

***Определенный интеграл, его основные свойства.***

***Формула Ньютона- Лейбница. Приложения определенного интеграла.***

- 
- К понятию определенного интеграла приводит задача нахождения площади криволинейной трапеции.
  - Пусть на некотором интервале  $[a,b]$  задана непрерывная функция  $y = f(x) > 0$

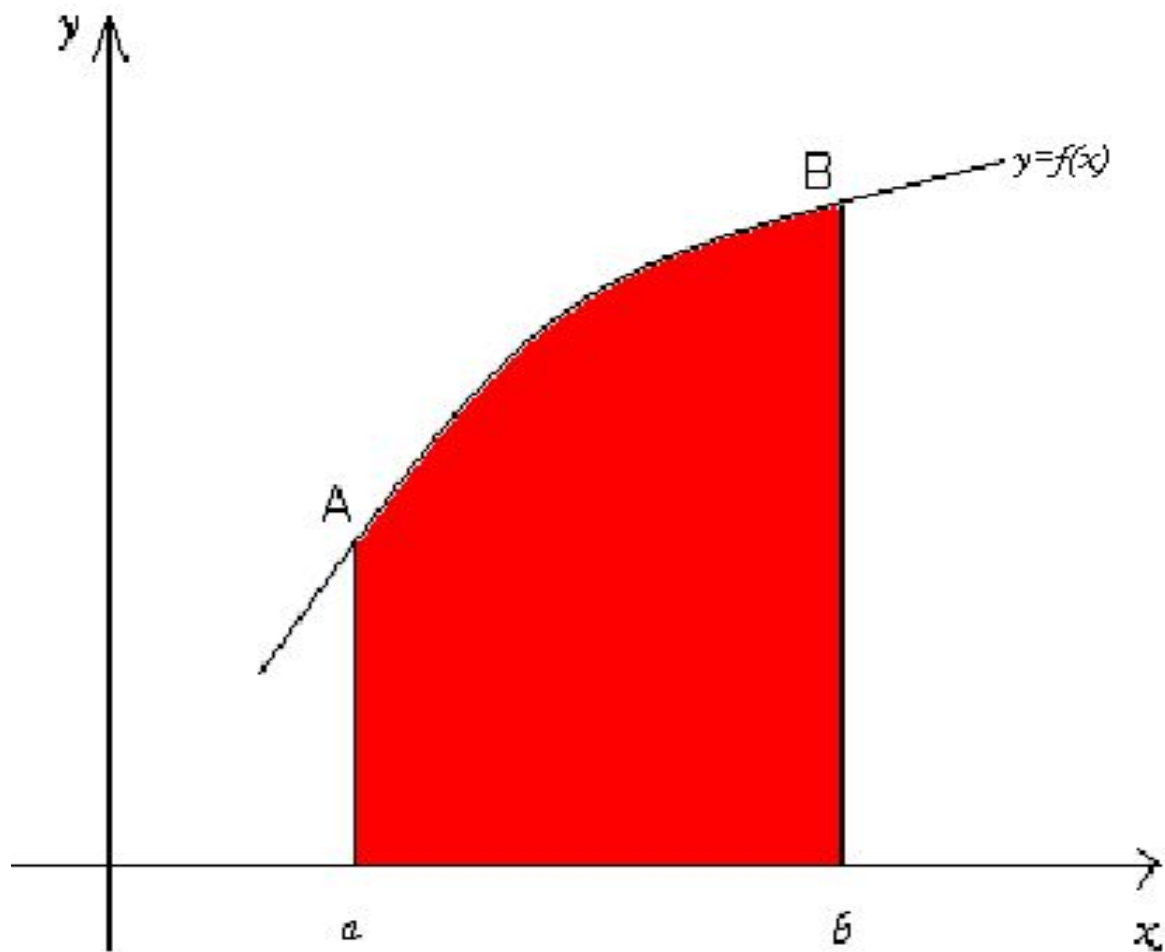
### **Задача:**

Построить ее график и найти  $F$  площадь фигуры, ограниченной этой кривой, двумя прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , а снизу – отрезком оси абсцисс между точками  $x = a$  и  $x = b$ .

---



# криволинейной трапецией



## Def.

---

- Под определенным интегралом от данной непрерывной функции  $f(x)$  на данном отрезке  $[a;b]$  понимается соответствующее приращение ее первообразной, то есть  $\int_a f(x)dx$
- Числа  $a$  и  $b$  – пределы интегрирования,  $[a;b]$  – промежуток интегрирования.

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$



- 
- Определенный интеграл равен разности значений первообразной подынтегральной функции для верхнего и нижнего пределов интегрирования.
  - Введя обозначения для разности

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

**Формула Ньютона – Лейбница.**


---





Выдающийся немецкий мыслитель Готфрид Вильгельм Лейбниц принадлежал к роду, известному своими учеными и политическими деятелями. Он изобретал всевозможные универсальные приемы для решения всех задач сразу и, может быть, поэтому вслед за Паскалем стал строить вычислительные

---





Английский физик и математик, создатель теоретических основ механики и астрономии. Он открыл закон всемирного тяготения, разработал (наряду с Г. Лейбницем) дифференциальное и интегральное исчисления, изобрел зеркальный телескоп и был автором важнейших экспериментальных работ по оптике. Ньютона по праву считают создателем "классической физики".

