

Задачи на готовых чертежах

ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К

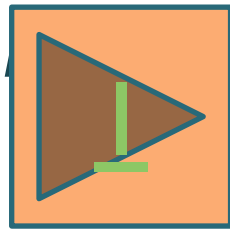
ЕГЭ



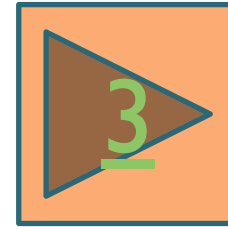
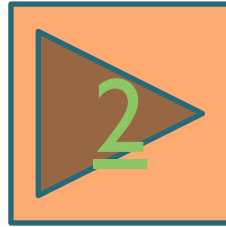
Учитель математики
МБОУ СОШ №1
Вольно-Надеждинское
Приморский край
Пентяшкина Татьяна Петровна



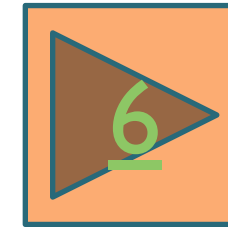
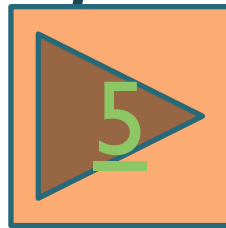
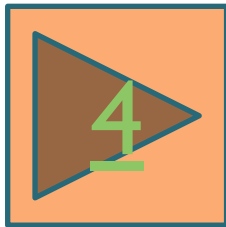
1. Угол между двумя



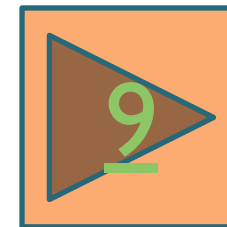
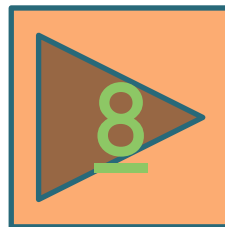
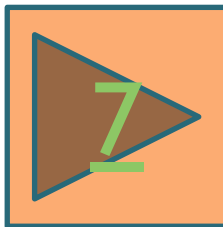
ЫМИ:



2. Угол между прямой плоскостью:



3. Угол между плоскостями:





Угол между двумя прямыми:

1. В правильной
треугольной призме
 $ABCA_1B_1C_1$, все ребра
которой равны 1 найти
угол между прямыми AC

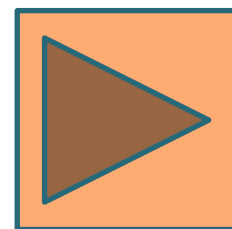
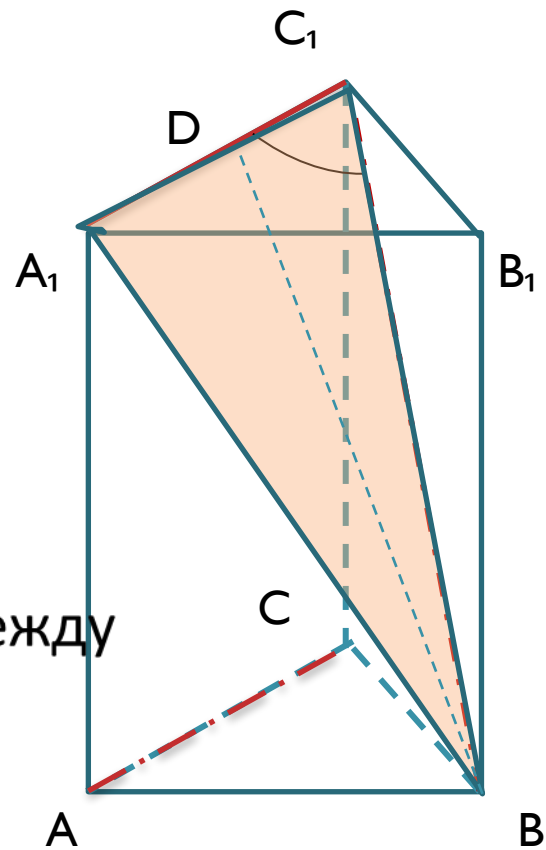
Решение:

Угол между прямыми AC и BC_1 равен углу между
прямыми BC_1 и A_1C_1 . Пусть $\angle A_1C_1B = \alpha$.

Так как призма правильная, то $A_1B = C_1B$ как диагонали равных
квадратов (по условию все ребра призмы равны 1).

Значит, $\triangle A_1BC_1$ - равнобедренный.

