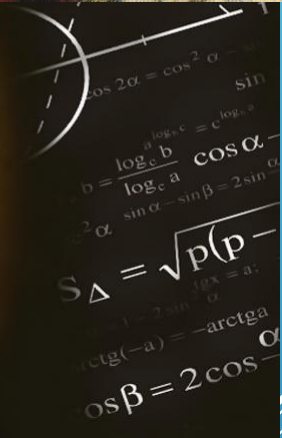
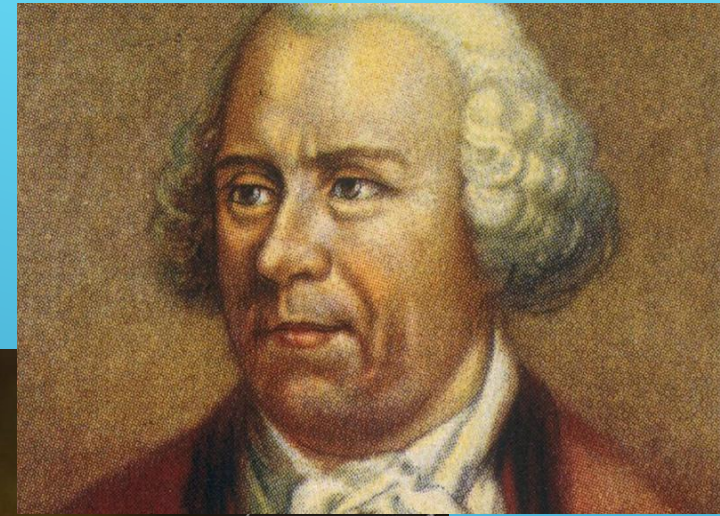
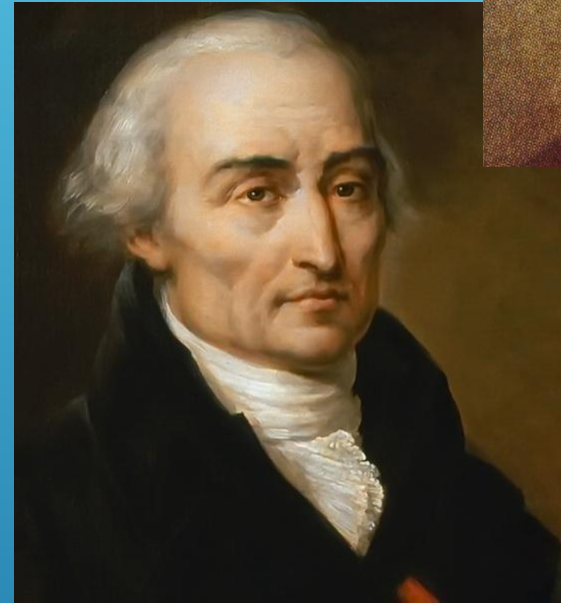


# **МЕТОД СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НЕГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИКИ В ЗАДАЧЕ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА**

**к.м.н. Котлов Вадим Михайлович  
ГОС НИИ ААЭС г. Москвы**

**Зарождение динамики неголономных систем, по-видимому, следует отнести к тому времени, когда аналитический формализм, созданный трудами Л. Эйлера и Ж. Лагранжа, оказался, к всеобщему удивлению, неприменимым к очень простым механическим задачам о качении без проскальзывания твердого тела по плоскости.**

