Задачи на готовых чертежах для подготовки к ЕГЭ

Учитель математики
МБОУ СОШ№1
Вольно-Надеждинское
Приморский край
Пентяшкина Татьяна Петровна

1.Угол между двумя прямыми:

1 2 3

2.Угол между прямой плоскостью:

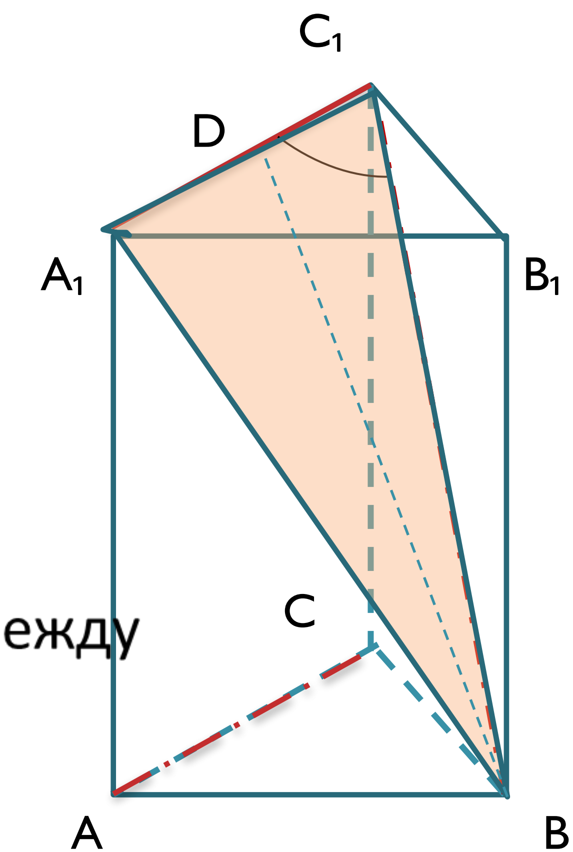
4 5 6

3. Угол между плоскостями:

7 8 9

Угол между двумя прямыми:

1. **В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны1найти угол между прямыми AC и BC_1.**



Решение:

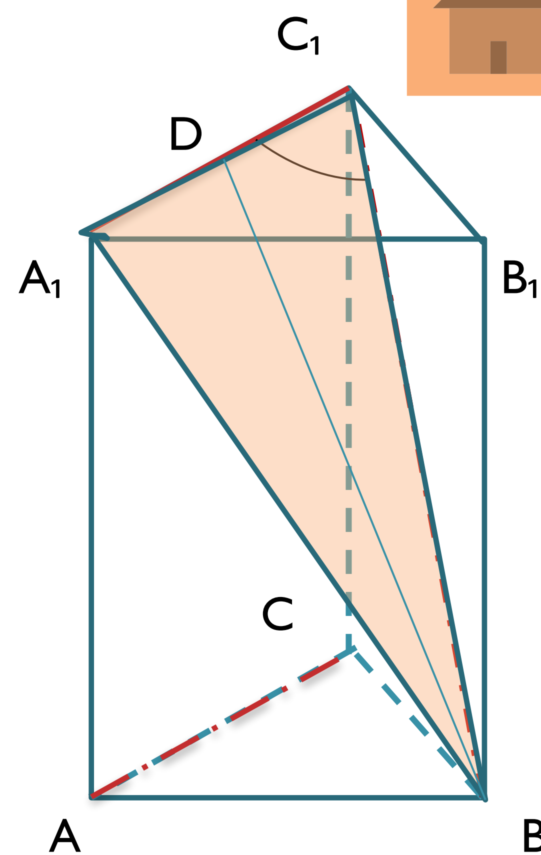
Угол между прямыми AC и BC_1 равен углу между прямыми BC_1 и A_1C_1. Пусть $\angle A_1C_1B=\alpha$.

Так как призма правильная, то $A_1B=C_1B$ как диагонали равных квадратов(по условию все ребра призмы равны 1).

Значит, ΔA_1BC_1- равнобедренный.

Проводим высоту BD

Угол между двумя прямыми:



В ΔBDC_1 $DC_1=\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{1}{2}$.

Из ΔC_1B_1B $BC_1^2=1+1=2;\ BC_1=\sqrt{2}$.

.