Проводим высоту BD





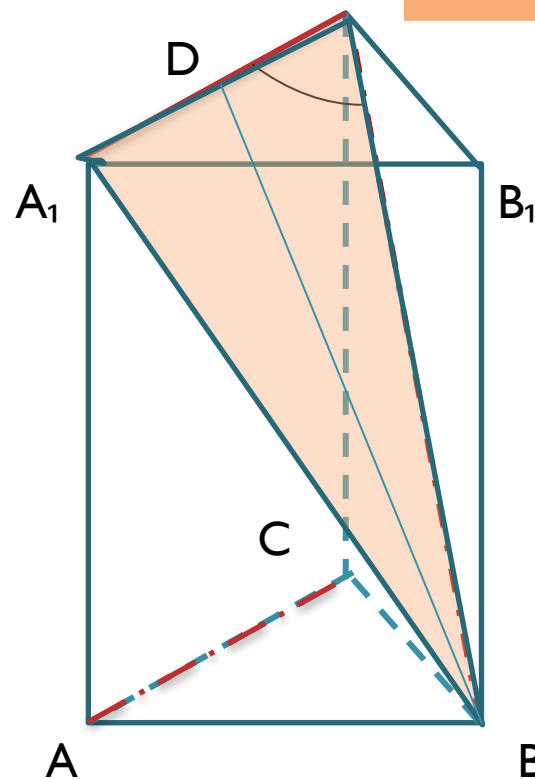
Угол между двумя прямыми:



$$\text{В } \triangle BDC_1 \quad DC_1 = \frac{1}{2} A_1C_1 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle C_1B_1B \quad BC_1^2 = 1+1=2; \quad BC_1 = \sqrt{2}.$$

$$\text{Тогда } \cos \alpha = \frac{DC_1}{BC_1} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$



$$\text{Ответ: } \alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$$



Угол между двумя

ПРЯМЫМИ:

2. В единичном кубе $A...D_1$ найти угол

между прямыми BB_1 и A_1C .

Заметим, что угол между прямыми BB_1 и A_1C равен углу между прямыми AA_1 и

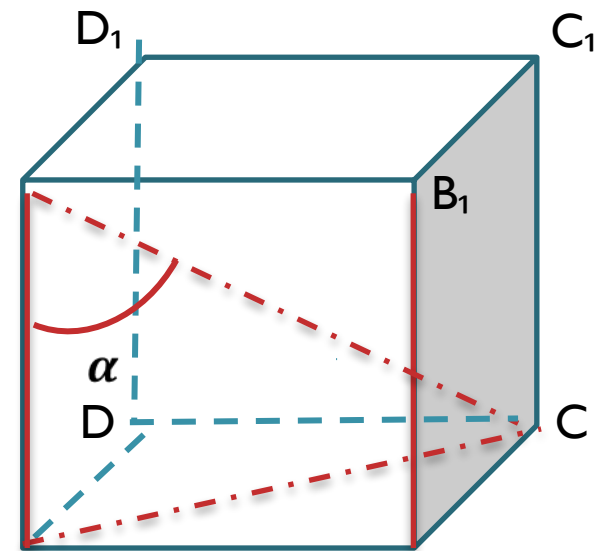
AC . Пусть $\angle AA_1C = \alpha$, тогда из

$\triangle AA_1C$ ($\angle AA_1C = 90^\circ$) имеем $\cos \alpha = \frac{AA_1}{A_1C}$,

где $AA_1 = 1$, A_1C – диагональ куба.

По свойству прямоугольного параллелепипеда, имеем

$AC^2 = AB^2 + BC^2 + AA_1^2$, или $A_1C = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3} = \sqrt{3}$, где $a = 1$.



