметь вид:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, shift left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift left, "\lambda"] & 4 \arrow[l, shift left, "\mu"]
\end{tikzcd}
$$

Одноканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-1. Из условий задачи интенсивность потока заявок λ =0,25 с$^{-1}$
Интенсивность обслуживания в первом случае μ_1 = 0,2 с$^{-1}$.

Запишем систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} -0{,}25p_0 + 0{,}2p_1 = 0 \\ 0{,}25p_0 - (0{,}25 + 0{,}2)p_1 + 0{,}2p_2 = 0 \\ 0{,}25p_1 - (0{,}25 + 0{,}2)p_2 + 0{,}2p_3 = 0 \\ 0{,}25p_2 - (0{,}25 + 0{,}2)p_3 + 0{,}2p_4 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases}$$

Решая данную систему, получим:

$$p_0 = 0{,}122;\ p_1 = 0{,}152;\ p_2 = 0{,}19;\ p_3 = 0{,}238;\ p_4 = 0{,}297.$$

Среднее число заявок, находящихся в СМО:

$$k = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 = 0{,}152 + 2\cdot 0{,}19 + 3\cdot 0{,}238 + 4\cdot 0{,}297 = 2{,}44$$

Среднее число заявок, проходящих обслуживание (в канале):

$$k_S = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}152 + 0{,}19 + 0{,}238 + 0{,}297 = 0{,}88.$$

Средняя длина очереди: $k_{ср} = k - k_S =$ **1,56.**

Среднее время пребывания в СМО: $t_C = k/\mu_1 =$ **12,2 сек.**

Одноканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-1. Интенсивность обслуживания во втором случае $\mathbf{\mu_2} = 0{,}3\ с^{-1}$. Вторая система линейных уравнений.

$$\begin{cases} -0{,}25p_0 + 0{,}3p_1 = 0 \\ 0{,}25p_0 - (0{,}25 + 0{,}3)p_1 + 0{,}3p_2 = 0 \\ 0{,}25p_1 - (0{,}25 + 0{,}3)p_2 + 0{,}3p_3 = 0 \\ 0{,}25p_2 - (0{,}25 + 0{,}3)p_3 + 0{,}3p_4 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:

$$\mathbf{p_0} = 0{,}279;\ \mathbf{p_1} = 0{,}232;\ \mathbf{p_2} = 0{,}194;\ \mathbf{p_3} = 0{,}161;\ \mathbf{p_4} = 0{,}134.$$

Среднее число заявок, находящихся в СМО:

$$\mathbf{k = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4} = 0{,}232 + 2\cdot 0{,}194 + 3\cdot 0{,}161 + 4\cdot 0{,}134 = 1{,}64$$

Среднее число заявок, проходящих обслуживание (в канале):

$$\mathbf{k_S = p_1 + p_2 + p_3 + p_4} = 0{,}232 + 0{,}194 + 0{,}161 + 0{,}134 = 0{,}72.$$

Среднее длина очереди: $\mathbf{k_{ср} = k - k_S} = \mathbf{0{,}92}$.

Среднее время пребывания в СМО: $\mathbf{t_C = k/\mu_2} = \mathbf{5{,}49\ сек}$.

Одноканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-1.

Ответ: При увеличении интенсивности обслуживания заявок в канале с 0,2 $с^{-1}$ до 0,3 $с^{-1}$ (на 50%), средняя длина очереди сократилась с 1,56 до 0,92 заявок, а среднее время пребывания заявки в системе уменьшилось с 12,2 сек до 5,49 сек (более, чем в два раза).

Одноканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-2.

Определить, как изменится вероятность отказа для одноканальной СМО без очереди в установившемся режиме при изменении интенсивности обслуживания с 0,6 c^{-1} до 0,9 c^{-1}. Интенсивность потока заявок равна 0,5 c^{-1}.

Решение.

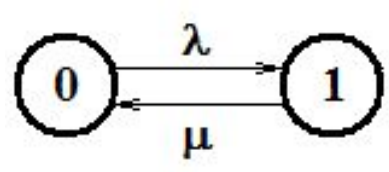
Рассматриваемая система может иметь два возможных состояния:

«0» - система свободна;

«1» - в системе обслуживается заявка, система занята.

Вероятности нахождения системы в этих состояниях - $\mathbf{p_o}$, $\mathbf{p_1}$.

Граф системы имеет вид:



Одноканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-2. Интенсивность обслуживания в первом случае $\mu_1 = 0{,}6\ с^{-1}$.

Система линейных уравнений.
$$\begin{cases} -0{,}5p_0 + 0{,}6p_1 = 0 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{cases}$$

Решение системы: $p_0 = 0{,}55$; $p_1 = 0{,}45$.

Вероятность отказа в первом случае равна $p_{ОТК} = p_1 = 0{,}45$

Интенсивность обслуживания во втором случае $\mu_2 = 0{,}9\ с^{-1}$.

Система линейных уравнений.
$$\begin{cases} -0{,}5p_0 + 0{,}9p_1 = 0 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{cases}$$

Решение системы: $p_0 = 0{,}64$; $p_1 = 0{,}36$.

Вероятность отказа во втором случае равна $p_{ОТК} = p_1 = \mathbf{0{,}36}$

Ответ: При увеличении интенсивности обслуживания заявок в канале с 0,6 $с^{-1}$ до 0,9 $с^{-1}$ (на 50%), вероятность отказа уменьшилась с 0,45 до 0,36 (на 20%).

Одноканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-3.

Определить, как изменится вероятность отказа для одноканальной СМО без очереди в установившемся режиме при изменении интенсивности потока заявок с 0,5 c^{-1} до 1,0 c^{-1}. Интенсивность обслуживания равна 0,9 c^{-1}.

Решение.

При решении предыдущей задачи 5-2 были рассмотрены возможные состояния системы и построен ее граф. Также найдено, что вероятность отказа для $\mu = 0{,}9$ c^{-1} и $\lambda_1 = 0{,}5$ c^{-1} составила $p_{\text{ОТК}} = 0{,}36$

Рассмотрим работу системы при $\lambda_2 = 1{,}0$ c^{-1}

Система линейных уравнений.

$$\begin{cases} -1{,}0p_0 + 0{,}9p_1 = 0 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{cases}$$

Решение системы: $p_0 = 0{,}47$; $p_1 = 0{,}53$.

Вероятность отказа во втором случае равна $p_{\text{ОТК}} = p_1 = 0{,}53$

Ответ: При увеличении интенсивности потока заявок с 0,5 c^{-1} до 1,0 c^{-1} (на 50%), вероятность отказа увеличилась с 0,36 до 0,53 (на 30%).

Одноканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-4.

Определить, как изменится вероятность отказа для одноканальной СМО в установившемся режиме при увеличении числа мест в очереди с 2 до 3. Интенсивность потока заявок равна 0,25 $с^{-1}$, интенсивность обслуживания 0,3 $с^{-1}$.

Решение.

Система с двумя местами в очереди может иметь четыре возможных состояния:

«0» - система свободна;

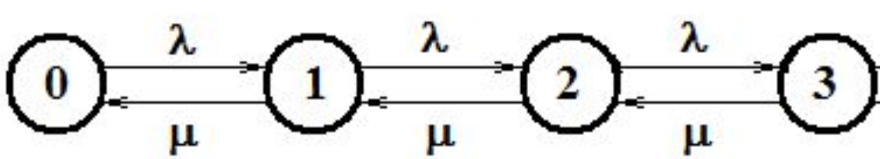
«1» - в системе обслуживается одна заявка, но очередь пуста;

«2» - в системе обслуживается одна заявка и одна находится в очереди;

«3» - в очереди две заявки, система полностью занята

Соответственно, вероятности нахождения системы в этих состояниях - $\mathbf{p_o}$, $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, и т.д.

Граф системы будет иметь вид:



Одноканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-4.