Тогда $\cos\alpha = \frac{DC_1}{BC_1} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

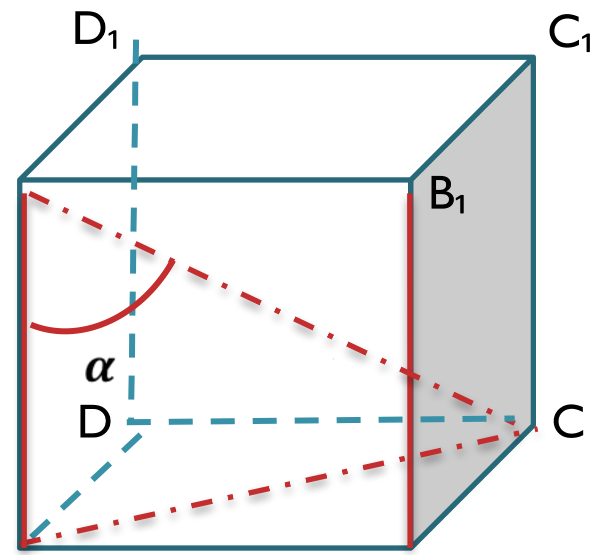
Ответ: $\alpha=\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$

.

Угол между двумя прямыми:

2.В единичном кубе $A\ldots D_1$ найти угол между прямыми BB_1 и A_1C.

Заметим, что угол между прямыми BB_1 и A_1C равен углу между прямыми AA_1 и A_1C.



Пусть $\angle AA_1C=\alpha$, тогда из $\Delta A_1AC(\angle A_1AC=90°)$ имеем $\cos\alpha=\frac{AA_1}{A_1C}$, где $AA_1=1$, A_1C – диагональ куба.

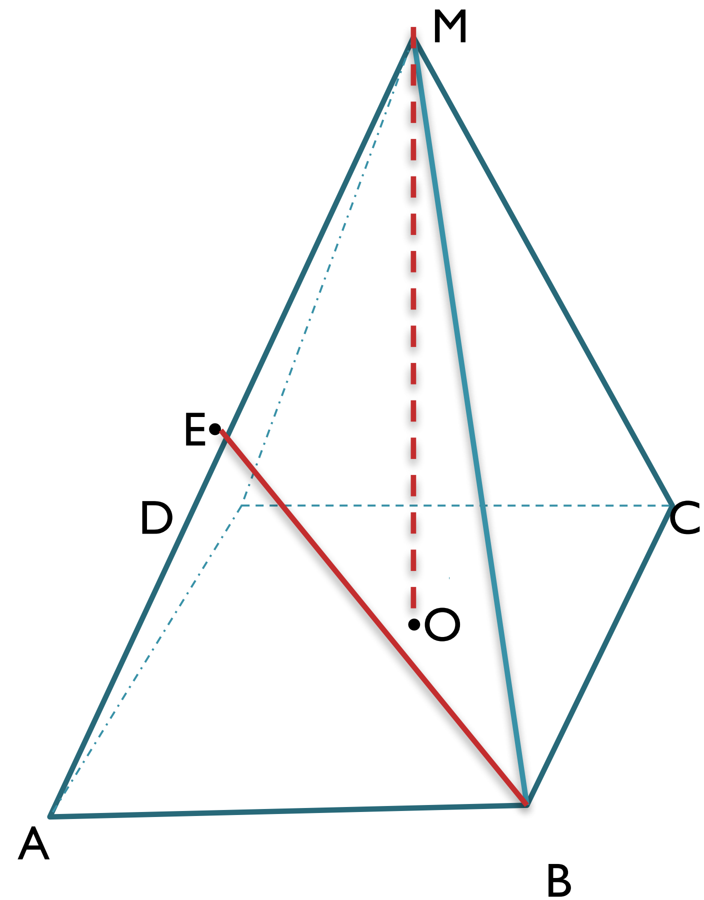
По свойству прямоугольного параллелепипеда, имеем $AC^2=AB^2+BC^2+AA_1{}^2$, или $A_1C=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=a\sqrt{3}=\sqrt{3}$, где a=1.

Тогда $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Угол между двумя прямыми:

Реши задачу:

3.В правильной четырехугольной пирамиде MABCD, все ребра которой равны 1, найти угол между прямыми MO и BE, где точка E – середина ребра AM.