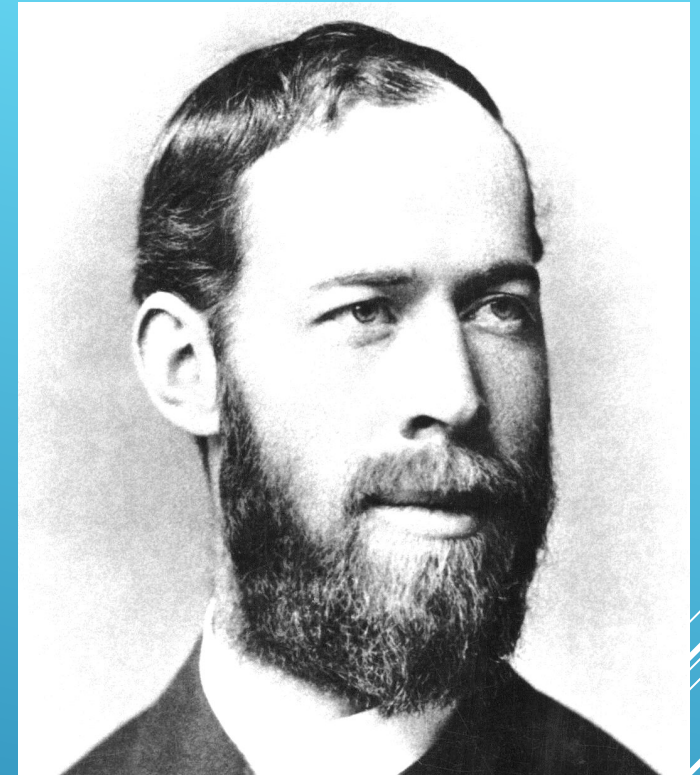


**Только в 1894 г.**

**в книге «Принципы механики,  
изложенные в новой связи»**

**(через 106 лет после труда  
Лагранжа «Аналитическая  
механика» в 1788 году)**

***Генрих Герц* ввел разделение  
связей и механических систем на  
**голономные и неголономные****



**Достаточно полное изложение задач и методов неавтономной механики представлено в монографии Ю. И.Неймарка, Н.А.Фуфаева "Динамика неавтономных систем" 1967г.**

**К настоящему времени динамика неавтономных систем оформлена как самостоятельная часть общей динамики механических систем-находит широкое применение в задачах современной техники, таких как движения автомобиля, самолетного шасси, железнодорожного колеса.**

**А методы активно используются в теории электрических машин**

# УСЛОВИЯ ГОЛОНОМНЫЕ И НЕГОЛОНОМНЫЕ.

Условия (они же ограничения), накладываемые на движение механической системы разделяют как

***потенциальные:***

накладываются на координаты

$$(1) \quad f[x, y] = 0$$

так и ***кинематические:***

накладываются на скорости (или компоненты скорости)

$$f[x, y, \dot{x}, \dot{y}] = 0$$

# УСЛОВИЯ ГОЛОНОМНЫЕ И

## НЕГОЛОНОМНЫЕ

Задача учета кинематических связей в нелинейном виде не существует физически или, в случае **линейной** связи относительно **скоростей**

$$(2) a_1 [x, y] \dot{x} + a_2 [x, y] \dot{y} = 0$$

что позволяет эту связь записать через дифференциалы

$$d[x] / d[t] = \dot{x}, \quad d[y] / d[t] = \dot{y}$$

как

$$(3) a_1 [x, y] d[x] + a_2 [x, y] d[y] = 0$$

# УСЛОВИЯ ГОЛОНОМНЫЕ И НЕГОЛОНОМНЫЕ.

Если дифференциальную связь (3) нельзя записать как полный дифференциал некоторой функции, не равно

$$d[F[x, y]] \neq a_1[x, y] d[x] + a_2$$

То такая связь называется неинтегрируемой (неголономной), а механическая система с такой связью - **неголономной системой**. Соответственно, система со связью с координатами - **голономной**

# УСЛОВИЯ ГОЛОНОМНЫЕ И НЕГОЛОНОМНЫЕ.

Линейность связей по обобщенным скоростям является общим случаем механики (В.Ф. Журавлев).

Задача учета кинематических связей в нелинейном виде не существует физически или, в случае линейной связи относительно скоростей

$$(2) a_1 [x, y] x + a_2 [x, y] y = 0$$



# Методы составления уравнений динамики механической системы при наложении различных типов условий на переменные.

Для голономных связей: **два метода:**

1) использование функции связи **КАК НОВОЙ переменной-**  
( **приводит к уменьшению общего числа переменных**)

2) **метод «множителей Лагранжа»,**

(вводит условия через множители Лагранжа, которые физически представляют собой силы, обеспечивающие выполнение этих условий).

Методы составления уравнений динамики механической системы при наложении различных типов условий на переменные.

**СЧИТАЕТСЯ** что, **неголономные связи** допускают лишь второй способ составления уравнений динамики-метод множителей Лагранжа.

**ПОЛАГАЕТСЯ**, что уменьшение числа переменных здесь невозможно, потому что нет уравнений, с помощью которых можно бы выразить одни переменные через другие и приходится оперировать с большим количеством переменных, чем того требует число степеней свободы системы

# НОВЫЙ МЕТОД

**1) Эквивалентен методу Лагранжа №1-путем замены переменных на дифференциальные формы, задающие условия.**

**2) ПРЕДЛАГАЕТСЯ как замена переменных в интегральном инварианте динамики ,введенном А. Пуанкаре и Э.Д.Картаном апробирован на расчете механических задач неголономной механики классического типа**

# НОВЫЙ МЕТОД

Однако, способ уменьшения числа переменных вводя кинематические условия как новые переменные давно введена в механику А. Пуанкаре и Э. Картаном.

