Определенный интеграл, его основные свойства.

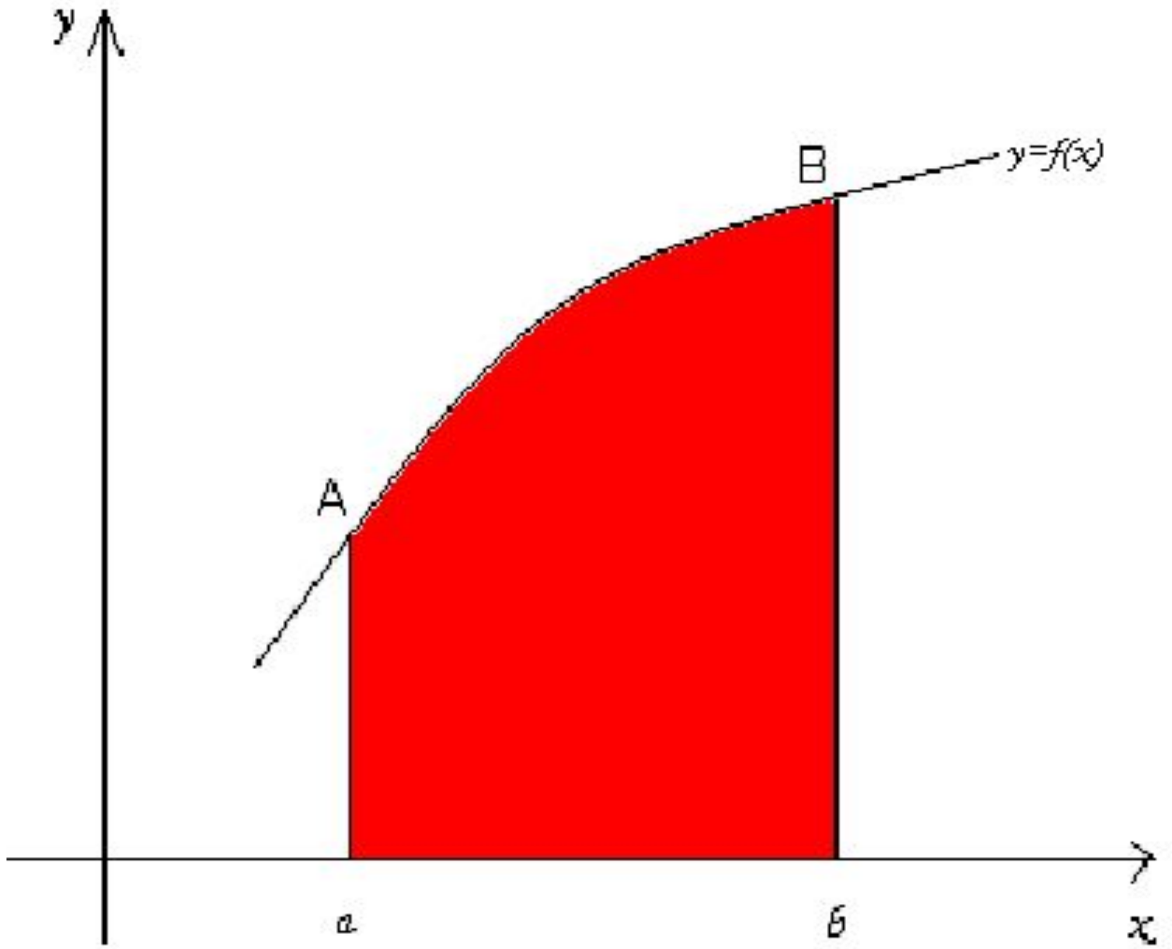
Формула Ньютона- Лейбница. Приложения определенного интеграла.

- К понятию определенного интеграла приводит задача нахождения площади криволинейной трапеции.
- Пусть на некотором интервале [a,b] задана непрерывная функция $y = f(x) > 0$

Задача:

Построить ее график и найти F площадь фигуры, ограниченной этой кривой, двумя прямыми x = a и x = b, а снизу – отрезком оси абсцисс между точками x = a и x = b.

криволинейной трапецией



Def.

- Под определенным интегралом от данной непрерывной функции f(x) на данном отрезке [a;b] понимается соответствующее приращение ее первообразной, то есть $\int_a^b f(x)dx$
- Числа a и b – пределы интегрирования, [a;b] – промежуток интегрирования.

$$F(b) - F(a) = F(x)\,/_a^b$$

- Определенный интеграл равен разности значений первообразной подынтегральной функции для верхнего и нижнего пределов интегрирования.
- Введя обозначения для разности

$$F(b) - F(a) = F(x)/_a^b$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона – Лейбница.