При $\boldsymbol{\lambda_1}$ =0,25 с$^{-1}$ и $\boldsymbol{\mu}$ = 0,3 с$^{-1}$ имеем следующую систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} -0{,}25p_0 + 0{,}3p_1 = 0 \\ 0{,}25p_0 - (0{,}25 + 0{,}3)p_1 + 0{,}3p_2 = 0 \\ 0{,}25p_1 - (0{,}25 + 0{,}3)p_2 + 0{,}3p_3 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Решая данную систему, получим:

$\mathbf{p_0}$= 0,322; $\mathbf{p_1}$ = 0,268; $\mathbf{p_2}$ = 0,224; $\mathbf{p_3}$ = 0,186.

Вероятность отказа в при двух местах в очереди равна $\mathbf{p_{ОТК}} = \mathbf{p_3}$ = **0,186**

Значения вероятностей состояний для системы с тремя местами в очереди было получено ранее при решении задачи 5-1.

Вероятность отказа при трех местах в очереди равна $\mathbf{p_{ОТК}} = \mathbf{p_4}$ = **0,134**

Ответ: При увеличении числа мест в очереди с 2 до 3, вероятность отказа уменьшилась с 0,186 до 0,134 (на 27%).

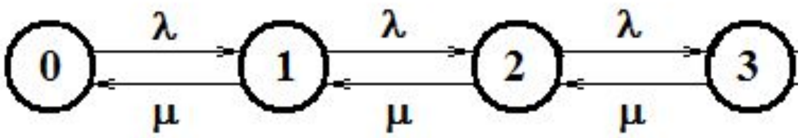
Одноканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-5.

Рассмотреть изменение во времени вероятностей состояний одноканальной СМО с очередью из 2 мест. Интенсивность потока заявок равна 0,5 $с^{-1}$, интенсивность обслуживания 0,75 $с^{-1}$. В исходном состоянии система свободна.

Решение.

Граф рассматриваемой системы будет иметь вид:



Составим систему дифференциальных уравнений:

$$
\begin{cases}
dp_0(t)/dt = -0{,}5p_0 + 0{,}75p_1 \\
dp_1(t)/dt = 0{,}5p_0 - (0{,}5 + 0{,}75)p_1 + 0{,}75p_2 \\
dp_2(t)/dt = 0{,}5p_1 - (0{,}5 + 0{,}75)p_2 + 0{,}75p_3 \\
p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1
\end{cases}
$$

Поскольку в исходном состоянии система свободна, для решения системы следует использовать следующие начальные условия:

$$p_0(0) = 1;\ p_1(0) = 0;\ p_2(0) = 0;\ p_3(0) = 0.$$

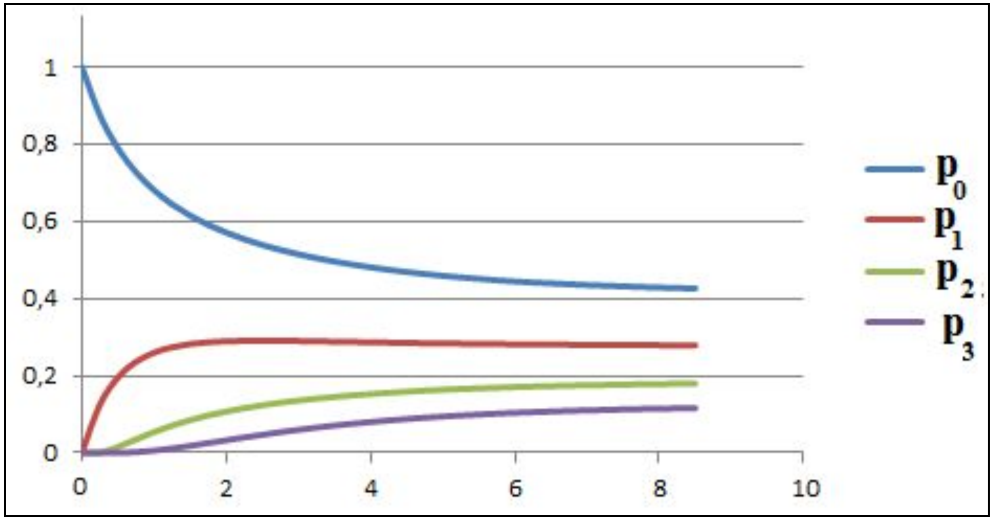
Одноканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-5.

Результаты решения сведены в таблицу и приведены на рисунке

Таблица к задаче П5-5
(первые 7 точек)

Время	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
P_0	1	0,789	0,680	0,614	0,570	0,538	0,514	0,495
P_1	0	0,195	0,259	0,281	0,289	0,290	0,289	0,288
P_2	0	0,015	0,054	0,084	0,107	0,123	0,135	0,145
P_3	0	0,000	0,010	0,020	0,032	0,045	0,06	0,074



Одноканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-5.

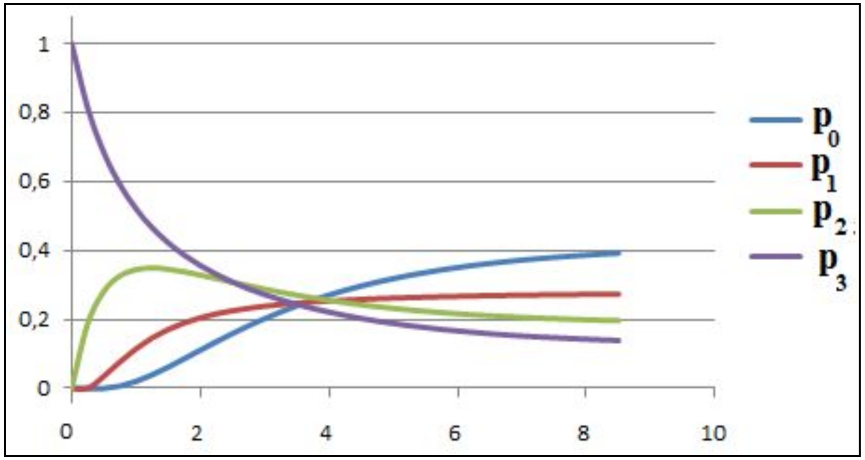
Нетрудно заметить, что по мере увеличения времени значения вероятностей стремятся к постоянным значениям

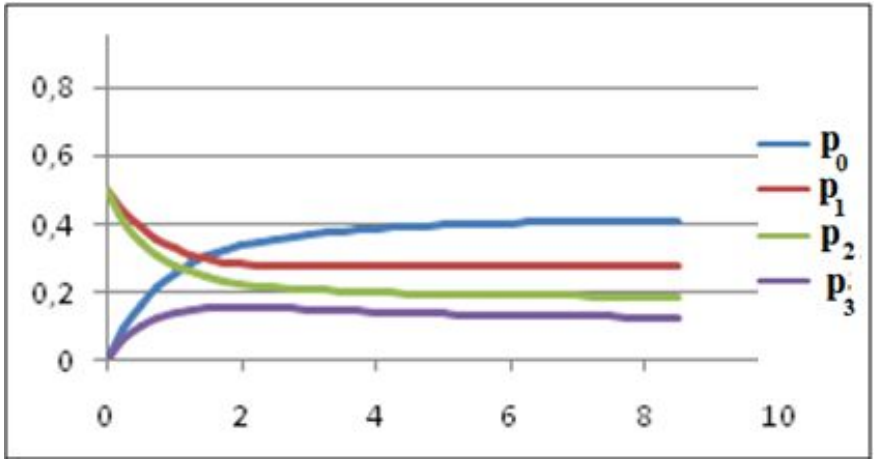
$$\mathbf{p_0} = 0{,}415;\ \mathbf{p_1} = 0{,}277;\ \mathbf{p_2} = 0{,}185;\ \mathbf{p_3} = 0{,}123.$$

Следует отметить, что указанные предельные значения достигаются и при других начальных данных, например:

При $\mathbf{p_0(0)} = 0;\ \mathbf{p_1(0)} = 0;$
$\mathbf{p_2(0)} = 0;\ \mathbf{p_3(0)} = 1.$

При $\mathbf{p_0(0)} = 0;\ \mathbf{p_1(0)} = 0{,}5;$
$\mathbf{p_2(0)} = 0{,}5;\ \mathbf{p_3(0)} = 0.$





ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Д5-1. Определить вероятности пребывания одноканальной системы обслуживания с очередью в каждом из возможных состояний. Вычислить среднюю длину очереди и среднее время пребывания заявки в системе. Исходные данные:

Число мест в очереди – **4**

Средняя периодичность поступления заявок (в табл.)