---



---

1) Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

где  $x$  и  $t$  – любые буквы.

2) Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$




---

3) При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на обратный


$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)dx$$

(свойство аддитивности)

4) Если промежуток  $[a;b]$  разбит на конечное число частичных промежутков, то определенный интеграл, взятый по промежутку  $[a;b]$ , равен сумме определенных интегралов, взятых по всем его частичным промежуткам.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



- 
- 5) Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.
- 6) Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций.
- 
- 

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

где  $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta), \varphi(t) \in [a; b]$

для  $t \in [\alpha; \beta]$ , функции  $\varphi(t)$  и  $\varphi'(t)$  непрерывны на  $[\alpha; \beta]$ .

**Пример:**  $\int_1^5 \sqrt{x-1} dx =$

$$x-1 = t$$

x	1	5
t	0	4

$$dt = dx$$

$$\int_0^4 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{2}{3} t\sqrt{t} \Big|_0^4 = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 - 0 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

# Пример

---

**Задача 1** Вычислить интеграл  $\int_0^1 (x-1) dx$ .

► Одной из первообразных функции  $x-1$  является функция  $\frac{x^2}{2} - x$ . Поэтому  $\int_0^1 (x-1) dx = \left( \frac{1^2}{2} - 1 \right) - \left( \frac{0^2}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ . ◁

При вычислении интегралов удобно ввести следующее обозначение:

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Тогда формулу Ньютона — Лейбница можно записать в виде

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b.$$



# Пример

---

**Задача 2** Вычислить интеграл  $\int_{-a}^a \sin x dx$ .

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int_{-a}^a \sin x dx &= (-\cos x) \Big|_{-a}^a = (-\cos a) - (-\cos(-a)) = \\ &= -\cos a + \cos(-a) = 0, \text{ так как } \cos(-a) = \cos a. \quad \triangleleft \end{aligned}$$



## Пример

---

**Задача 3**      Вычислить интеграл  $\int_{-1}^3 \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx$ .

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int_{-1}^3 \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx &= \int_{-1}^3 (2x+3)^{-\frac{1}{2}} dx = (2x+3)^{\frac{1}{2}} \Big|_{-1}^3 = \\ &= (2 \cdot 3 + 3)^{\frac{1}{2}} - (2 \cdot (-1) + 3)^{\frac{1}{2}} = 3 - 1 = 2. \triangleleft \end{aligned}$$



# Вычислить интеграл

---

$$1) \int_0^1 x dx;$$

$$2) \int_0^3 x^2 dx;$$

$$3) \int_{-1}^2 3x^2 dx;$$

$$4) \int_{-2}^3 2x dx;$$

$$5) \int_2^3 \frac{1}{x^2} dx;$$

$$6) \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx;$$

$$7) \int_1^4 \sqrt{x} dx;$$

$$8) \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$



# Вычислить интеграл

---

$$1) \int_1^e \frac{1}{x} dx;$$

$$2) \int_0^{\ln 2} e^x dx;$$

$$3) \int_{-\pi}^{2\pi} \cos x dx;$$

$$4) \int_{-2\pi}^{\pi} \sin x dx;$$

$$5) \int_{-2\pi}^{\pi} \sin 2x dx;$$

$$6) \int_{-3\pi}^0 \cos 3x dx.$$





# Вычислить интеграл

---

$$1) \int_{-3}^2 (2x - 3) dx;$$

$$2) \int_{-2}^{-1} (5 - 4x) dx;$$

$$3) \int_{-1}^2 (1 - 3x^2) dx;$$

$$4) \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx;$$

$$5) \int_0^2 (3x^2 - 4x + 5) dx.$$



# Вычислить интеграл

---

$$1) \int_0^4 (x - 3\sqrt{x}) dx;$$

$$2) \int_1^9 \left( 2x - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx;$$

$$3) \int_0^2 e^{3x} dx;$$

$$4) \int_1^3 2e^{2x} dx.$$



# Неопределенный интеграл

---

**Def:** Пусть функция  $f(x)$  определена на бесконечном интервале  $[a; +\infty)$  и интегрируется на любом интервале  $[a; b]$ , где  $b < +\infty$ . Если существует