Картаном введена математическая конструкция , названная им *интегральный инвариант динамики второго порядка (либо тензор "количество движения- энергии")*

# НОВЫЙ МЕТОД

Указанное выражение получается совершенно естественно при вычислении вариации интеграла действия Гамильтона; в современных обозначениях:

$$d\Omega = d[x_1] \wedge d[x] - d[H] \wedge d[t]$$

где

$\wedge$ - внешнее умножение дифференциалов

$x$ - координата

$x_1$ - скорость,

$H=T+U$ - гамильтониан,

$t$ - время

## НОВЫЙ МЕТОД

Поскольку из этого дифференциального инварианта следует система уравнений движения - любой механической системы, а сам дифференциальный инвариант состоит из дифференциальных форм, то введение условий как на сами кинематические переменные, так на их дифференциалы могут быть проведены в рамках самого интегрального инварианта

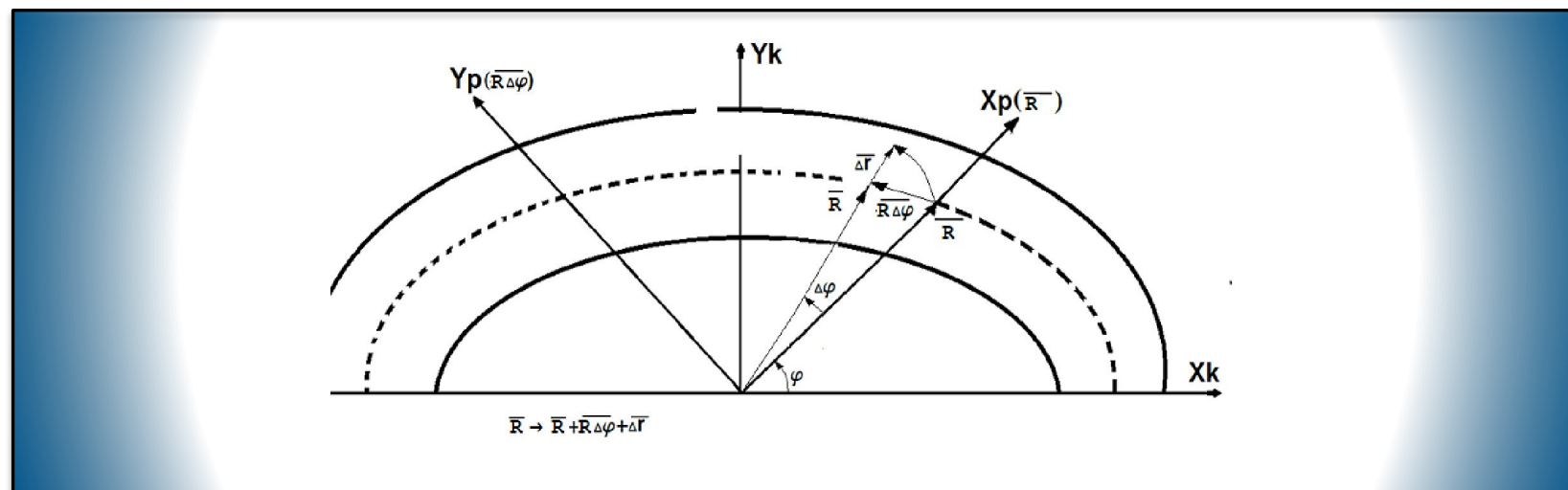
# НОВЫЙ МЕТОД

В этом случае использование интегрального инварианта механике по Картану, введение ограничений на переменные механической системы (как **ГОЛОНОМНЫХ**, так и **НЕГОЛОНОМНЫХ**) приводит к уменьшению числа независимых переменных.

**Таким образом** применение интегрального инварианта механики соответствует способу введения ограничений на кинематические (как **ГОЛОНОМНЫХ**, так и **НЕГОЛОНОМНЫХ**), как новых переменных, приводящих к уменьшению числа независимых переменных.

# Применение нового метода к составлению уравнений механических движения волнового твердотельного гироскопа ( по В.Ф. Журавлеву, Д.М. Климову )

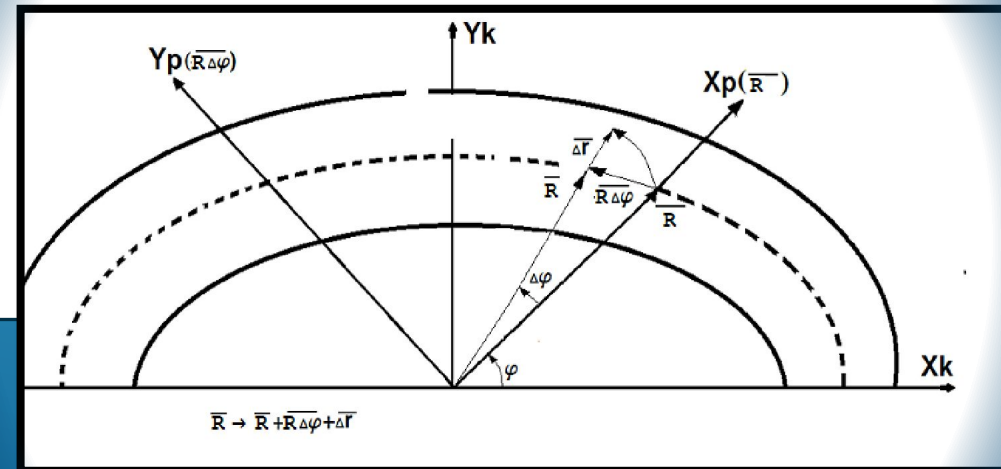
Волновой твердотельный гироскоп (1985года )  
упругое гибкое кольцо