Среднее время обслуживания одной заявки (в табл.)

Вар.	$T_{пост}$	$T_{обсл}$	Вар.	$T_{пост}$	$T_{обсл}$	Вар.	$T_{пост}$	$T_{обсл}$
1	5	8	**11**	5	2	**21**	4	3
2	5	3	**12**	4	4	**22**	3	5
3	4	6	**13**	3	6	**23**	3	1,5
4	4	2	**14**	3	2	**24**	2	3
5	3	4	**15**	2	4	**25**	1,5	5
6	2	5	**16**	2	1,5	**26**	1,5	2
7	2	2,5	**17**	1,5	3	**27**	1	1,5
8	1,5	4	**18**	1	2,5	**28**	1,5	4,5
9	1,5	1	**19**	5	4	**29**	1,5	2,5
10	5	6	**20**	4	8	**30**	1,5	1,5

Модели обслуживания вычислительных задач

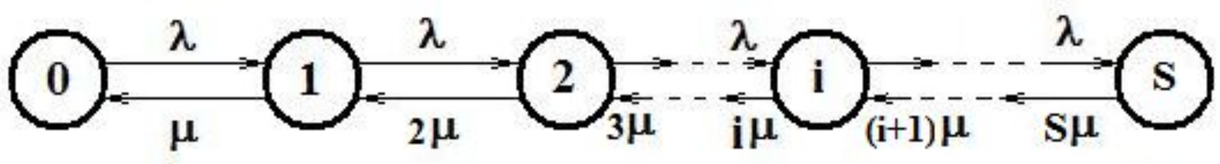
Раздел

Многоканальные системы обслуживания без очереди

Многоканальная система обслуживания без очереди

Теоретические основы.

Граф состояний системы без очереди, которая имеет **S** одинаковых каналов:



Интенсивность потока заявок - **λ**. Интенсивностью обслуживани - **μ**.

Общее число состояний - **S+1**

Система уравнений, описывающая стационарное состояние СМО:

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0; \\ -(\lambda + k\mu)P_k + \lambda P_{k-1} + (k+1)\mu P_{k+1} = 0; \quad k = 1,2,...S-1; \\ -S\mu P_S + \lambda P_{S-1} = 0 \end{cases}$$

Условие нормировки вероятностей

$$\sum_{k=0}^{S} P_k = 1$$

Решение системы позволяет найти вероятности состояний системы массового обслуживания.

Многоканальная система обслуживания без очереди

Показатели эффективности системы.

1. Вероятность простоя системы:

$$P_{ПР} = P_0$$

2. Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{ОТК} = P_S$$

3. Вероятность обслуживания

$$P_{ОБ} = 1\text{-}P_S$$ или $$P_{ОБ} = (P_0 + P_1 + \ldots + P_{S-1}) = \sum_{k=0}^{S-1} P_k$$

4. Пропускная способность системы:

$$C = P_{ОБ}\,\lambda$$

5. Среднее число занятых каналов

$$K = (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots) = \sum_{k=1}^{S} kP_k$$

6. Средняя продолжительность пребывания заявки в системе:

$$t_C = K/(S\mu)$$

Многоканальная система обслуживания без очереди

Задача П5-6.

Определить, как изменятся пропускная способность, занятость каналов и среднее время пребывания заявки для трехканальной СМО без очереди в установившемся режиме при изменении интенсивности обслуживания с 0,2 $с^{-1}$ до 0,3 $с^{-1}$. Интенсивность потока заявок равна 0,5 $с^{-1}$.

<u>Решение.</u>

Рассматриваемая система может иметь четыре возможных состояния:

«0» - система свободна;

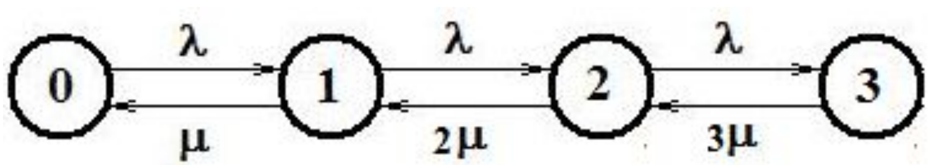
«1» - в системе обслуживается одна заявка (занят один канал);

«2» - занято два канала;

«3» - заняты все три канала.

Соответственно, вероятности нахождения системы в этих состояниях - $\mathbf{p_o}$, $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, и т.д.

Граф системы будет иметь вид:



Многоканальная система обслуживания без очереди

Задача П5-6.

Из условий задачи $\boldsymbol{\lambda} = 0{,}5\ c^{-1}$; $\boldsymbol{\mu_1} = 0{,}2\ c^{-1}$.

Для определения вероятностей состояний СМО следует записать систему из 4 уравнений.

$$\begin{cases} -0{,}5p_0 + 0{,}2p_1 = 0 \\ 0{,}5p_0 - (0{,}5 + 0{,}2)p_1 + 2 \cdot 0{,}2p_2 = 0 \\ 0{,}5p_1 - (0{,}5 + 2 \cdot 0{,}2)p_2 + 3 \cdot 0{,}2p_3 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Решая данную систему, получим:

$$\mathbf{p_0} = 0{,}108;\ \mathbf{p_1} = 0{,}271;\ \mathbf{p_2} = 0{,}339;\ \mathbf{p_3} = 0{,}282.$$

Пропускная способность СМО при производительности каналов $\boldsymbol{\mu_1} = 0{,}2\ c^{-1}$:

$$\mathbf{C = (1\text{-}p_3)\lambda} = (1 - 0{,}282)\cdot 0{,}5 = \mathbf{0{,}36\ c^{-1}}.$$

Среднее число занятых каналов:

$$\mathbf{K = p_1 + 2p_2 + 3p_3} = 0{,}271 + 2\cdot 0{,}339 + 3\cdot 0{,}282 = \mathbf{1{,}79}$$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$\mathbf{t_C = K/(S\mu)} = 1{,}79/(3\cdot 0{,}2) = \mathbf{2{,}99\ c}$$

Многоканальная система обслуживания без очереди

Задача П5-6. Рассчитаем параметры системы при увеличенной производительности каналов $\mathbf{\mu_2} = 0{,}3$ с$^{-1}$.

Система уравнений.

$$\begin{cases} -0{,}5p_0 + 0{,}3p_1 = 0 \\ 0{,}5p_0 - (0{,}5 + 0{,}3)p_1 + 2 \cdot 0{,}3p_2 = 0 \\ 0{,}5p_1 - (0{,}5 + 2 \cdot 0{,}3)p_2 + 3 \cdot 0{,}3p_3 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:

$$\mathbf{p_0} = 0{,}207;\ \mathbf{p_1} = 0{,}345;\ \mathbf{p_2} = 0{,}288;\ \mathbf{p_3} = 0{,}16.$$

Пропускная способность СМО при производительности каналов $\mathbf{\mu_2} = 0{,}3$ с$^{-1}$:

$$\mathbf{C = (1\text{-}p_3)\lambda} = (1 - 0{,}16)\cdot 0{,}5 = \mathbf{0{,}42\ с^{-1}}$$

Среднее число занятых каналов:

$$\mathbf{K = p_1 + 2p_2 + 3p_3} = 0{,}345 + 2\cdot 0{,}288 + 3\cdot 0{,}16 = \mathbf{1{,}4}$$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$\mathbf{t_C = K/(S\mu)} = 1{,}4/(3\cdot 0{,}3) = \mathbf{1{,}55\ с}$$

Многоканальная система обслуживания без очереди

Задача П5-6.