Угол между двумя прямыми

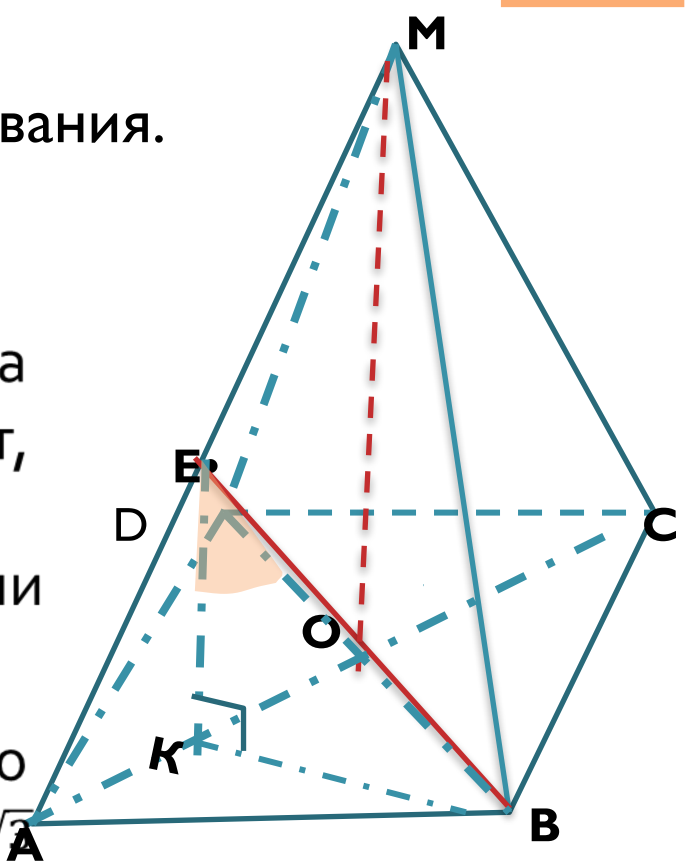
Решение:

Проведу диагонали основания.

Из точки E –середины AM опускаем перпендикуляр EK на плоскость ABCD.

EK – средняя линия ΔAOM. Так как высота MO⊥(ABC) и MO||EK, то EK⊥(ABC), значит, EK⊥BK.

Поскольку MO||EK, то угол между прямыми MO и медианой BE равен $\angle KEB=\alpha$.



Все ребра пирамиды равны 1(по условию задачи), то из ΔABE, где AB=1,$AE=\frac{1}{2}$, $BE=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

В ΔAOM AO=MO, тогда $AO^2+MO^2=AM^2$, или $2AO^2=1$, $AO^2=\frac{1}{2}$,

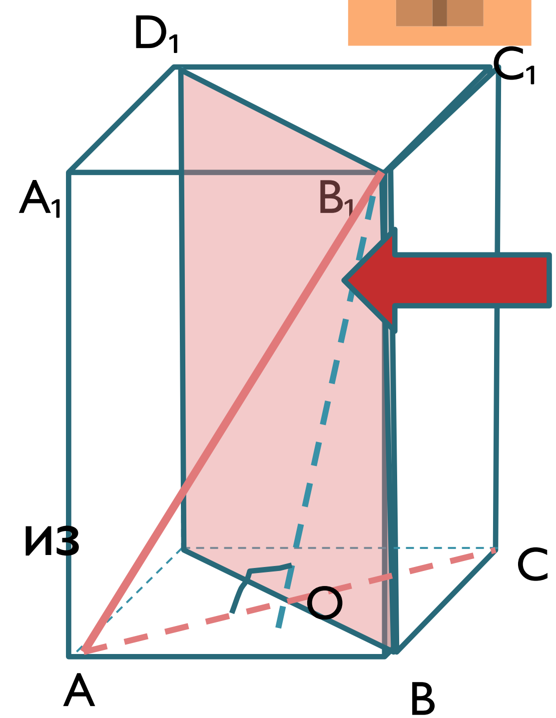
$AO=MO=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $KE=\frac{1}{2}MO=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Искомый угол из ΔEKB $\cos\alpha=\frac{KE}{BE}=\frac{1}{2\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

$\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$

Угол между прямой и плоскостью:

4.В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 2, а боковые ребра равны 4, найти угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.



Проведем диагонали AC и BD основания.

..Пусть O-точка пересечения диагоналей.

Заметим, что AO перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость BDD_1.