Тогда $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда

$$\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

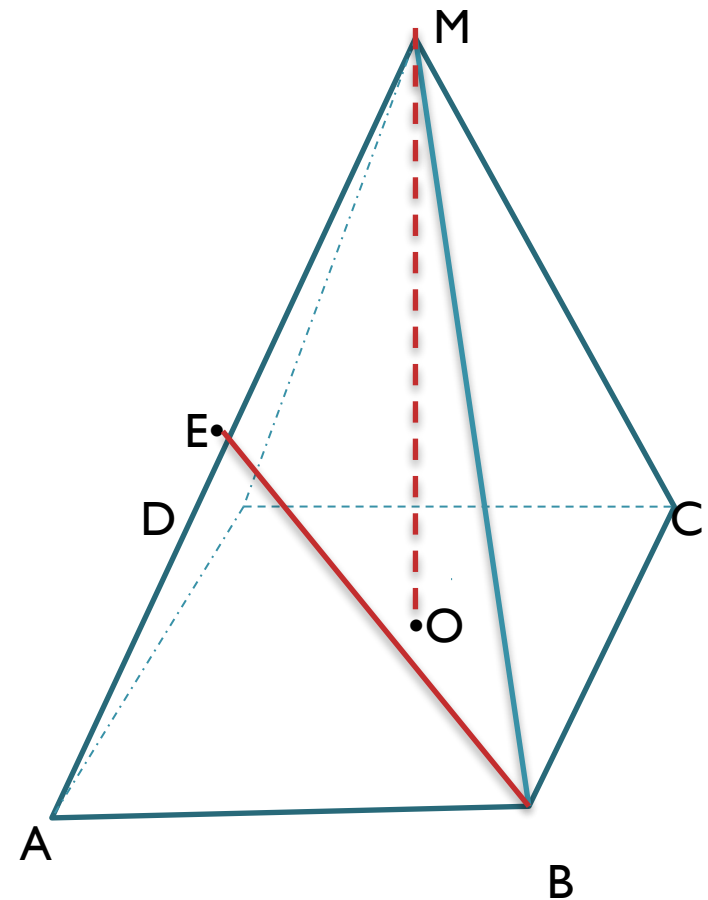


Угол между двумя



прямыми:
Решите задачу:

3. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны l , найти угол между прямыми MO и BE , где точка E – середина ребра AM .





Угол между двумя



Решение: **ПРЯМЫМИ:**

Проведу диагонали основания.

Из точки E – середины AM опускаем перпендикуляр EK на плоскость $ABCD$.

EK – средняя линия $\triangle AOM$. Так как высота $MO \perp (ABC)$ и $MO \parallel EK$, то $EK \perp (ABC)$, значит, $EK \perp BK$.

Поскольку $MO \parallel EK$, то угол между прямыми MO и медианой BE равен $\angle KEB = \alpha$.

Все ребра пирамиды равны 1 (по условию задачи), то из $\triangle ABE$, где $AB=1, AE=\frac{1}{2}, BE=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

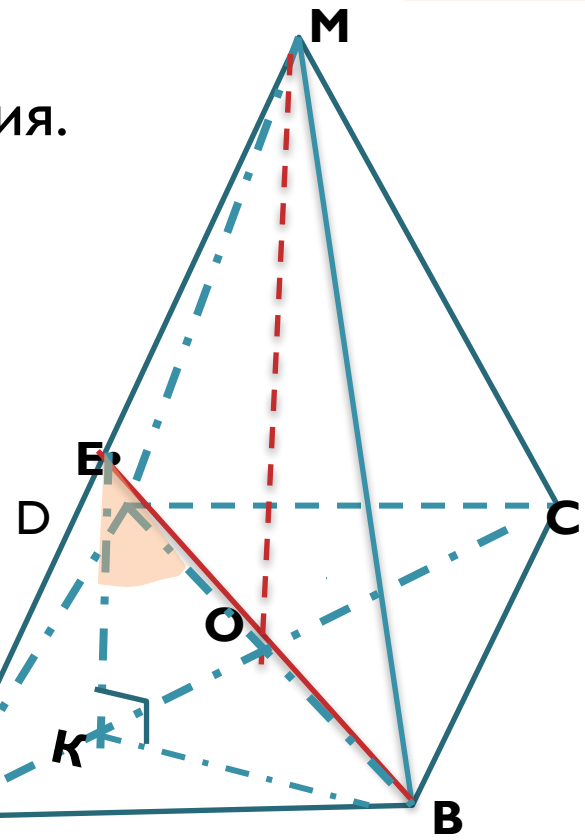
В $\triangle AOM$ $AO=MO$, тогда $AO^2+MO^2=AM^2$, или $2AO^2=1, AO^2=\frac{1}{2}$,

$$AO=MO=\frac{1}{\sqrt{2}}, KE=\frac{1}{2}MO=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Искомый угол из $\triangle EKB$

$$\cos \alpha = \frac{KE}{BE} = \frac{1}{2\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{6}}$$





Угол между прямой и плоскостью:



4. В правильной четырехугольной призме

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, стороны основания которой равны 2, а боковые ребра

равны 4, найти угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 .

Проведем диагонали AC и BD основания.

Пусть O - точка пересечения диагоналей. Заметим, что AO перпендикулярен, опущенный из точки A на плоскость BDD_1 .