Ответ. При увеличении интенсивности обслуживания заявок в канале с 0,2 $с^{-1}$ до 0,3 $с^{-1}$ (на 50%), пропускная способность системы выросла незначительно с 0,36 до 0,42 заявок в секунду (на 16%), а среднее число занятых каналов уменьшилось с 1,79 до 1,4 (на 20%).В то же время, среднее время пребывания заявки в системе уменьшилось почти вдвое.

Многоканальная система обслуживания без очереди

Задача П5-7.

Определить, как изменятся основные параметры СМО без очереди в установившемся режиме при изменении числа каналов от 1 до 3. Интенсивности обслуживания заявок каналами 0,2 $с^{-1}$, интенсивность входящего потока заявок 0,5 $с^{-1}$.

<u>Решение.</u>

Во всех случаях интенсивность потока заявок $\boldsymbol{\lambda}$ =0,5 $с^{-1}$. интенсивность обслуживания $\boldsymbol{\mu}$ = 0,2 $с^{-1}$.

Многоканальная система обслуживания без очереди

Задача П5-7.

1. В системе один канал.

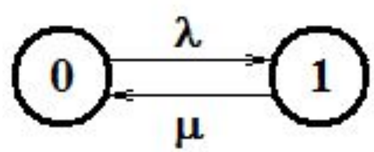
Система может иметь два возможных состояния:

«0» - система свободна;

«1» - в системе обслуживается заявка, система занята.

Вероятности нахождения системы в этих состояниях - $\mathbf{p_o}$, $\mathbf{p_1}$.

Граф системы имеет вид:



Система линейных уравнений.

$$\begin{cases} -0{,}5p_0 + 0{,}2p_1 = 0 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{cases}$$

Решение системы: $\mathbf{p_0} = 0{,}29$; $\mathbf{p_1} = 0{,}71$.

Параметры для системы с одним каналом:

Вероятность отказа $\mathbf{P_{ОТК}} = 0{,}71$

Вероятность обслуживания $\mathbf{P_{ОБ} = 1\text{-}P_{ОТК}} = 0{,}29$

Пропускная способность системы $\mathbf{P_{ОБ}\lambda} = 0{,}29 \cdot 0{,}5 = 0{,}145$

Среднее число занятых каналов $\mathbf{K = p_1} = 0{,}71$

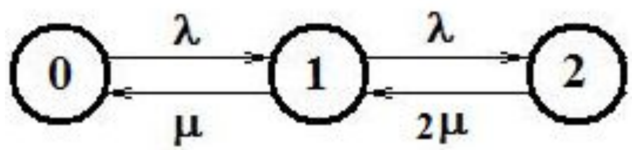
Среднее время пребывания заявки в СМО $\mathbf{t_C = K/(S\mu)} = 0{,}71/0{,}2 = 3{,}57$ с

Многоканальная система обслуживания без очереди

Задача П5-7.

2. В системе два канала.

Система может иметь три возможных состояния:
«0» - система свободна;
«1» - в системе обслуживается одна заявка (занят один канал);
«2» - заняты оба канала.
Граф системы имеет вид:



Система линейных уравнений.

$$\begin{cases} -0{,}5p_0 + 0{,}2p_1 = 0; \\ 0{,}5p_0 - (0{,}5 + 0{,}2)p_1 + 2 \cdot 0{,}2p_2 = 0; \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

Решение системы: $\mathbf{p_0} = 0{,}15$; $\mathbf{p_1} = 0{,}38$, $\mathbf{p_2} = 0{,}47$

Параметры для системы с двумя каналами:

Вероятность отказа $\mathbf{P_{ОТК}} = 0{,}47$
Вероятность обслуживания $\mathbf{P_{ОБ} = 1\text{-}P_{ОТК}} = 0{,}53$
Пропускная способность системы $\mathbf{P_{ОБ}\lambda} = 0{,}53 \cdot 0{,}5 = 0{,}265$
Среднее число занятых каналов $\mathbf{K = p_1 + 2p_2} = 1{,}32$
Среднее время пребывания заявки в СМО $\mathbf{t_C = K/(S\mu)} = 1{,}32/(2 \cdot 0{,}2) = 3{,}3$ с

Многоканальная система обслуживания без очереди

Задача П5-7.

3. В системе три канала.

Данный случай рассмотрен в предыдущей задаче П5-6.
В результате решения системы были получены следующие данные:

$$\mathbf{p_0} = 0{,}108;\ \mathbf{p_1} = 0{,}271;\ \mathbf{p_2} = 0{,}339;\ \mathbf{p_3} = 0{,}282.$$

Параметры для системы с тремя каналами:

Вероятность отказа $\mathbf{P_{ОТК}} = 0{,}28$
Вероятность обслуживания $\mathbf{P_{ОБ} = 1\text{-}P_{ОТК}} = 0{,}72$
Пропускная способность системы $\mathbf{P_{ОБ}\lambda} = 0{,}72 \cdot 0{,}5 = 0{,}36$
Среднее число занятых каналов $\mathbf{K = p_1} + \mathbf{2p_2} + \mathbf{3p_3 =} 1{,}72$
Среднее время пребывания заявки в СМО $\mathbf{t_C = K/(S\mu)} = 1{,}79/(3 \cdot 0{,}2) = 3{,}0$ с

Полученные данные можно свести в таблицу.

Число каналов	Вероятность отказа	Вероятность обслуживания	Пропускная способность системы	Среднее число занятых каналов	Среднее время пребывания заявки в СМО
1	0,71	0,29	0,145	0,71	3,57
2	0,47	0,53	0,265	1,32	3,3
3	0,28	0,72	0,36	1,72	3

Многоканальная система обслуживания без очереди

Задача П5-8.

Определить, как изменится вероятность отказа четырехканальной СМО без очереди в установившемся режиме при изменении интенсивности потока заявок от 0,25 $с^{-1}$ до 0,75 $с^{-1}$. Интенсивности обслуживания каналами 0,2 $с^{-1}$

Решение.

Рассматриваемая система может иметь пять возможных состояний:

«0» - система свободна;

«1» - в системе обслуживается одна заявка (занят один канал);

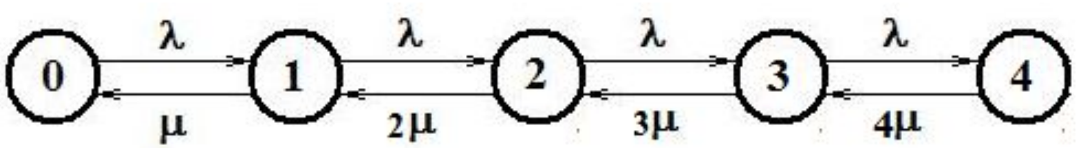
«2» - занято два канала;

«3» - заняты три канала.

«4» - заняты все четыре канала.

Соответственно, вероятности нахождения системы в этих состояниях - $\mathbf{p_o}$, $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, и т.д.

Граф системы будет иметь вид:



Многоканальная система обслуживания без очереди

Задача П5-8.