Выдающийся немецкий мыслитель Готфрид Вильгельм Лейбниц принадлежал к роду, известному своими учеными и политическими деятелями. Он изобретал всевозможные универсальные приемы для решения всех задач сразу и, может быть, поэтому вслед за Паскалем стал строить вычислительные

Английский физик и математик, создатель теоретических основ механики и астрономии. Он открыл закон всемирного тяготения, разработал (наряду с Г. Лейбницем) дифференциальное и интегральное исчисления, изобрел зеркальный телескоп и был автором важнейших экспериментальных работ по оптике. Ньютона по праву считают создателем "классической физики".

1)Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

где x и t – любые буквы.

2)Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

3) При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на обратный

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\left[F(a) - F(b)\right] = -\int_b^a f(x)dx$$

(свойство аддитивности)

4) Если промежуток [a;b] разбит на конечное число частичных промежутков, то определенный интеграл, взятый по промежутку [a;b], равен сумме определенных интегралов, взятых по всем его частичным промежуткам.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5) Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

6) Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

где $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta), \varphi(t) \in [a;b]$

для $t \in [\alpha;\beta]$, функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на $[\alpha;\beta]$.

Пример: $\int_1^5 \sqrt{x-1}dx =$

x	1	5
t	0	4

$x - 1 = t$

$dt = dx$

$$= \int_0^4 \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big|_0^4 = \frac{2}{3}\cdot 4\cdot 2 - 0 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

Пример

Задача 1 Вычислить интеграл $\int_0^1 (x-1)\,dx$.

▶ Одной из первообразных функции $x-1$ является функция $\frac{x^2}{2}-x$. Поэтому $\int_0^1 (x-1)\,dx = \left(\frac{1^2}{2}-1\right) - \left(\frac{0^2}{2}-0\right) = \frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2}$. ◁

При вычислении интегралов удобно ввести следующее обозначение:

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

Тогда формулу Ньютона — Лейбница можно записать в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Пример

Задача 2 Вычислить интеграл $\int_{-a}^{a} \sin x\,dx$.

▶ $\int_{-a}^{a} \sin x\,dx = (-\cos x)\Big|_{-a}^{a} = (-\cos a) - (-\cos(-a)) =$

$= -\cos a + \cos(-a) = 0$, так как $\cos(-a) = \cos a$. ◁

Пример

Задача 3 Вычислить интеграл $\int_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx.$

$$\blacktriangleright \int_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx = \int_{-1}^{3}(2x+3)^{-\frac{1}{2}}dx = (2x+3)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{3} =$$

$$= (2\cdot 3+3)^{\frac{1}{2}} - (2\cdot(-1)+3)^{\frac{1}{2}} = 3-1 = 2. \ \lhd$$

Вычислить интеграл

1) $\int_0^1 x\,dx$; 2) $\int_0^3 x^2\,dx$; 3) $\int_{-1}^2 3x^2\,dx$; 4) $\int_{-2}^3 2x\,dx$;

5) $\int_2^3 \frac{1}{x^2}\,dx$; 6) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx$; 7) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$; 8) $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

Вычислить интеграл

1) $\int_{1}^{e} \frac{1}{x} dx;$

2) $\int_{0}^{\ln 2} e^{x} dx;$

3) $\int_{-\pi}^{2\pi} \cos x dx;$

4) $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin x dx;$

5) $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin 2x dx;$

6) $\int_{-3\pi}^{0} \cos 3x dx.$

Вычислить интеграл

1) $\int_{-3}^{2}(2x-3)\,dx$; 2) $\int_{-2}^{-1}(5-4x)\,dx$; 3) $\int_{-1}^{2}(1-3x^2)\,dx$;

4) $\int_{-1}^{1}(x^2+1)\,dx$; 5) $\int_{0}^{2}(3x^2-4x+5)\,dx$.

Вычислить интеграл

1) $\int\limits_0^4 (x - 3\sqrt{x})dx;$ 2) $\int\limits_1^9 \left(2x - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx;$

3) $\int\limits_0^2 e^{3x}dx;$ 4) $\int\limits_1^3 2e^{2x}dx.$

Неопределенный интеграл

Def: Пусть функция f(x) определена на бесконечном интервале [a; + ∞) и интегрируется на любом интервале [a;b], где b < + ∞. Если существует