Тогда $\angle AB_1O$ есть угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1

В прямоугольном ΔAB_1O $AO=\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,

$AB_1= \sqrt{AB^2 + BB_1{}^2}$ или $AB_1=\sqrt{2^2 + 4^2}=2\sqrt{5}$,

тогда $\sin\angle AB_1O= \frac{AO}{AB_1} =\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} =\frac{\sqrt{10}}{10}$.

$$\angle AB_1O = \arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Угол между прямой и плоскостью

5.В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1

Обозначим точку M- пересечение прямых F_1C_1 и B_1D_1.

Проведу BM

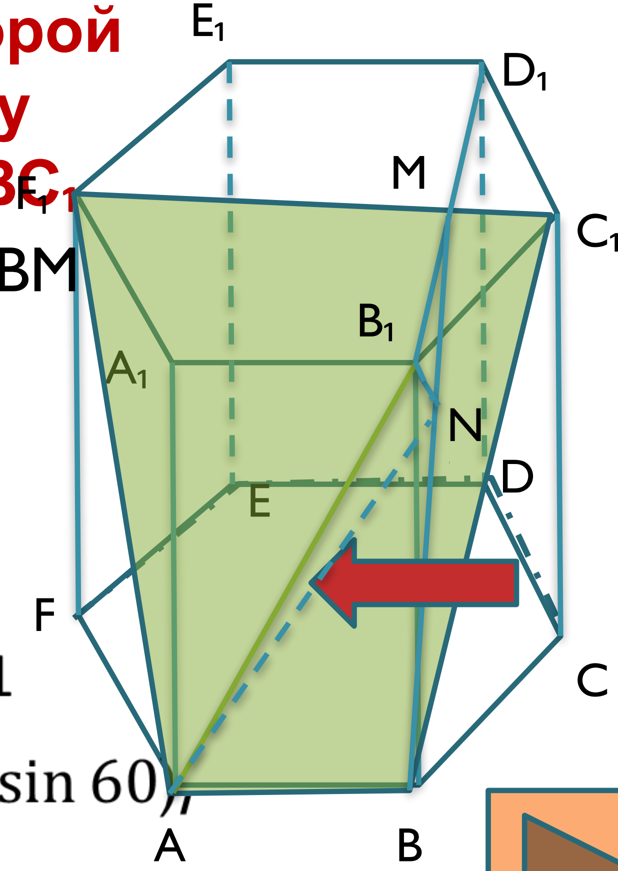
Далее, из точки B_1 опустим перпендикуляр B_1N на прямую BM.

Тогда $\angle B_1AN = \alpha$-искомый угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

В прямоугольном ΔBB_1M известно: $BB_1=1$ (по условию), $B_1M=\frac{1}{2}B_1D_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($B_1D_1=2\bullet D_1C_1\sin 60$),

тогда $BM=\sqrt{BB_1^2+B_1M^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Заметим =, что $\Delta B_1NM \sim \Delta BB_1M$ (прямоугольные, имеющие общий $<B_1MN$).

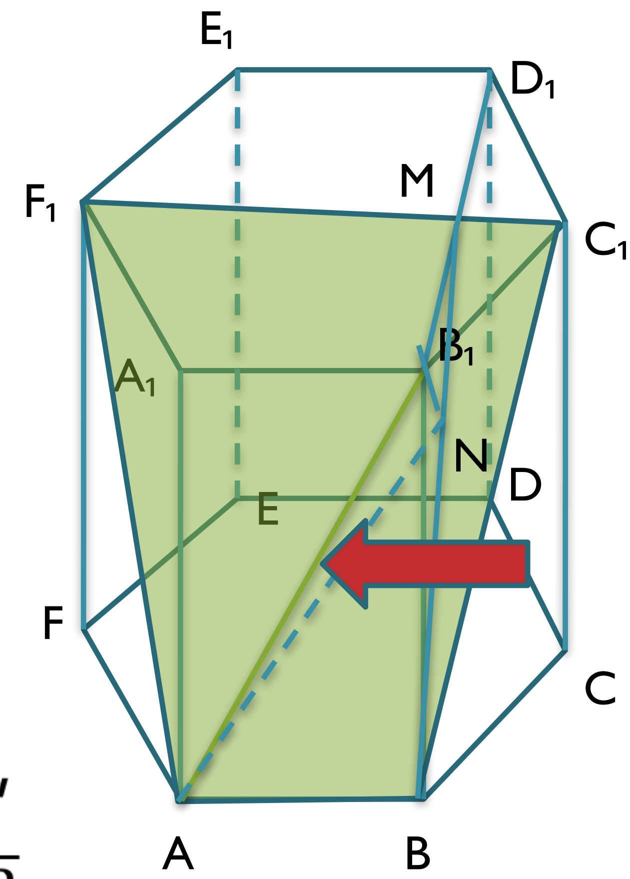


Угол между прямой и плоскостью.