Рассмотрим стационарное состояние системы при $\boldsymbol{\lambda_1} = 0{,}25\ с^{-1}$; $\boldsymbol{\mu} = 0{,}2\ с^{-1}$.
Для определения вероятностей состояний СМО следует записать систему из 5 уравнений.

$$\begin{cases} -0{,}25p_0 + 0{,}2p_1 = 0 \\ 0{,}25p_0 - (0{,}25 + 0{,}2)p_1 + 2 \cdot 0{,}2p_2 = 0 \\ 0{,}25p_1 - (0{,}25 + 2 \cdot 0{,}2)p_2 + 3 \cdot 0{,}2p_3 = 0 \\ 0{,}25p_2 - (0{,}25 + 3 \cdot 0{,}2)p_3 + 4 \cdot 0{,}2p_4 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:

$$\mathbf{p_0} = 0{,}29;\ \mathbf{p_1} = 0{,}36,\ \mathbf{p_2} = 0{,}23;\ \mathbf{p_3} = 0{,}09;\ \mathbf{p_4} = 0{,}03$$

Вероятность отказа $\mathbf{P_{отк}} = \mathbf{p_4} = \mathbf{0{,}03}$

Многоканальная система обслуживания без очереди

Задача П5-8.

Рассмотрим стационарное состояние системы при $\boldsymbol{\lambda_2}$ = 0,75 с$^{-1}$; $\boldsymbol{\mu}$ = 0,2 с$^{-1}$..
Система из 5 уравнений.

$$\begin{cases} -0{,}75p_0 + 0{,}2p_1 = 0 \\ 0{,}75p_0 - (0{,}75 + 0{,}2)p_1 + 2 \cdot 0{,}2p_2 = 0 \\ 0{,}75p_1 - (0{,}75 + 2 \cdot 0{,}2)p_2 + 3 \cdot 0{,}2p_3 = 0 \\ 0{,}75p_2 - (0{,}75 + 3 \cdot 0{,}2)p_3 + 4 \cdot 0{,}2p_4 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:

$$\mathbf{p_0} = 0{,}03;\ \mathbf{p_1} = 0{,}13,\ \mathbf{p_2} = 0{,}24;\ \mathbf{p_3} = 0{,}31;\ \mathbf{p_4} = 0{,}29$$

Вероятность отказа $\mathbf{P_{отк}} = \mathbf{p_4} = \mathbf{0{,}29}$

Ответ. При увеличении интенсивности входящего потока задач с 0,25 с$^{-1}$ до 0,75 с$^{-1}$ (в три раза), вероятность отказа системы (вероятность потери заявки) выросла с 0,03 до 0,29 (почти в 10 раз).

Многоканальная система обслуживания без очереди

Задача П5-9.

СМО без очереди, имеющая три канала с интенсивностью обслуживания 0,3 $с^{-1}$ находится в установившемся режиме при интенсивности потока заявок равном 0,5 $с^{-1}$. Оценить, как произойдет переход данной СМО в новое стационарное состояние, если интенсивность потока заявок возрастет вдвое.

Решение.

Состояния системы такой структуры и граф переходов описаны в решении задачи П5-6. Там же приведено решение системы линейных уравнений для заданных интенсивностей потоков:

При $\boldsymbol{\lambda} = 0{,}5\ с^{-1}$; $\boldsymbol{\mu} = 0{,}3\ с^{-1}$ вероятности состояний в установившемся режиме будут равны:

$$\mathbf{p_0} = 0{,}207;\ \mathbf{p_1} = 0{,}345;\ \mathbf{p_2} = 0{,}288;\ \mathbf{p_3} = 0{,}16.$$

Эти данные послужат исходными (начальными условиями) при исследовании процесса перехода СМО в новый установившийся режим.

Многоканальная система обслуживания без очереди

Задача П5-9.

Составим систему дифференциальных уравнений для новой интенсивности потока заявок, т.е. при $\lambda_2 = 1{,}0\ c^{-1}$:

$$\begin{cases} dp_0(t)/dt = -p_0 + 0{,}3p_1 \\ dp_1(t)/dt = p_0 - (1+0{,}3)p_1 + 2\cdot 0{,}3p_2 = 0 \\ dp_2(t)/dt = p_1 - (1+2\cdot 0{,}3)p_2 + 3\cdot 0{,}3p_3 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Решим систему, используя приведенные выше начальные условия:

$p_0(0) = 0{,}207$; $p_1(0) = 0{,}345$; $p_2(0) = 0{,}288$; $p_3(0) = 0{,}16$

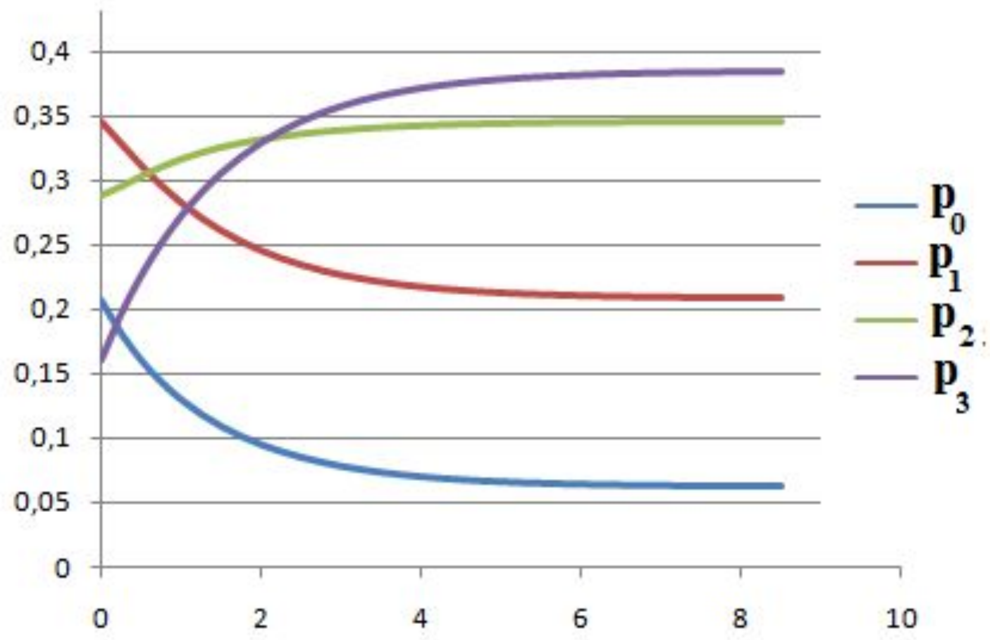
Многоканальная система обслуживания без очереди

Задача П5-9.

Результаты решения сведены в таблицу и приведены на рисунке

Таблица к задаче П5-9

Время	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P_0	0,207	0,130	0,095	0,078	0,070	0,066	0,064	0,063	0,063
P_1	0,345	0,282	0,245	0,226	0,217	0,212	0,210	0,209	0,208
P_2	0,288	0,316	0,332	0,339	0,343	0,344	0,345	0,345	0,346
P_3	0,160	0,272	0,329	0,357	0,371	0,378	0,381	0,383	0,384



Нетрудно заметить, что по мере увеличения времени значения вероятностей стремятся к новым постоянным значениям и достигают их за 7 ÷ 8 секунд

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Д5-2. Определить вероятности пребывания многоканальной системы обслуживания без очереди в каждом из возможных состояний. Вычислить пропускную способность системы и среднее число занятых каналов. Исходные данные:

Число каналов – **5**

Средняя периодичность поступления заявок (в табл.)

Среднее время обслуживания одной заявки (в табл.)

