

# **Задачи на готовых чертежах**

**ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К**

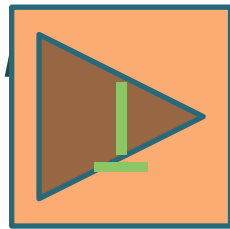
**ЕГЭ**



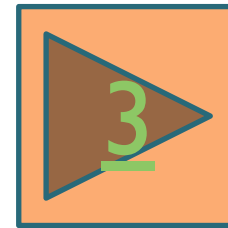
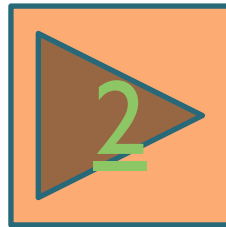
Учитель математики  
МБОУ СОШ №1  
Вольно-Надеждинское  
Приморский край  
Пентяшкина Татьяна Петровна



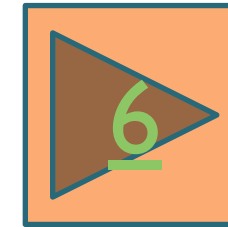
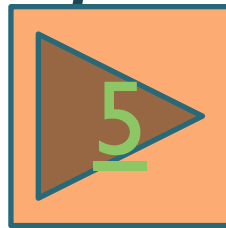
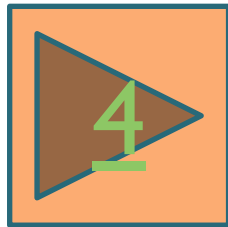
# 1. Угол между двумя



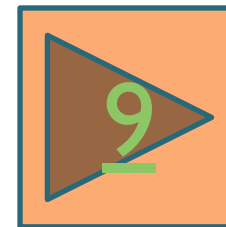
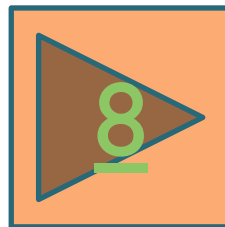
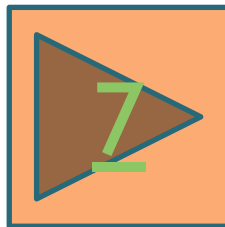
ЛИНИИ:



# 2. Угол между прямой плоскостью:



# 3. Угол между плоскостями:





# Угол между двумя прямыми:

1. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1 найти угол между прямыми  $AC$  и  $BC_1$ .

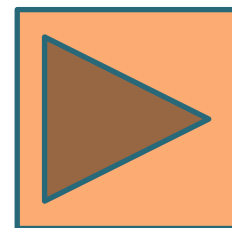
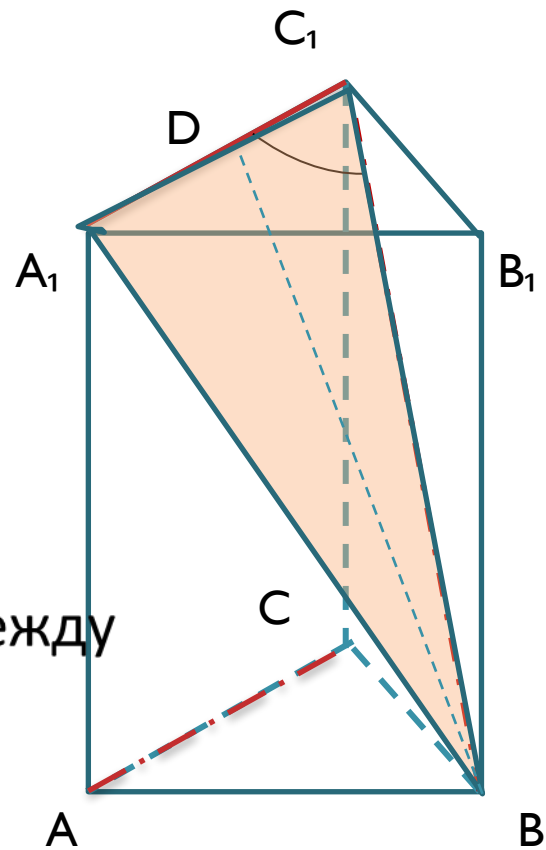
Решение:

Угол между прямыми  $AC$  и  $BC_1$  равен углу между прямыми  $BC_1$  и  $A_1C_1$ . Пусть  $\angle A_1C_1B = \alpha$ .