В прямоугольном ΔBB_1M известно: $BB_1=1$ (по условию), $B_1M=\frac{1}{2}B_1D_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($B_1D_1=2\bullet D_1C_1\sin 60$), тогда $BM=\sqrt{BB_1{}^2+B_1M^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

- Заметим, что $\Delta B_1NM \sim \Delta BB_1M$ (прямоугольные, имеющие общий $<B_1MN$.

Имеем $B_1N=\frac{\sqrt{21}}{7}$(из пропорции $\frac{B_1M}{BM}=\frac{B_1N}{BB_1}$, $B_1N=\frac{\sqrt{3}}{2}\bullet 1:\frac{\sqrt{7}}{2}$). Так как $AB_1=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, то из ΔAB_1N $\sin\alpha= B_1N: AB_1=\frac{\sqrt{42}}{14}$.

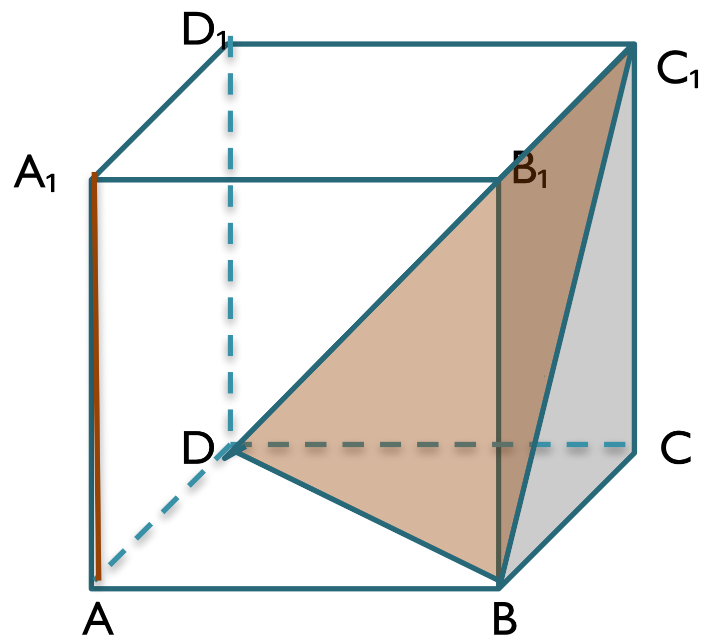


$$\alpha = arcsin\frac{3}{\sqrt{42}}$$

Угол между прямой и плоскостью

Реши задачу:

6.В кубе A…D_1 найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D.

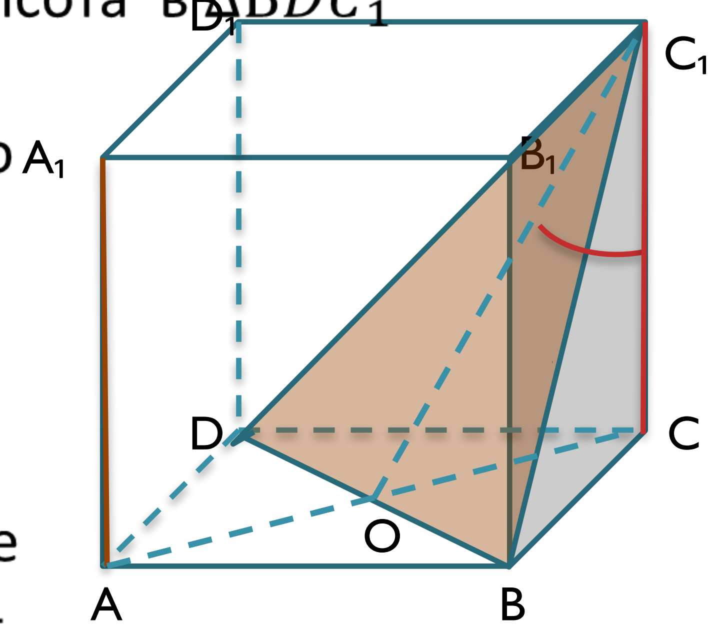


подсказка

Угол между прямой и плоскостью:

Диагонали DB и AC пересекаются в O. C_1O – медиана, биссектриса, высота в ΔBDC_1

Решение:



Угол между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D равен углу между прямой CC_1 и плоскостью BC_1D, т. е. $< OC_1C$.