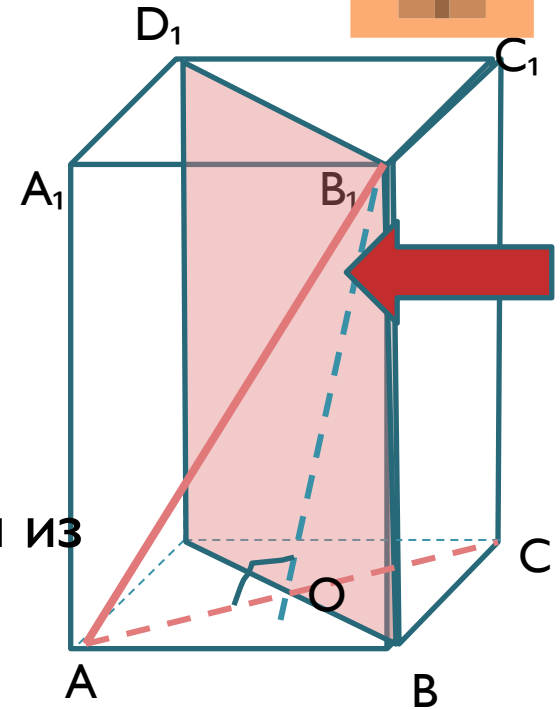
Тогда $\angle AB_1 O$ есть угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1

В прямоугольном $\triangle AB_1 O$ $AO = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2}$ или $AB_1 = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$,

тогда $\sin \angle AB_1 O = \frac{AO}{AB_1} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

$$\angle AB_1 O = \arcsin \frac{\sqrt{10}}{10}$$





Угол между прямой и плоскостью

5. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1 .

Обозначим точку M -
пересечение прямых F_1C_1 и B_1D_1 .

Проведем BM

Далее, из точки B_1 опустим
перпендикуляр B_1N на прямую BM .

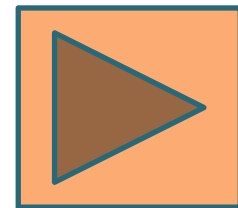
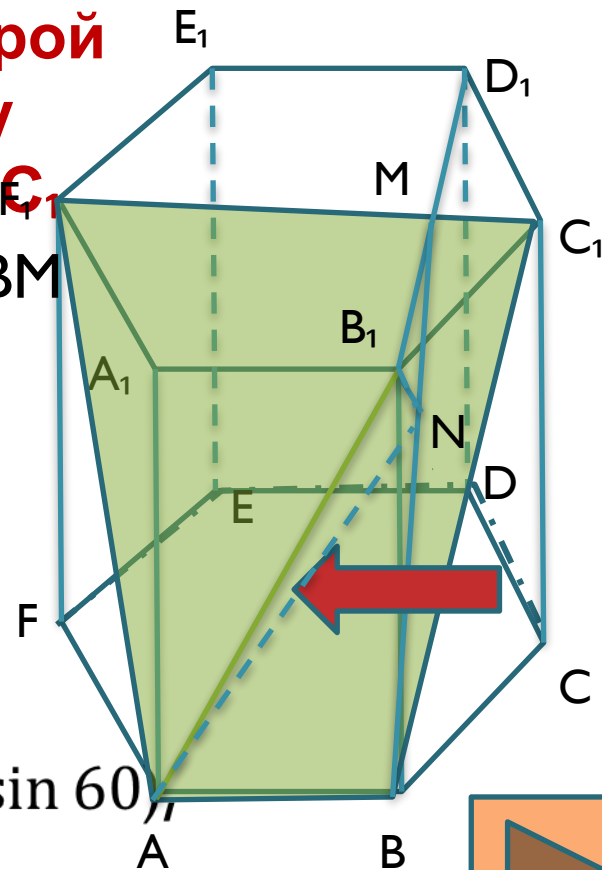
Тогда $\angle B_1AN = \alpha$ - искомый угол между
прямой AB_1 и плоскостью ABC_1 .

В прямоугольном $\triangle BB_1M$ известно: $BB_1 = 1$

(по условию), $B_1M = \frac{1}{2} B_1D_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($B_1D_1 = 2 \cdot D_1C_1 \sin 60^\circ$)

тогда $BM = \sqrt{BB_1^2 + B_1M^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Заметим, что $\triangle B_1NM \sim \triangle BB_1M$ (прямоугольные,
имеющие общий $\angle B_1MN$).