Вар.	$T_{пост}$	$T_{обсл}$	**Вар.**	$T_{пост}$	$T_{обсл}$	**Вар.**	$T_{пост}$	$T_{обсл}$
1	0,5	8	**11**	0,5	2	**21**	0,4	3
2	0,5	3	**12**	0,4	4	**22**	0,6	5
3	0,4	6	**13**	0,6	6	**23**	0,6	1,5
4	0,4	2	**14**	0,6	2	**24**	0,8	3
5	0,6	4	**15**	0,8	4	**25**	0,9	5
6	0,8	5	**16**	0,8	1,5	**26**	0,9	2
7	0,8	2,5	**17**	0,9	3	**27**	0,75	1,5
8	0,9	4	**18**	0,75	2,5	**28**	0,91	4,5
9	0,9	1	**19**	0,5	4	**29**	0,92	2,5
10	0,5	6	**20**	0,4	8	**30**	0,76	1,6

Модели обслуживания вычислительных задач

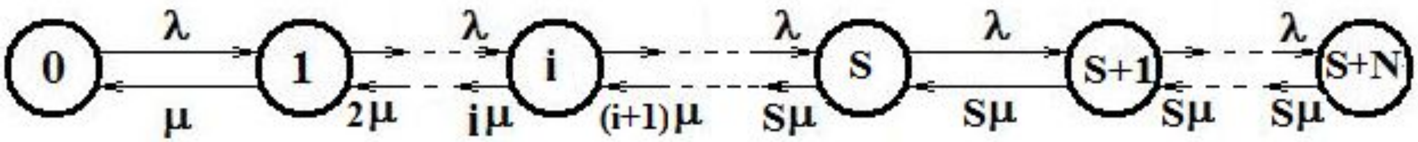
Раздел

Многоканальные системы обслуживания с очередью

Многоканальная система обслуживания с очередью

Теоретические основы.

Граф состояний системы, которая имеет **S** одинаковых каналов и очередь, в которой **N** мест:



Интенсивность потока заявок - **λ**. Интенсивность обслуживания - **μ**.
Общее число состояний - **S+N+1**
Система уравнений, описывающая стационарное состояние СМО:

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \\ -(\lambda + k\mu)P_k + \lambda P_{k-1} + (k+1)\mu P_{k+1} = 0; \quad 1 \le k \le S-1; \\ -(\lambda + S\mu)P_S + \lambda P_{S-1} + S\mu P_{S+1} = 0; \\ -(\lambda + S\mu)P_{S+n} + \lambda P_{S+n-1} + S\mu P_{S+n+1} = 0; \quad 1 \le n \le N-1 \\ -S\mu P_{S+N} + \lambda P_{S+N-1} = 0 \end{cases}$$

Условие нормировки вероятностей

$$\sum_{k=0}^{S} P_k + \sum_{n=1}^{N} P_{S+n} = 1$$

Многоканальная система обслуживания с очередью

Показатели эффективности СМО

1. ***Вероятность простоя***, ***вероятность отказа***, и ***вероятность обслуживания*** определяются аналогично ранее рассмотренным случаям:

$$P_{ПР} = P_0 \qquad P_{ОТК} = P_{S+N} \qquad P_{ОБ} = 1\text{-}P_{S+N} \quad \text{или} \quad P_{ОБ} = \sum_{k=0}^{S} P_k + \sum_{n=1}^{N-1} P_{S+n}$$

2. Также аналогично ранее рассмотренным случаям находится ***пропускная способность*** системы:

$$C = P_{ОБ}\,\lambda$$

3. ***Среднее число занятых каналов*** или ***среднее количество заявок, проходящих обслуживание*** :

$$K_S = \sum_{k=1}^{S} kP_k + S\sum_{i=1}^{N} P_{S+i}$$

4. ***Средняя длина очереди*:**

$$L = \sum_{i=1}^{N} iP_{S+i}$$

5. ***Среднее время ожидания заявки в очереди***:

$$t_{ОЖ} = L/(S\mu)$$

6. ***Среднее количество заявок, находящихся в системе***: $K = K_S + L$

7. ***Средняя продолжительность пребывания заявки в системе***:

$$t_C = K/(S\mu)$$

Многоканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-10.

Определить, как изменится вероятность отказа, если у четырехканальной СМО без очереди два из имеющихся каналов заменить на два места в очереди. Интенсивность потока заявок в установившемся режиме 0,25 $с^{-1}$, интенсивности обслуживания заявок каналами 0,2 $с^{-1}$

Решение.

Вероятность отказа четырехканальной СМО без очереди при указанных интенсивностях потоков была определена в задаче П5-8 и составила:

$$\mathbf{P_{ОТК1}} = \mathbf{0{,}03}$$

Двухканальная система с двумя местами в очереди может иметь пять возможных состояний:

«0» - система свободна;

«1» - в системе обслуживается одна заявка, очередь пуста;

«2» - в системе обслуживаются две заявки, очередь пуста;

«3» - в системе обслуживаются две заявки и одна находится в очереди;

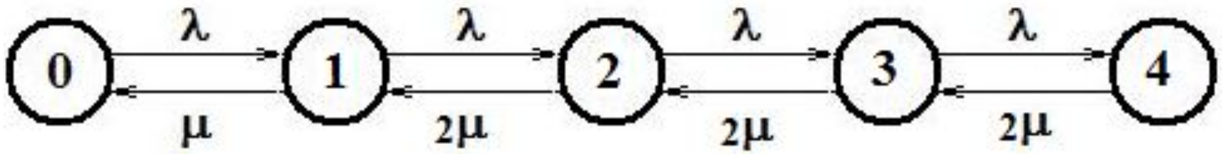
«4» - в системе обслуживаются две заявки и две находятся в очереди, система полностью занята.

Соответственно, вероятности нахождения системы в этих состояниях - $\mathbf{p_o}$, $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, и т.д.

Многоканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-10.

Граф двухканальной системы с двумя местами в очереди будет иметь вид:



Для определения вероятностей состояний СМО следует записать систему из 5 уравнений.

$$\begin{cases} -0{,}25p_0 + 0{,}2p_1 = 0 \\ 0{,}25p_0 - (0{,}25 + 0{,}2)p_1 + 2 \cdot 0{,}2p_2 = 0 \\ 0{,}25p_1 - (0{,}25 + 2 \cdot 0{,}2)p_2 + 2 \cdot 0{,}2p_3 = 0 \\ 0{,}25p_2 - (0{,}25 + 2 \cdot 0{,}2)p_3 + 2 \cdot 0{,}2p_4 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:

$$\mathbf{p_0} = 0{,}26;\ \mathbf{p_1} = 0{,}33,\ \mathbf{p_2} = 0{,}2;\ \mathbf{p_3} = 0{,}13;\ \mathbf{p_4} = 0{,}08$$

Вероятность отказа $\mathbf{P_{ОТК}} = \mathbf{p_4} = \mathbf{0{,}08}$

Ответ. При замене двух каналов двумя местами в очереди вероятность отказа возрастет.

Многоканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-11.

Имеется двухканальная СМО с двумя местами в очереди, описанная в предыдущей задаче. Определить, какой путь модернизации структуры эффективнее – увеличить число каналов или увеличить число мест в очереди.

Решение.

Для системы, рассмотренной в предыдущей задаче интенсивность потока заявок 0,25 c^{-1}, интенсивности обслуживания заявок каналами 0,2 c^{-1}

Решение системы уравнений для установившегося режима таково:

$$\mathbf{p_0} = 0{,}26;\ \mathbf{p_1} = 0{,}33,\ \mathbf{p_2} = 0{,}2;\ \mathbf{p_3} = 0{,}13;\ \mathbf{p_4} = 0{,}08$$

Рассчитанные параметры эффективности:

Вероятность отказа $\mathbf{P_{ОТК}} = 0{,}08$

Вероятность обслуживания $\mathbf{P_{ОБ} = 1\text{-}P_{ОТК}} = 0{,}92$

Пропускная способность системы $\mathbf{P_{ОБ}\lambda} = 0{,}92 \cdot 0{,}25 = 0{,}23$

Среднее число занятых каналов $\mathbf{K_S = p_1 + 2p_2 + 2(p_3 + p_4)} = 1{,}15$

Средняя длина очереди $\mathbf{L = p_3 + 2p_4} = 0{,}29$

Среднее время ожидания в очереди $\mathbf{\tau_{ОЖ} = L/(S\mu)} = 0{,}72$ с

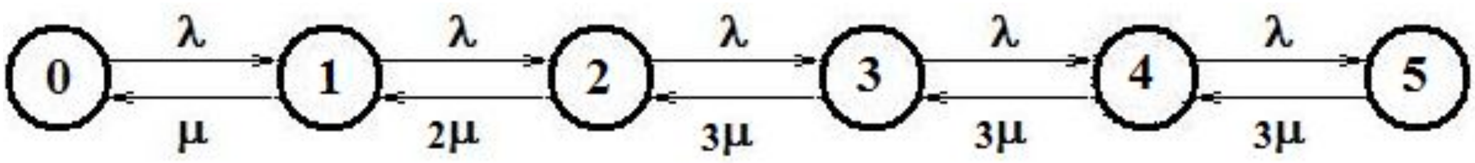
Среднее число заявок в системе $\mathbf{K = K_S + L} = 1{,}45$

Среднее время пребывания заявки в СМО $\mathbf{t_C = K/(S\mu)} = 3{,}3$ с

Многоканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-11. **Рассмотрим случай увеличения числа каналов**.