- В ΔOCC_1 $CC_1=1$, OC =R –радиус описанной окружности. Известно, что в правильном четырехугольнике со стороной a $a=R\sqrt{2}$, откуда $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$ или $OC=\frac{1}{\sqrt{2}}$, где a=1.

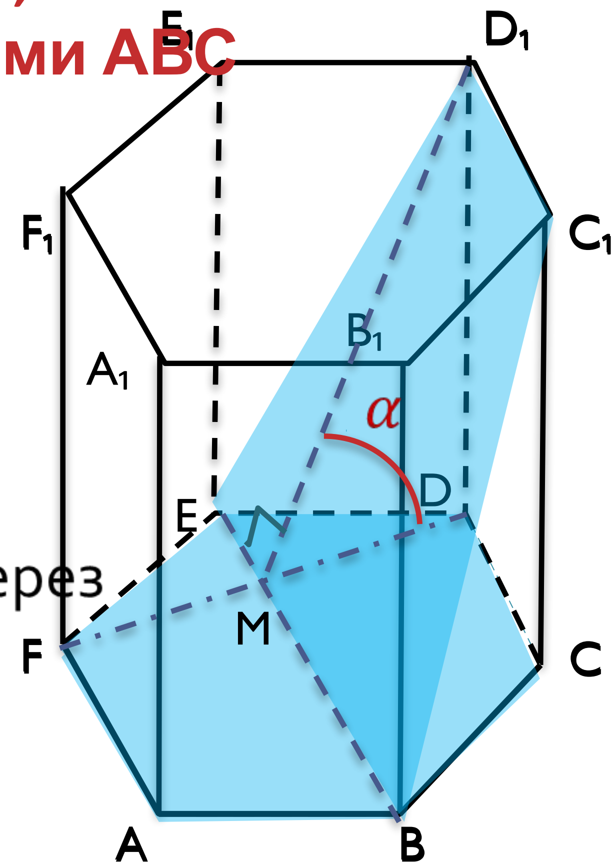
a= $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$

Из прямоугольного ΔOCC_1 $\tan a=\frac{OC}{CC_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, где $a = \angle OC_1C$

Угол между двумя плоскостями:

7.В правильной шестиугольной призме AF_1, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Проведу диагонали основания BE и FD



- В плоскости BED_1 из точки D_1 опустим перпендикуляр D_1M на плоскость основания призмы.

Так как FE=ED и диагональ BE проходит через центр основания, то EM – медиана, биссектриса и высота ΔFED, точка M – середина FD.

В прямоугольном ΔMDD_1 имеем: $DD_1=1$,

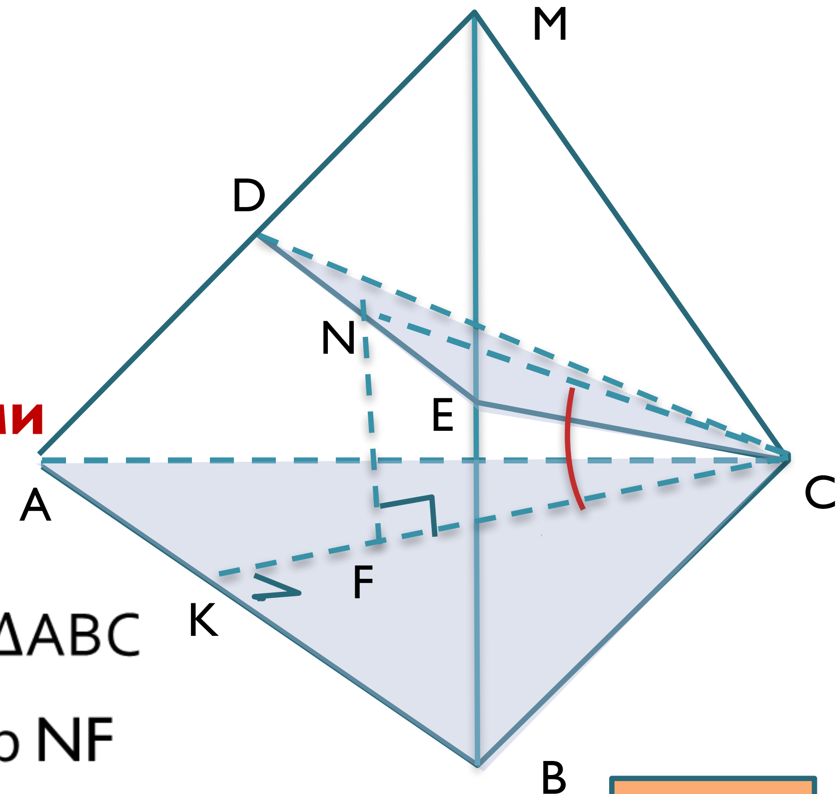
$MD=\frac{1}{2}FD=\frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда $tg\alpha=\frac{DD_1}{MD}$, или $tg\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Искомый угол