Так как призма правильная, то  $A_1B = C_1B$  как диагонали равных квадратов (по условию все ребра призмы равны 1).

Значит,  $\triangle A_1BC_1$  - равнобедренный.

Проводим высоту  $BD$





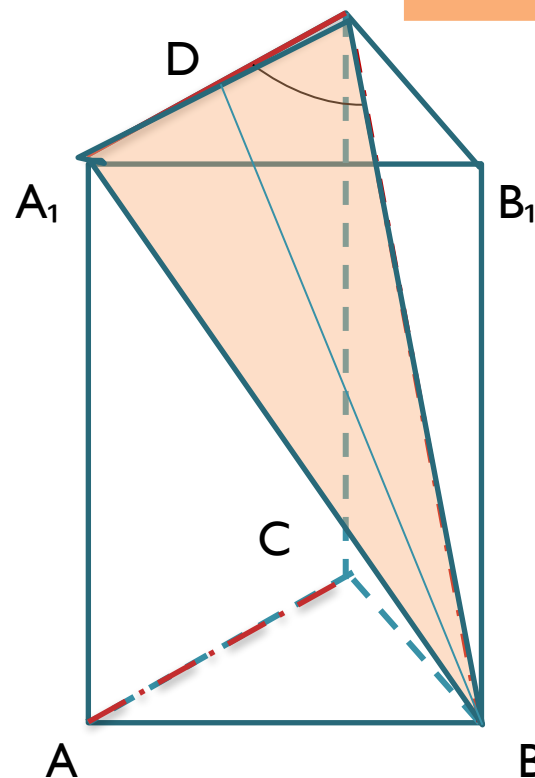
# Угол между двумя прямыми:



$$\text{В } \triangle BDC_1 \quad DC_1 = \frac{1}{2} A_1C_1 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle C_1B_1B \quad BC_1^2 = 1+1=2; \quad BC_1 = \sqrt{2}.$$

$$\text{Тогда } \cos \alpha = \frac{DC_1}{BC_1} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$



$$\text{Ответ: } \alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$$



## Угол между двумя

**ПРЯМЫМИ:**

**2. В единичном кубе  $A...D_1$  найти угол**

**между прямыми  $BB_1$  и  $A_1C$ .**

Заметим, что угол между прямыми  $BB_1$  и  $A_1C$  равен углу между прямыми  $AA_1$  и

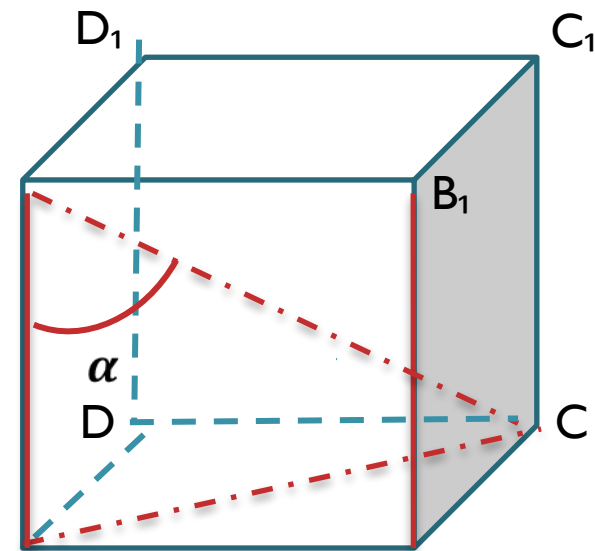
$AC$ . Пусть  $\angle AA_1C = \alpha$ , тогда из

$\triangle AA_1C$  ( $\angle AA_1C = 90^\circ$ ) имеем  $\cos \alpha = \frac{AA_1}{A_1C}$ ,

где  $AA_1 = 1$ ,  $A_1C$  – диагональ куба.