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

то этот предел называется несобственным интегралом функции  $f(x)$  на интервале

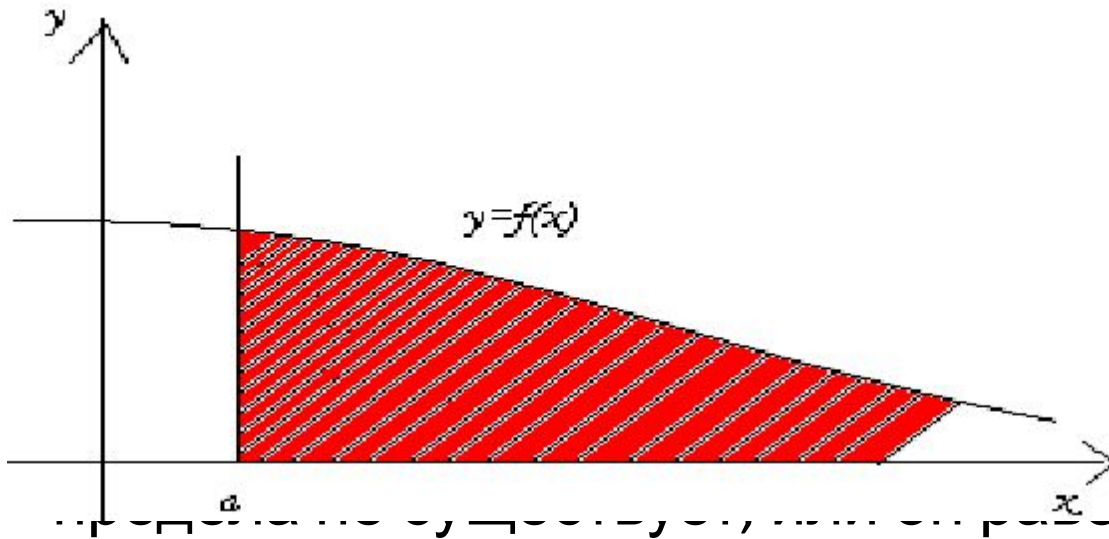
$[a; +\infty)$  и обозначается  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

---



□ Таким образом, по определению,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(a))$$



которое

ЦИМСЯ, если  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$   
и  $\infty$ , то говорят, что

интеграл расходится.





Французский математик, механик и физик. В 1811 он вывел получившее широкое применение уравнение, связывающее электрический потенциал с плотностью пространственного распределения заряда (уравнение Пуассона).



# Интеграл Пуассона:

---

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx$$

□ если  $a = 1$ , то  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

□ Интеграл сходится, и его значение  $\sqrt{\pi}$

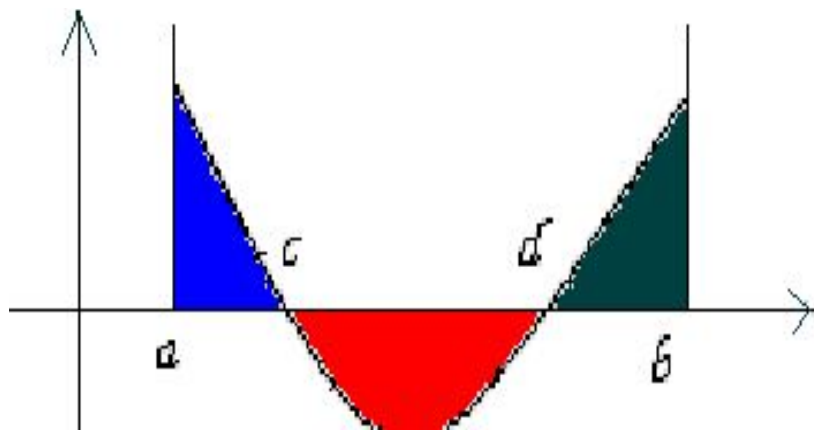


# 1) Площадь плоских фигур.

а) если  $f(x) \geq 0 \Rightarrow S = \int_a^b f(x)dx$

б) если  $f(x) < 0 \Rightarrow S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$

в)



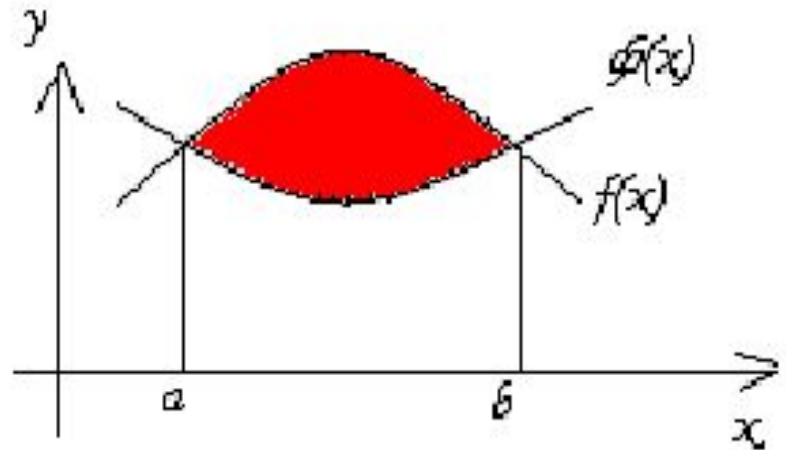
$$S = \int_a^c f(x)dx + \left| \int_c^d f(x)dx \right| + \int_d^b f(x)dx$$





---

г) 
$$S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx$$



2) интеграл от

$$A = \int_a^b F(x) dx$$

величины силы по длине пути.



---

$N(t)$  прирост численности за промежуток времени от  $t_0$  до  $T$ ,  $v(t)$  – скорость роста некоторой популяции.

интеграл от скорости

$$N(t) = \int_{t_0}^T v(t) dt$$

по интервалу времени ее размножения.