Угол между прямой и



плоскостью

В прямоугольном $\triangle BB_1M$ известно: $BB_1=1$

(по условию), $B_1M = \frac{1}{2} B_1D_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

($B_1D_1 = 2 \cdot D_1C_1 \sin 60$), тогда

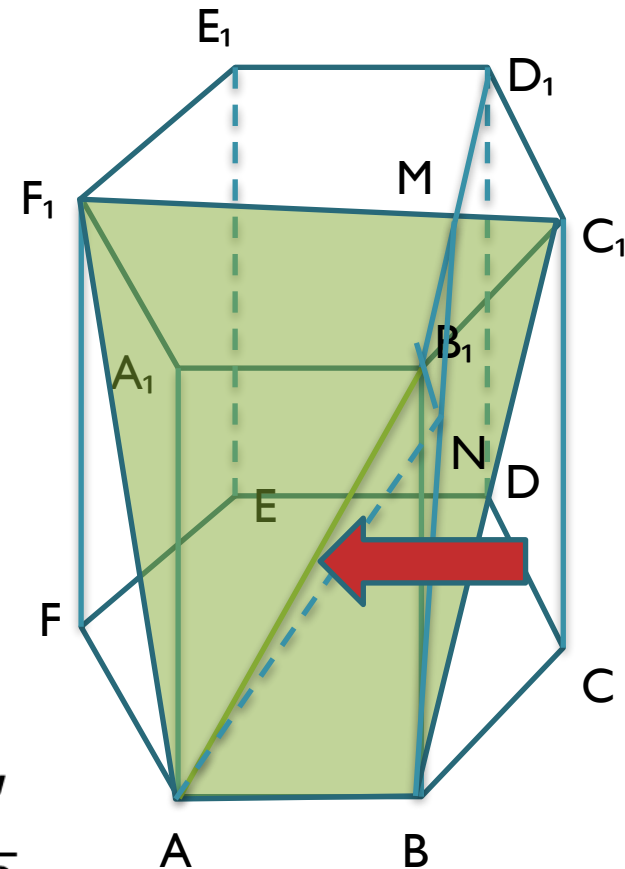
$$BM = \sqrt{BB_1^2 + B_1M^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

- Заметим, что $\triangle B_1NM \sim \triangle BB_1M$ (прямоугольные, имеющие общий $\angle B_1MN$).

Имеем $B_1N = \frac{\sqrt{21}}{7}$ (из пропорции $\frac{B_1M}{BM} = \frac{B_1N}{BB_1}$,

$B_1N = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 : \frac{\sqrt{7}}{2}$). Так как $AB_1 = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, то

из $\triangle AB_1N$ $\sin \alpha = B_1N : AB_1 = \frac{\sqrt{42}}{14}$.



$$\alpha = \arcsin \frac{3}{\sqrt{42}}$$

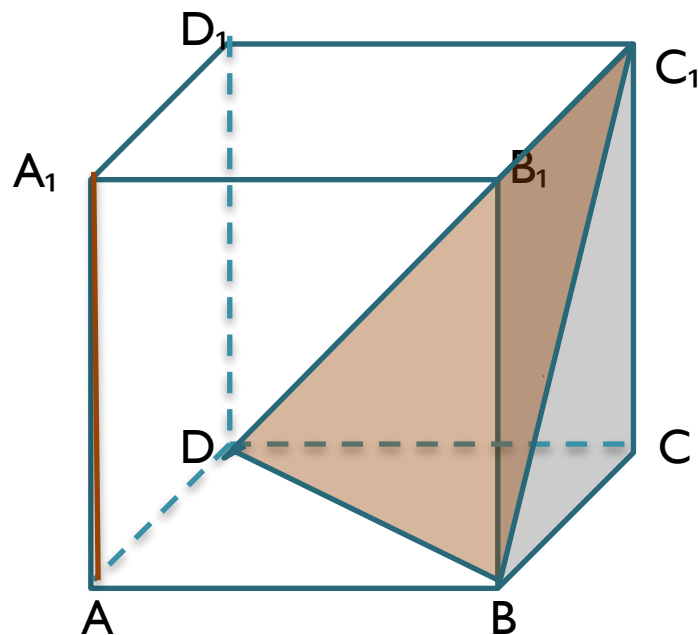


Угол между прямой и

ПЛОСКОСТЬЮ:

Решите задачу:

6. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D .