По свойству прямоугольного параллелепипеда, имеем

$AC^2 = AB^2 + BC^2 + AA_1^2$ , или  $A_1C = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3} = \sqrt{3}$ , где  $a = 1$ .



Тогда  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , откуда

$$\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



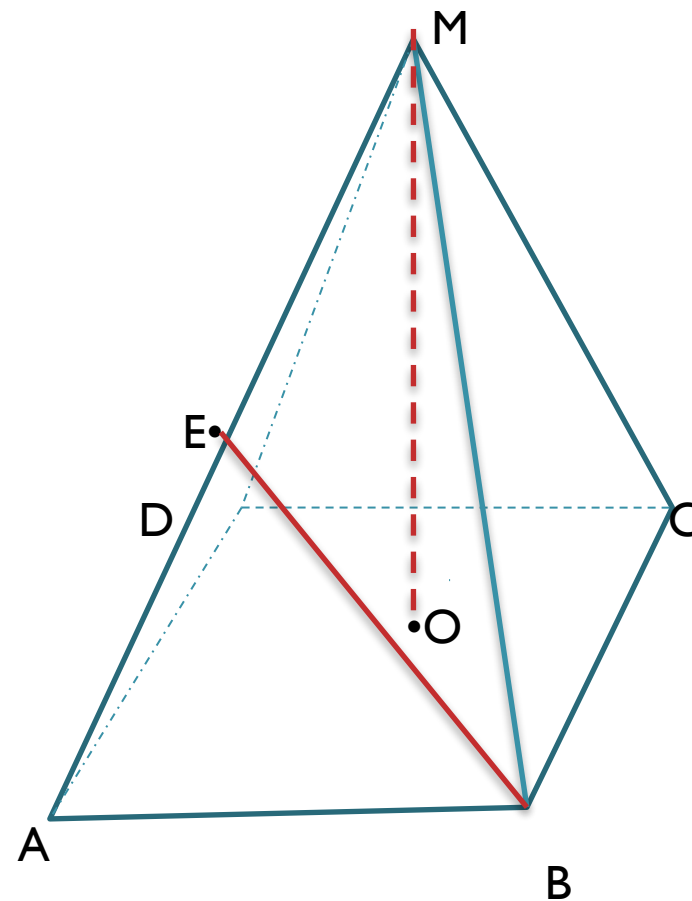
# Угол между двумя



**прямыми:**

Реши задачу:

**3. В правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$ , все ребра которой равны  $l$ , найти угол между прямыми  $MO$  и  $BE$ , где точка  $E$  – середина ребра  $AM$ .**





# Угол между двумя

## прямыми:

Решение

Проведу диагонали основания.

Из точки  $E$  – середины  $AM$  опускаем перпендикуляр  $EK$  на плоскость  $ABCD$ .

$EK$  – средняя линия  $\triangle AOM$ . Так как высота  $MO \perp (ABC)$  и  $MO \parallel EK$ , то  $EK \perp (ABC)$ , значит,  $EK \perp BK$ .

Поскольку  $MO \parallel EK$ , то угол между прямыми  $MO$  и медианой  $BE$  равен  $\angle KEB = \alpha$ .