$\alpha=arctg\frac{2}{\sqrt{3}}$

Угол между двумя плоскостями:

8. В правильной треугольной пирамиде МАВС с основанием АВС, точка D - середина МА, точка Е- середина ребра МВ. Найдите угол между плоскостями CDE и ABC, если МС=18, АВ=12.



Решение:

CK – медиана, биссектриса и высота ΔABC

Из точки N опустим перпендикуляр NF на плоскость основания ΔABC.

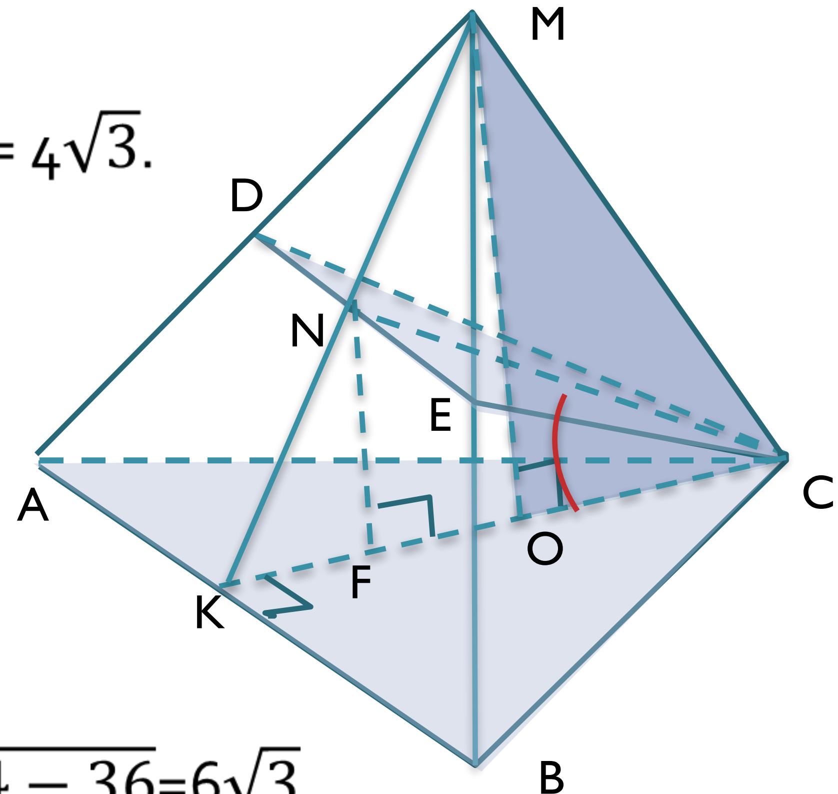
$NF \perp DE$ и $CN \perp DE$, значит, $\angle NCF$- линейный угол между плоскостями CDE и ABC.

Угол между двумя плоскостями.

MO высота призмы.

В ΔABC $BC = OC \cdot \sqrt{3}$, $OC = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$.

Из ΔMOC $MO = \sqrt{18^2 - (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{324 - 48} = 2\sqrt{69}$.



$NF = \frac{1}{2}MO = \sqrt{69}$ - средняя линия ΔKOM.