ПОДСКАЗК

а





Угол между прямой и

ПЛОСКОСТЬЮ:

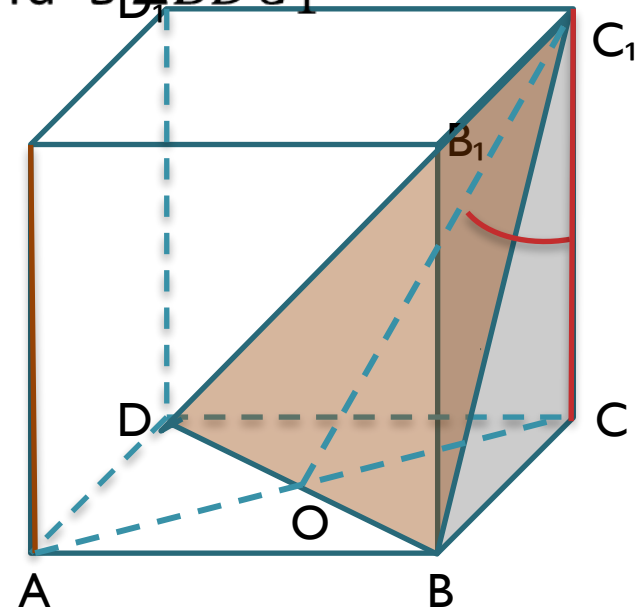
Диагонали DB и AC пересекаются в O . CC_1O – медиана, биссектриса, высота в $\triangle BDC_1$

Решение:

Угол между прямой AA_1 и плоскостью A_1BC_1D равен углу между прямой CC_1 и плоскостью BC_1D , т. е. $\angle OC_1C$.

В $\triangle OCC_1$ $CC_1=1$, $OC=R$ – радиус описанной окружности. Известно, что в правильном четырехугольнике со стороной a $a=R\sqrt{2}$, откуда $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$ или $OC = \frac{1}{\sqrt{2}}$, где $a=1$.

Из прямоугольного $\triangle OCC_1$ $\tan a = \frac{OC}{CC_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, где $a = \angle OC_1C$



$$a = \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$$



Угол между двумя плоскостями:



7. В правильной шестиугольной призме AF_1 , все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .

Проведу диагонали основания BE и FD

В плоскости BED_1 из точки D_1

• опустим

перпендикуляр D_1M на плоскость

основания. Диагональ BE проходит через

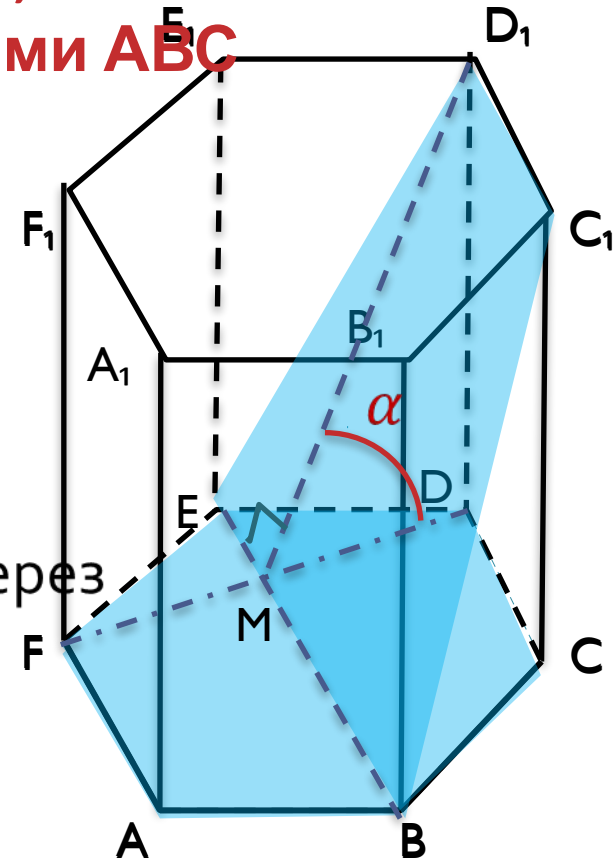
центр основания, то EM – медиана,

биссектриса и высота $\triangle FED$, точка M –

середина FD .

В прямоугольном $\triangle MDD_1$ имеем: $DD_1=1$,

$$MD = \frac{1}{2}FD = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ тогда } \operatorname{tg} \alpha = \frac{DD_1}{MD}, \text{ или } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$



Искомый угол

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}}$$



Угол между двумя плоскостями:

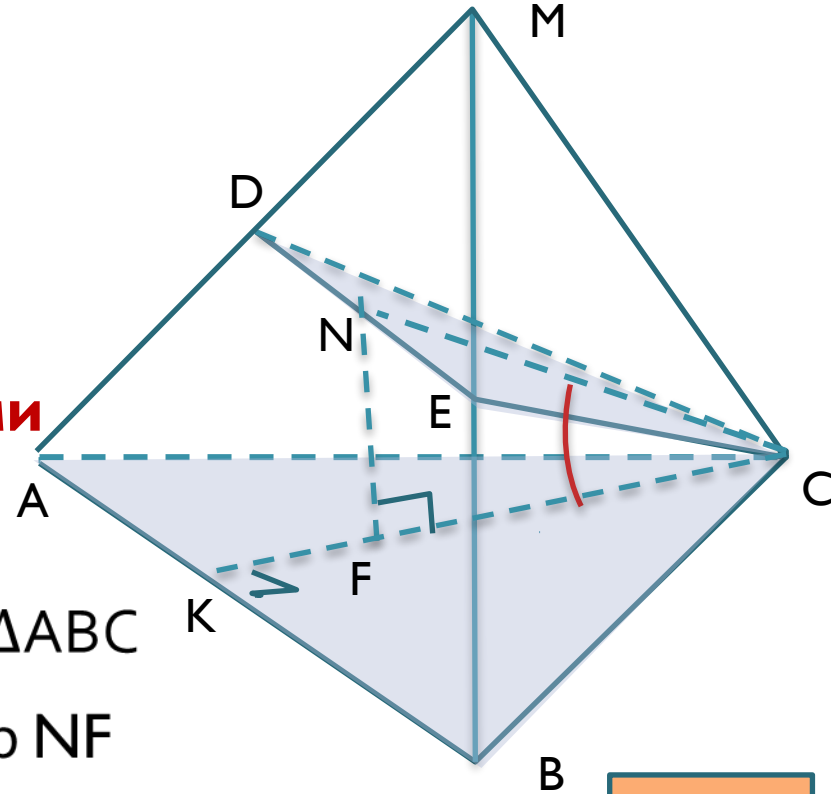
8. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC , точка D - середина MA , точка E - середина ребра MB .
Найдите угол между плоскостями CDE и ABC , если $MC=18$, $AB=12$.

Решение:

CK – медиана, биссектриса и высота $\triangle ABC$

Из точки N опустим перпендикуляр NF на плоскость основания $\triangle ABC$.

$NF \perp DE$ и $CN \perp DE$, значит, $\angle NCF$ - линейный угол между плоскостями CDE и ABC .





Угол между двумя плоскостями.

МО высота призмы.

$$\text{В } \triangle ABC \quad BC = OC \cdot \sqrt{3}, \quad OC = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

Из $\triangle МОС$ $МО =$

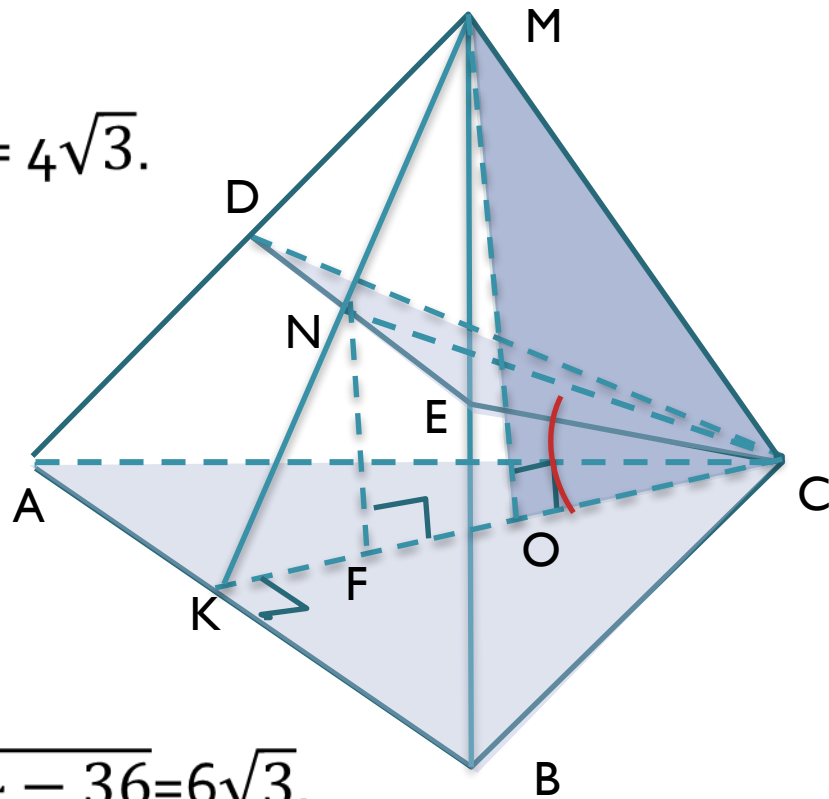
$$\sqrt{18^2 - (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{324 - 48} = 2\sqrt{69}.$$

$NF = \frac{1}{2}МО = \sqrt{69}$ - средняя линия $\triangle КОМ$.