Все ребра пирамиды равны 1 (по условию задачи), то из  $\triangle ABE$ , где  $AB=1, AE=\frac{1}{2}, BE=\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

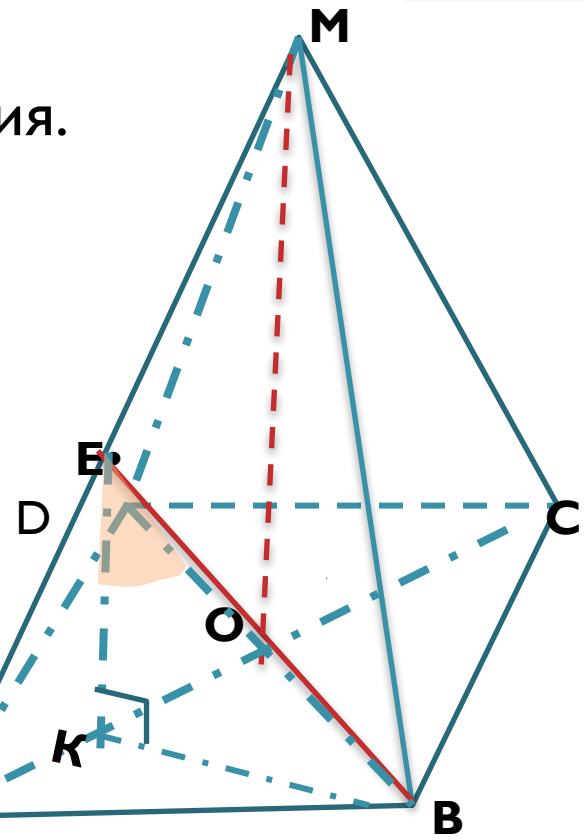
В  $\triangle AOM$   $AO=MO$ , тогда  $AO^2 + MO^2 = AM^2$ , или  $2AO^2 = 1, AO^2 = \frac{1}{2}$ ,

$$AO=MO=\frac{1}{\sqrt{2}}, KE=\frac{1}{2}MO=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Искомый угол из  $\triangle EKB$

$$\cos \alpha = \frac{KE}{BE} = \frac{1}{2\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{6}}$$





# Угол между прямой и плоскостью:



4. В правильной четырехугольной призме

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , стороны основания которой равны 2, а боковые ребра

равны 4, найти угол между прямой  $AB_1$  и плоскостью  $BDD_1$ .

Проведем диагонали  $AC$  и  $BD$  основания.

Пусть  $O$  - точка пересечения диагоналей. Заметим, что  $AO$  перпендикулярен, опущенный из точки  $A$  на плоскость  $BDD_1$ .

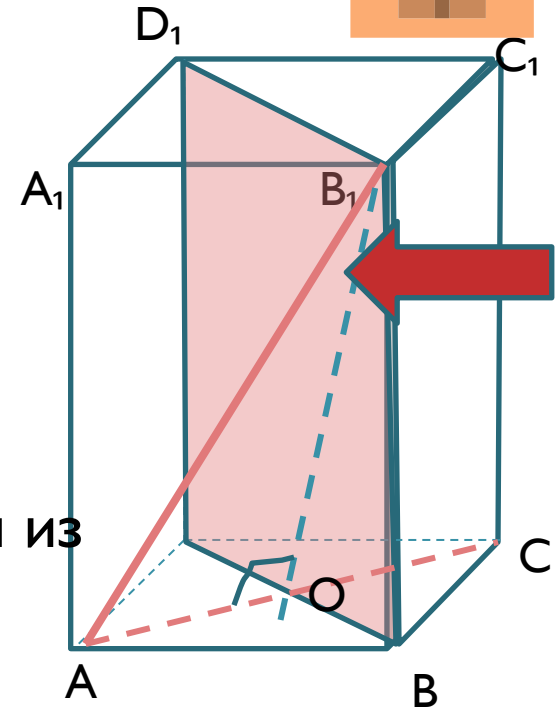
Тогда  $\angle AB_1 O$  есть угол между прямой  $AB_1$  и плоскостью  $BDD_1$

В прямоугольном  $\triangle AB_1 O$   $AO = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ,

$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2}$  или  $AB_1 = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ ,

тогда  $\sin \angle AB_1 O = \frac{AO}{AB_1} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ .

$$\angle AB_1 O = \arcsin \frac{\sqrt{10}}{10}$$







# Угол между прямой и плоскостью

**5. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой  $AB_1$  и плоскостью  $ABC_1$ .**

Обозначим точку  $M$  -  
пересечение прямых  $F_1C_1$  и  $B_1D_1$ .