Допустим имеем систему, с числом каналов **S** = 3; числом мест в очереди **N** = 2.
Система будет иметь шесть возможных состояний:
«0» - система свободна;
«1» - в системе обслуживается одна заявка, очередь пуста;
«2» - в системе обслуживаются две заявки, очередь пуста;
«3» - в системе обслуживаются три заявки, очередь пуста;
«4» - в системе обслуживаются три заявки и одна находится в очереди;
«5» - в системе обслуживаются три заявки и две находятся в очереди, система полностью занята.
Соответственно, вероятности нахождения системы в этих состояниях - $\mathbf{p_o}$, $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, и т.д.
Граф системы будет иметь вид:



Многоканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-11.

Для определения вероятностей состояний СМО следует записать систему из 6 уравнений.

$$\begin{cases} -0{,}25p_0 + 0{,}2p_1 = 0 \\ 0{,}25p_0 - (0{,}25 + 0{,}2)p_1 + 2 \cdot 0{,}2p_2 = 0 \\ 0{,}25p_1 - (0{,}25 + 2 \cdot 0{,}2)p_2 + 3 \cdot 0{,}2p_3 = 0 \\ 0{,}25p_2 - (0{,}25 + 3 \cdot 0{,}2)p_3 + 3 \cdot 0{,}2p_4 = 0 \\ 0{,}25p_3 - (0{,}25 + 3 \cdot 0{,}2)p_4 + 3 \cdot 0{,}2p_5 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:

$\mathbf{p_0} = 0{,}28$; $\mathbf{p_1} = 0{,}35$, $\mathbf{p_2} = 0{,}22$; $\mathbf{p_3} = 0{,}09$; $\mathbf{p_4} = 0{,}04$; $\mathbf{p_5} = 0{,}02$

Многоканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-11.

Параметры эффективности трехканальной СМО с двумя местами в очереди:

Вероятность отказа $\mathbf{P_{ОТК}} = 0{,}02$
Вероятность обслуживания $\mathbf{P_{ОБ} = 1\text{-}P_{ОТК}} = 0{,}98$
Пропускная способность системы $\mathbf{P_{ОБ}\lambda} = 0{,}92 \cdot 0{,}25 = 0{,}24$
Среднее число занятых каналов $\mathbf{K_S = p_1 + 2p_2 + 3p_3} + \mathbf{3(p_4 + p_5) =}\ 1{,}23$
Средняя длина очереди $\mathbf{L = p_4 + 2p_5} = 0{,}07$
Среднее время ожидания в очереди $\mathbf{\tau_{ОЖ} = L/(S\mu)} = 0{,}12$ с
Среднее число заявок в системе $\mathbf{K = K_S + L =}\ 1{,}3$
Среднее время пребывания заявки в СМО $\mathbf{t_C = K/(S\mu)} = 2{,}1$ с

Многоканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-11. **Рассмотрим случай увеличения числа мест в очереди**.

Теперь будем иметь систему, у которой число каналов **S** = 2; число мест в очереди **N** = 3.

Система будет иметь шесть возможных состояний:

«0» - система свободна;

«1» - в системе обслуживается одна заявка, очередь пуста;

«2» - в системе обслуживаются две заявки, очередь пуста;

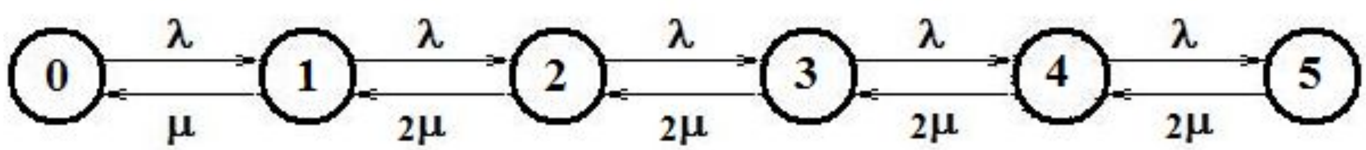
«3» - в системе обслуживаются две заявки и одна находится в очереди;

«4» - в системе обслуживаются две заявки и две находятся в очереди;

«5» - в системе обслуживаются две заявки и три находятся в очереди, система полностью занята.

Соответственно, вероятности нахождения системы в этих состояниях - $\mathbf{p_o}$, $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, и т.д.

Граф системы будет иметь вид:



Многоканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-11.

Для определения вероятностей состояний СМО следует записать систему из 6 уравнений.

$$\begin{cases} -0{,}25p_0 + 0{,}2p_1 = 0 \\ 0{,}25p_0 - (0{,}25 + 0{,}2)p_1 + 2\cdot 0{,}2p_2 = 0 \\ 0{,}25p_1 - (0{,}25 + 2\cdot 0{,}2)p_2 + 2\cdot 0{,}2p_3 = 0 \\ 0{,}25p_2 - (0{,}25 + 2\cdot 0{,}2)p_3 + 2\cdot 0{,}2p_4 = 0 \\ 0{,}25p_3 - (0{,}25 + 2\cdot 0{,}2)p_4 + 2\cdot 0{,}2p_5 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:

$\mathbf{p_0} = 0{,}25$; $\mathbf{p_1} = 0{,}31$, $\mathbf{p_2} = 0{,}19$; $\mathbf{p_3} = 0{,}12$; $\mathbf{p_4} = 0{,}08$; $\mathbf{p_5} = 0{,}05$

Многоканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-11.

Параметры эффективности двухканальной СМО с тремя местами в очереди:

Вероятность отказа $\mathbf{P_{ОТК}} = 0{,}05$
Вероятность обслуживания $\mathbf{P_{ОБ} = 1\text{-}P_{ОТК}} = 0{,}95$
Пропускная способность системы $\mathbf{P_{ОБ}\lambda} = 0{,}92 \cdot 0{,}25 = 0{,}24$
Среднее число занятых каналов $\mathbf{K_S = p_1 + 2p_2 + 2(p_3 + p_4 + p_5) =} 1{,}19$
Средняя длина очереди $\mathbf{L = p_3 + 2p_4 + 3p_5} = 0{,}42$
Среднее время ожидания в очереди $\mathbf{\tau_{ОЖ} = L/(S\mu)} = 1{,}04$ с
Среднее число заявок в системе $\mathbf{K = K_S + L =} 1{,}6$
Среднее время пребывания заявки в СМО $\mathbf{t_C = K/(S\mu)} = 4{,}02$ с

Анализ полученных данных позволяет указать на следующее.
1. В обоих случаях модернизации вероятность отказа уменьшается, однако, увеличение числа каналов уменьшает эту вероятность значительнее.
2. Пропускная способность системы практически не меняется.
3. Среднее время пребывания заявки в СМО при увеличении числа каналов значительно меньше, чем при увеличении числа мест в очереди.