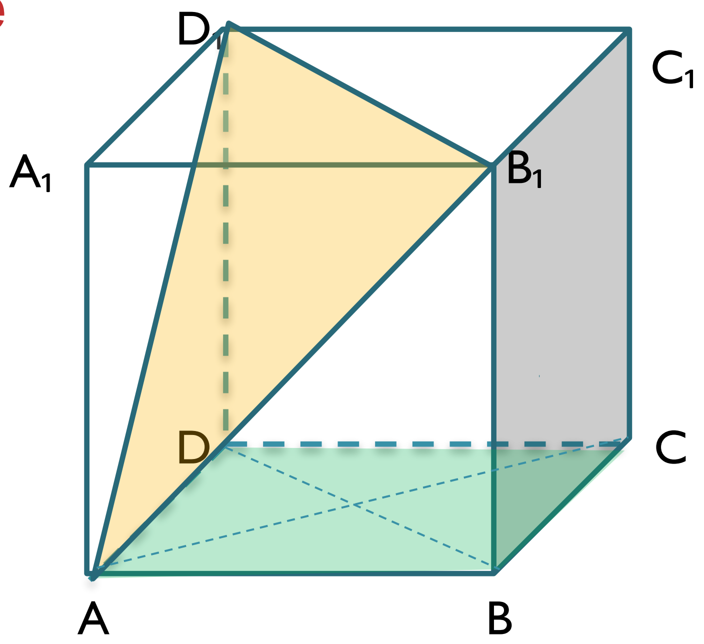
Из ΔKCB, где $BC=12$, $BK=6$, $KC = \sqrt{144 - 36} = 6\sqrt{3}$.

Следовательно, $\operatorname{tg}\angle NCF = \frac{NF}{FC} = \frac{\sqrt{69}}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{23}}{5}$.

$\angle NCF = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{23}}{5}$.

Угол между двумя плоскостями

9.В кубе A…D_1 найдите углы между плоскостями между ABC и AB_1D_1.

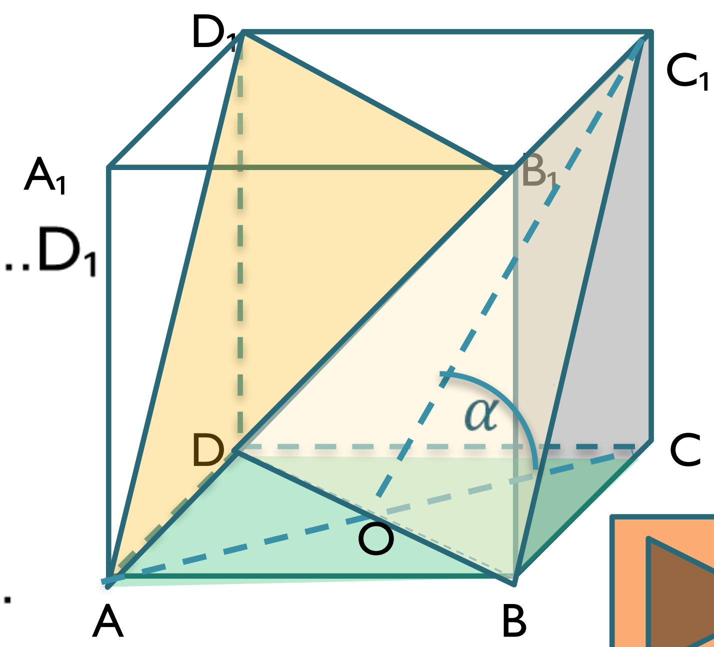


Угол между двумя плоскостями.

В кубе A…D_1 найдите углы между плоскостями между ABC и AB_1D_1.

Решение:

Очевидно, что в единичном кубе A…D_1 плоскость AB_1D_1 ‖ плоскости BC_1D, так как $BD = B_1D_1$, $AB_1 = DC_1$ и $AD_1 = BC_1$.



Пусть O – точка пересечения диагоналей AC и BD квадрата ABCD. Тогда искомым линейным α углом между плоскостями ABC и плоскостью BC_1D, будет $\angle C_1OC = \alpha$

$\alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{2}$

В $\Delta C_1OC(\angle C = 90°)$, $CC_1 = 1$, $OC = R = \frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{CC_1}{OC} = \sqrt{2}$$

Литература.

1. Атанасян Л.С. Геометрия: учебник для 10-11 классов
общеоразовательных учреждений.-М.: Просвещение,2011.

2. Смирнова И.М.,Смирнов В.А. Эффектиная подготовка к ЕГЭ.
- М.: Экзамен, 2008

3. Рыбкин Н. Сборник задач по геом
Стереометрия для
9 и 10 классов.-М.: Просвещение, 19