Проведем  $BM$

Далее, из точки  $B_1$  опустим  
перпендикуляр  $B_1N$  на прямую  $BM$ .

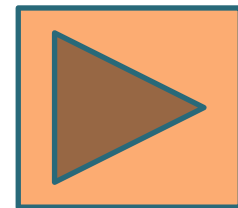
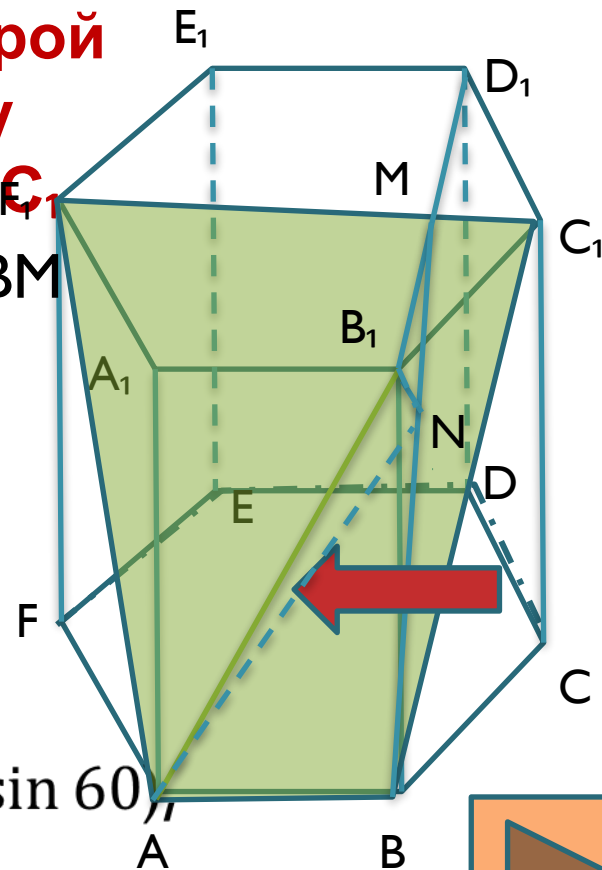
Тогда  $\angle B_1AN = \alpha$  - искомый угол между  
прямой  $AB_1$  и плоскостью  $ABC_1$ .

В прямоугольном  $\triangle BB_1M$  известно:  $BB_1 = 1$

(по условию),  $B_1M = \frac{1}{2} B_1D_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ( $B_1D_1 = 2 \cdot D_1C_1 \sin 60^\circ$ )

тогда  $BM = \sqrt{BB_1^2 + B_1M^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

Заметим, что  $\triangle B_1NM \sim \triangle BB_1M$  (прямоугольные,  
имеющие общий  $\angle B_1MN$ ).





# Угол между прямой и



**плоскостью**

В прямоугольном  $\triangle BB_1M$  известно:  $BB_1=1$

(по условию),  $B_1M = \frac{1}{2} B_1D_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