Вывод: Модернизация системы путем увеличения числа каналов более эффективна, чем увеличение числа мест в очереди.

Многоканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-12.

Определить среднее время пребывания автомобилиста на заправке, если на заправочной станции имеются две колонки с необходимым бензином, а средняя продолжительность процесса заправки 2,5 минуты. Автомобили, нуждающиеся в пополнении бензином, появляются, в среднем, каждые 1,5 минуты. Принять, что если очередь к каждой из колонок превышает 2 машины, водитель предпочитает найти другую станцию.

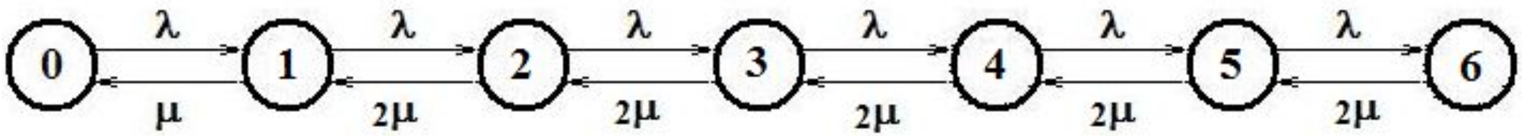
Решение.

Заправочную станцию можно рассматривать, как СМО. При этом число каналов – это число заправочных колонок, т.е. **S** = 2. Число мест в общей очереди **N** = 4.

Система будет иметь семь возможных состояний:
«0» - заправочная станция свободна;
«1» - заправляется один автомобиль, очереди нет;
«2» - заправляются два автомобиля, очереди нет;
«3» - заправляются два автомобиля и один находится в очереди;
«4» - заправляются два автомобиля и два находятся в очереди;
«5» - заправляются два автомобиля и три находятся в очереди;
«6» - заправляются два автомобиля и четыре находятся в очереди.

Многоканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-12. Граф системы будет иметь вид:



Исходя из заданной периодичности потоков, определим их интенсивности.

Интенсивность входящего потока: $\boldsymbol{\lambda = 1/T_{ЗАЯВ}} = 1/1,5 = 0,67$ мин$^{-1}$

Интенсивность обслуживания: $\boldsymbol{\mu = 1/T_{ОБСЛ}} = 1/2,5 = 0,4$ мин$^{-1}$

Для определения вероятностей состояний СМО следует записать систему из 7 уравнений.

$$\begin{cases} -0,67p_0 + 0,4p_1 = 0 \\ 0,67p_0 - (0,67 + 0,4)p_1 + 2 \cdot 0,4p_2 = 0 \\ 0,67p_1 - (0,67 + 2 \cdot 0,4)p_2 + 2 \cdot 0,4p_3 = 0 \\ 0,67p_2 - (0,67 + 2 \cdot 0,4)p_3 + 2 \cdot 0,4p_4 = 0 \\ 0,67p_3 - (0,67 + 2 \cdot 0,4)p_4 + 2 \cdot 0,4p_5 = 0 \\ 0,67p_4 - (0,67 + 2 \cdot 0,4)p_5 + 2 \cdot 0,4p_6 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:

$\mathbf{p_0} = 0,13$; $\mathbf{p_1} = 0,22$, $\mathbf{p_2} = 0,18$; $\mathbf{p_3} = 0,15$; $\mathbf{p_4} = 0,13$; $\mathbf{p_5} = 0,11$; $\mathbf{p_6} = 0,09$

Многоканальная система обслуживания с очередью

Задача П5-12.

Вероятность того, что автомобилист откажется от обслуживания на данной заправке: $\mathbf{P_{ОТК}} = \mathbf{p_6} = 0{,}09$

Среднее число занятых колонок (каналов)

$$\mathbf{K_S = p_1 + 2p_2 + 2(p_3 + p_4 + p_5 + p_6)} = 1{,}53$$

Средняя длина общей очереди

$$\mathbf{L = p_3 + 2p_4 + 3p_5 + 4p_6} = 1{,}1$$

Средняя длина очереди к отдельной колонке

$$\mathbf{L^* = L/2} = 1{,}1/2 = 0{,}55$$

Среднее время ожидания в очереди

$$\boldsymbol{\tau_{ОЖ}} = \mathbf{L/(S\mu)} = 1{,}35 \text{ мин}$$

Среднее число автомобилей на заправке

$$\mathbf{K = K_S + L} = 2{,}6$$

Среднее время пребывания автомобиля на заправке

$$\mathbf{t_C = K/(S\mu)} = 3{,}26 \text{ мин}$$

Модели обслуживания вычислительных задач

Прочие виды многоканальных систем обслуживания

Многоканальная система с неодинаковыми каналами

Задача П5-13.

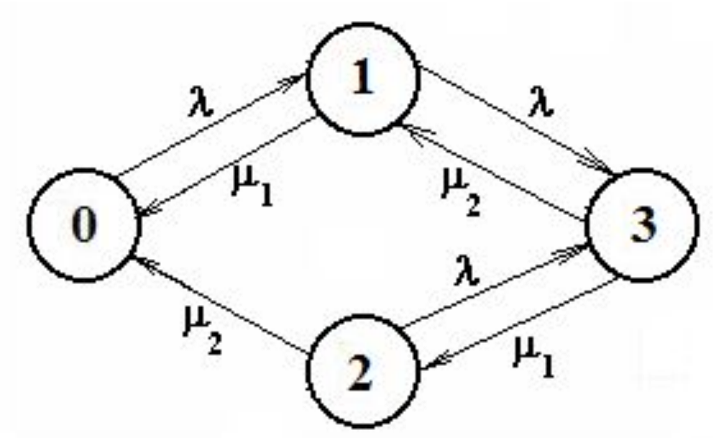
Рассмотреть параметры работы двухканальной СМО без очереди, если производительность каналов неодинакова. Поток заявок имеет интенсивность $\boldsymbol{\lambda} = 0{,}5\ c^{-1}$. Интенсивность обслуживания первым каналом $\boldsymbol{\mu_1} = 0{,}2\ c^{-1}$, вторым $\boldsymbol{\mu_2} = 0{,}1\ c^{-1}$. Заявка в первую очередь принимается на обслуживание каналом, имеющим большую производительность.

<u>Решение.</u>
Система может иметь четыре возможных состояния:
«0» - система свободна;
«1» - занят первый (более производительный) канал, второй свободен;
«2» - занят второй канал, первый (более производительный) свободен;
«3» - заняты оба канала, система полностью загружена.
Вероятности нахождения системы в этих состояниях - $\mathbf{p_o}$, $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{p_3}$.

Многоканальная система с неодинаковыми каналами

Задача П5-13.

Граф системы будет иметь вид:



Запишем систему из четырех уравнений для установившегося режима:

$$\begin{cases} -0{,}5p_0 + 0{,}2p_1 + 0{,}1p_2 = 0 \\ 0{,}5p_0 - (0{,}5+0{,}2)p_1 + 0{,}1p_3 = 0 \\ -(0{,}5+0{,}1)p_2 + 0{,}2p_3 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Решение системы:

$\mathbf{p_0} = 0{,}1$; $\mathbf{p_1} = 0{,}15$, $\mathbf{p_2} = 0{,}19$ $\mathbf{p_3} = 0{,}56$

Многоканальная система с неодинаковыми каналами

Задача П5-13.

Вероятность отказа $\mathbf{P_{ОТК}} = 0{,}56$

Вероятность обслуживания $\mathbf{P_{ОБ} = 1\text{-}P_{ОТК}} = 0{,}44$

Вероятность простоя $\mathbf{p_0} = 0{,}1;$

Вероятность загрузки первого процессора: $\mathbf{p_1 + p_3} = 0{,}71;$

Вероятность загрузки второго процессора: $\mathbf{p_2 + p_3} = 0{,}75.$