$$L = \frac{1}{2} \left( (v_1 + (R-w) \Omega)^2 + (w_1 + v \Omega)^2 \right) - \frac{1}{2} \kappa_1^2 (w_{SS} + v_S)^2 - \left( \frac{1}{2} \right) \delta_1^2 (v_S - w)^2$$

условие нерастяжимости средней линии кольца

$$(v_S + R - w)^2 + (w_S + v)^2 = R^2$$


применение нового метода дало

основные соотношения:

$$\begin{aligned} & d^{\circ} S I D^{\circ} u s - 1 / \Omega^2 \left( - (1 / 2) d [\Omega^2 r \psi^2 + \Omega^2 \right. \\ & \left. v \psi^2] + \left( (R+r)^2 + v^2 \right) d [\Omega^2 / 2] \right) \wedge d [\psi] \wedge d [\varphi] \\ & 1 / \Omega^2 \left( 1 / 2 d [\Omega^2 r \psi^2 + \Omega^2 v \psi^2] - \left( (R+r)^2 + v^2 \right) \right. \\ & \left. d [\Omega^2 / 2] \right) \wedge d [\psi] \wedge d [\varphi] + \kappa 1^2 d [r+r s s] \wedge (d [R \\ & Q] - (r+r s s) d [\varphi]) \wedge d [t] = 0 \end{aligned}$$

В рамках приближений введенных авторами книги  
 (применение к полученным уравнениям упрощение

$v' - w - > 0$  (линеаризация) условия нерастяжимости  
 средней линии),  
 тогда выходит, что

$$\Pi_2 = 1/2 \kappa_1^2 (-r s s + v s)^2$$

не влияет, значит остается только влияние  
 кинетической энергии, искаженной условием  
 нерастяжимости !!!

$$(1/2 \ d[\Omega^2 \ r\psi^2 + \Omega^2 \ v\psi^2] - ((R+r)^2 + v^2) \ d[\Omega^2/2]) \ \Lambda d[\psi] \ \Lambda d[\varphi] = 0$$

однако у Вас при выводе уравнений динамики кольца учитывается только

первое соотношение :

$$v' - w = 0$$

второе соотношение  $w' + v = 0$  опускается ввиду его малости влияния на условие нерастяжимости срединной линии кольца.

интересно сравнить с:

$$v_s + R \cdot \omega \rightarrow R \cos[Q], \quad -\omega s - v \rightarrow R \sin[Q]$$

получается, что при малом  $Q$ , данные соотношения зависят от  $Q$

$$v_s - \omega \rightarrow -R Q^2/2, \quad -\omega s - v \rightarrow R Q$$

т.е., при малом  $Q$  соотношение  $v' - \omega$  заведомо выполняется как второго порядка малости, а соотношение  $\omega' + v$  может зависеть в первом порядке малости  $Q$ .

$$U_s = \{ r_s \rightarrow v + R \sin[Q], d[r] \rightarrow d[\varphi] (v + R \sin[Q]), v_s \rightarrow -r - R (1 - \cos[Q]), d[v] \rightarrow (-r - R (1 - \cos[Q])) d[\varphi] \}$$

## ВЫВОД

Эффект инертных свойств упругой деформацией гибкого кольца следует из уравнений кольца и в случае когда потенциальной энергией можно пренебречь.

В рамках приближений введенных авторами книги, влияние нерастяжимости средней линии гибкого кольца для потенциальной энергии приводит к пренебрежению ее изменений.

Следовательно, остается только влияние кинетической энергии, искаженной условием нерастяжимости

# ВЫВОД

$$\begin{aligned} 1/2 \, d[\Omega^2 r^2 + \Omega^2 v^2] - ((R+r)^2 + v^2) \, d[\Omega^2/2] &= 0 \\ ((R+r)^2 + v^2) \, d[\Omega^2/2] &= 1/2 \, d[r^2 + v^2] \end{aligned}$$

уравнению термодинамики :

$$\begin{aligned} T \, dS &= dU + P \, dV \\ T \, dS &= dQ - \text{поток тепла} \\ d[S] &= dQ/T \end{aligned}$$

где

$\Omega^2/2$ -подобна энтропии,  $(r^2+v^2)$ -подобна температуре

Котлов Вадим Михайлович  
vadimkot366@yandex.ru