( $B_1D_1 = 2 \cdot D_1C_1 \sin 60$ ), тогда

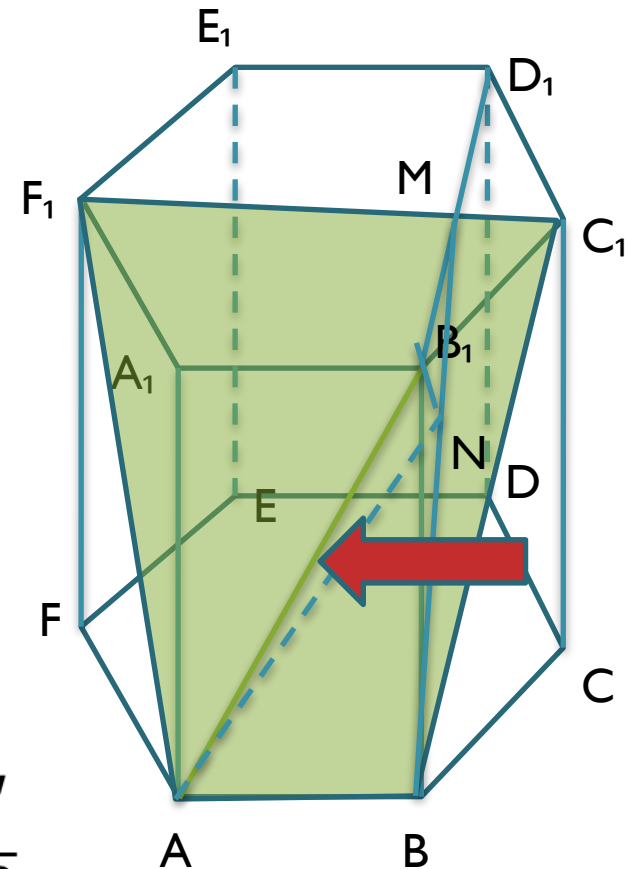
$$BM = \sqrt{BB_1^2 + B_1M^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

- Заметим, что  $\triangle B_1NM \sim \triangle BB_1M$  (прямоугольные, имеющие общий  $\angle B_1MN$ ).

Имеем  $B_1N = \frac{\sqrt{21}}{7}$  (из пропорции  $\frac{B_1M}{BM} = \frac{B_1N}{BB_1}$ ,

$B_1N = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}$ ). Так как  $AB_1 = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ , то

из  $\triangle AB_1N$   $\sin \alpha = B_1N : AB_1 = \frac{\sqrt{42}}{14}$ .



$$\alpha = \arcsin \frac{3}{\sqrt{42}}$$

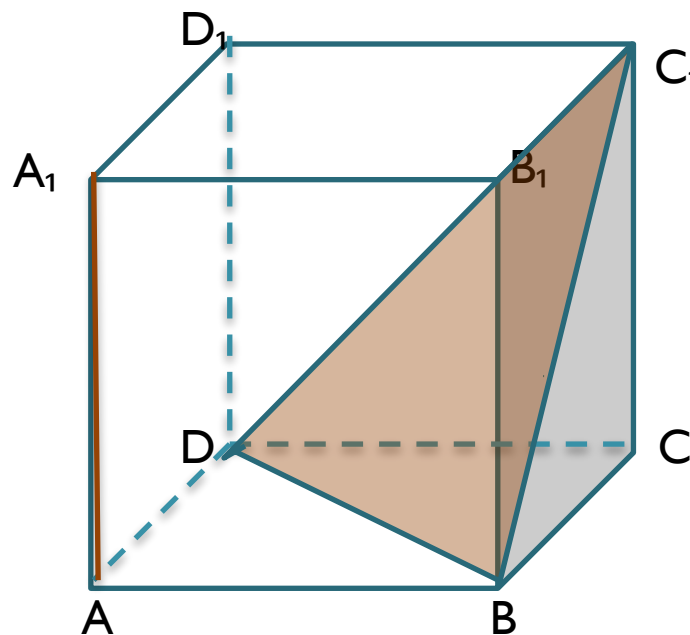


# Угол между прямой и

## ПЛОСКОСТЬЮ:

Решить задачу:

**6. В кубе  $A...D_1$  найдите угол между прямой  $AA_1$  и плоскостью  $BC_1D$ .**



**ПОДСКАЗК**

а



# Угол между прямой и

## ПЛОСКОСТЬЮ:

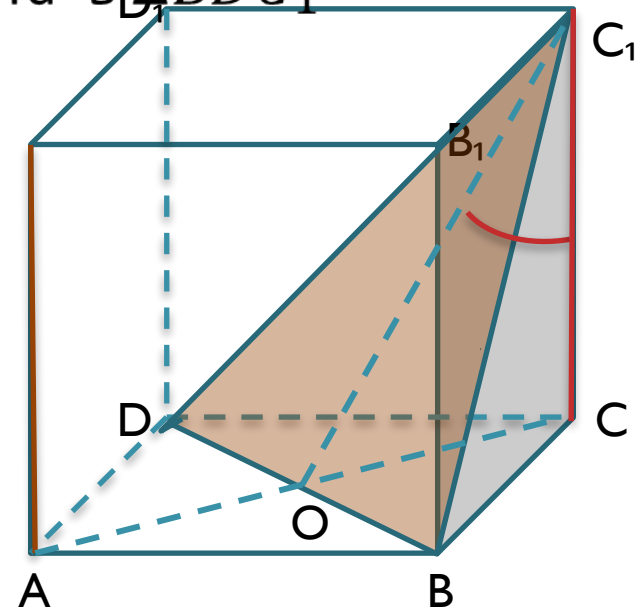
Диагонали  $DB$  и  $AC$  пересекаются в  $O$ .  $CC_1O$  – медиана, биссектриса, высота в  $\triangle BDC_1$

Решение:

Угол между прямой  $AA_1$  и плоскостью  $A_1BC_1D$  равен углу между прямой  $CC_1$  и плоскостью  $BC_1D$ , т. е.  $\angle OC_1C$ .

В  $\triangle OCC_1$   $CC_1=1$ ,  $OC=R$  – радиус описанной окружности. Известно, что в правильном четырехугольнике со стороной  $a$   $a=R\sqrt{2}$ , откуда  $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$  или  $OC = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , где  $a=1$ .

Из прямоугольного  $\triangle OCC_1$   $\tan a = \frac{OC}{CC_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , где  $a = \angle OC_1C$



$$a = \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$$



# Угол между двумя плоскостями:



7. В правильной шестиугольной призме  $AF_1$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $BED_1$ .

Проведу диагонали основания  $BE$  и  $FD$

В плоскости  $BED_1$  из точки  $D_1$

• опустим

перпендикуляр  $D_1M$  на плоскость

основания. Поскольку диагональ  $BE$  проходит через

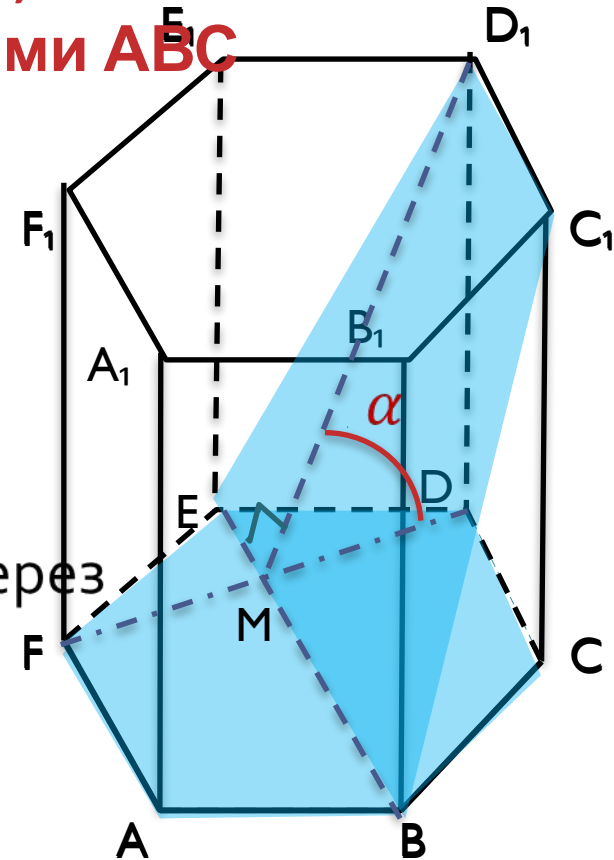
центр основания, то  $EM$  – медиана,

биссектриса и высота  $\triangle FED$ , точка  $M$  –

середина  $FD$ .