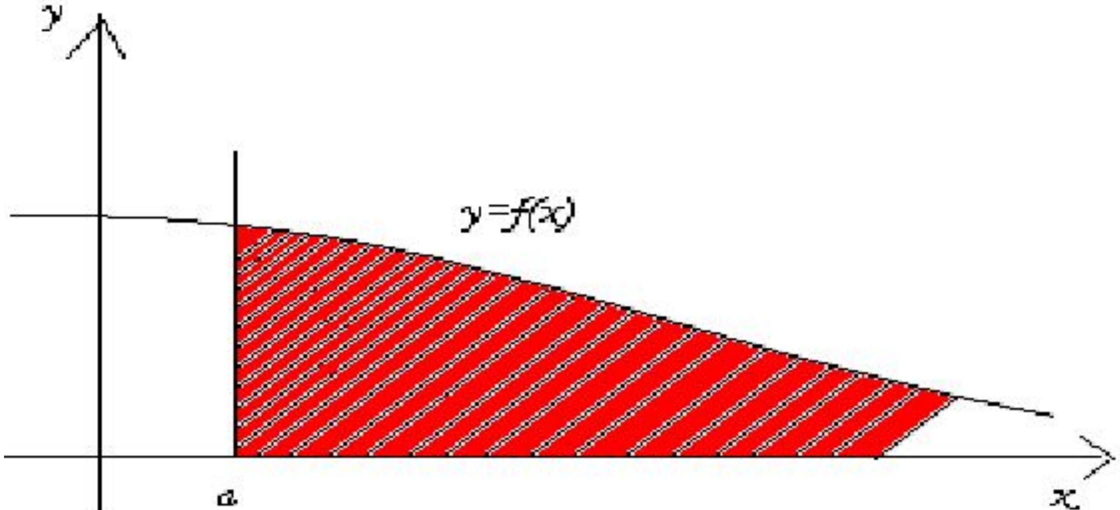
$$, \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

то этот предел называется несобственным интегралом функции *f(x)* на интервале

[a; + ∞) и обозначается $\int_a^{+\infty} f(x)dx.$

- Таким образом, по определению,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}(F(b)-F(a))$$



которое

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

щимся, если

н ∞, то говорят, что интеграл **расходится**.

Французский математик, механик и физик. В 1811 он вывел получившее широкое применение уравнение, связывающее электрический потенциал с плотностью пространственного распределения заряда (уравнение Пуассона).

Интеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx$$

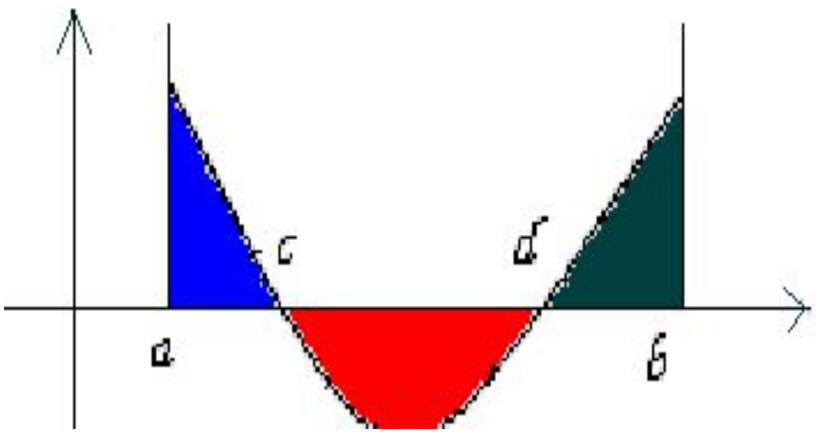
- если а = 1, то $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$
- Интеграл сходится, и его значение $= \sqrt{\pi}$

1) Площадь плоских фигур.

а) если $f(x) \geq 0 \Rightarrow S = \int_a^b f(x)dx$

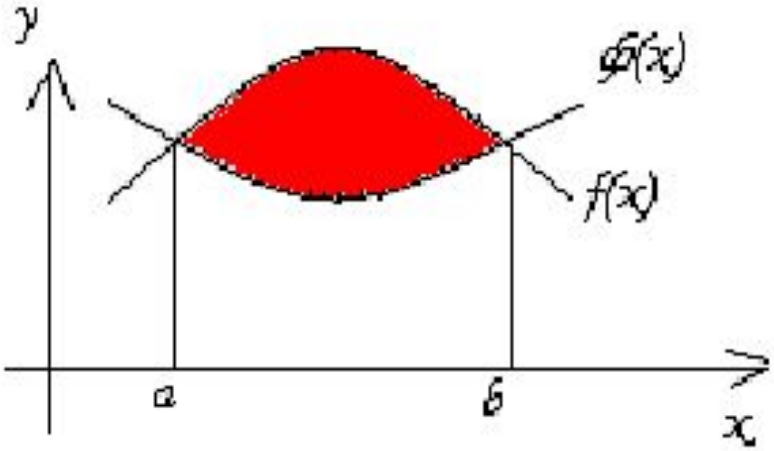
б) если $f(x) < 0 \Rightarrow S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

в)



$$S = \int_a^c f(x)dx +$$
$$+ \left|\int_c^d f(x)dx\right| + \int_d^b f(x)dx$$

г) $S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx$



2) интеграл от

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

величины силы по длине пути.

N(t) прирост численности за промежуток времени от t_0 до T, v(t) – скорость роста некоторой популяции.

интеграл от скорости

$$N(t) = \int_{t_0}^{T} v(t)dt$$

по интервалу времени ее размножения.