Из $\triangle КСВ$, где $BC = 12$, $BK = 6$, $КС = \sqrt{144 - 36} = 6\sqrt{3}$.

Следовательно, $\operatorname{tg} \angle NCF = \frac{NF}{FC} = \frac{\sqrt{69}}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{23}}{5}$.

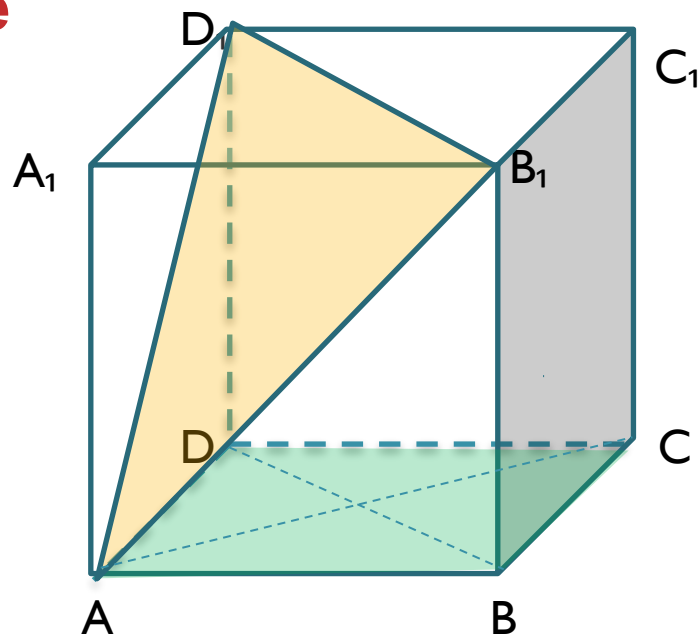
$$\angle NCF = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{23}}{5}.$$





Угол между двумя плоскостями

9. В кубе $A...D_1$ найдите углы между плоскостями между ABC и AB_1D_1 .





Угол между двумя плоскостями...



В кубе $A...D_1$ найдите углы между плоскостями между ABC и AB_1D_1 .

Решение:

Очевидно, что в единичном кубе $A...D_1$ плоскость $AB_1D_1 \parallel$ плоскости BC_1D , так как $BD = B_1D_1$, $AB_1 = DC_1$ и $AD_1 = BC_1$.

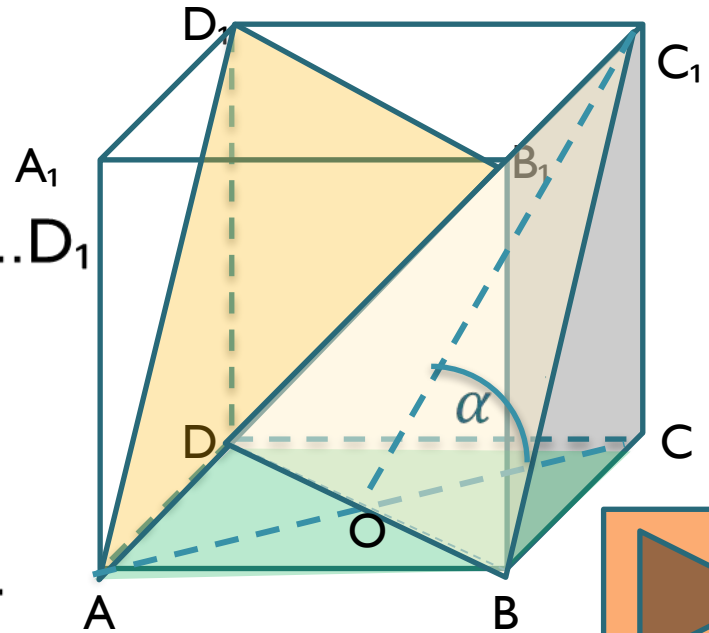
Пусть O – точка пересечения диагоналей AC и BD квадрата $ABCD$.

Тогда искомым линейным α углом между плоскостями ABC и плоскостью BC_1D ,

будет $\angle C_1OC = \alpha$

В ΔC_1OC ($\angle C = 90^\circ$), $CC_1 = 1$, $OC = R = \frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CC_1}{OC} = \sqrt{2}$$



$$\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$$



Литература.

1. **Атанасян Л.С. Геометрия: учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений.-М.: Просвещение, 2011.**
2. **Смирнова И.М., Смирнов В.А. Эффективная подготовка к ЕГЭ.
- М.: Экзамен, 2008**
3. **Рыбкин Н. Сборник задач по геом
Стереометрия для
9 и 10 классов.-М.: Просвещение, 19**