В прямоугольном  $\triangle MDD_1$  имеем:  $DD_1=1$ ,

$$MD = \frac{1}{2}FD = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ тогда } \operatorname{tg} \alpha = \frac{DD_1}{MD}, \text{ или } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$



*Искомый угол*

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}}$$



## Угол между двумя плоскостями:

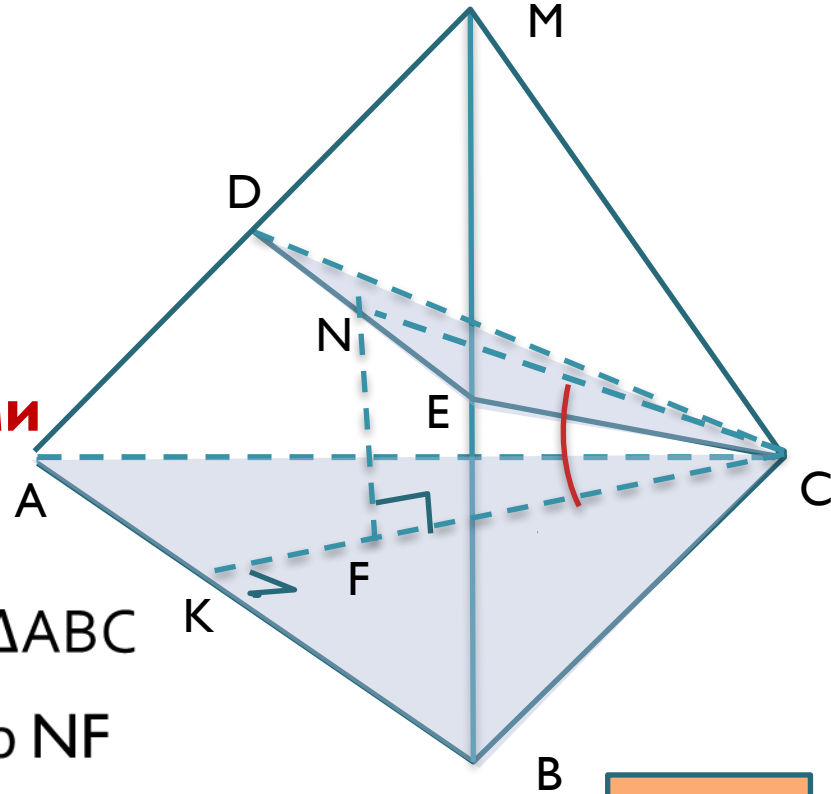
8. В правильной треугольной пирамиде  $MAVC$  с основанием  $ABC$ , точка  $D$  - середина  $MA$ , точка  $E$  - середина ребра  $MB$ .  
Найдите угол между плоскостями  $CDE$  и  $ABC$ , если  $MC=18$ ,  $AB=12$ .

Решение:

$CK$  – медиана, биссектриса и высота  $\triangle ABC$

Из точки  $N$  опустим перпендикуляр  $NF$  на плоскость основания  $\triangle ABC$ .

$NF \perp DE$  и  $CN \perp DE$ , значит,  $\angle NCF$  - линейный угол между плоскостями  $CDE$  и  $ABC$ .





# Угол между двумя плоскостями.

МО высота призмы.



$$\text{В } \triangle ABC \quad BC = OC \cdot \sqrt{3}, \quad OC = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

Из  $\triangle МОС$   $МО =$

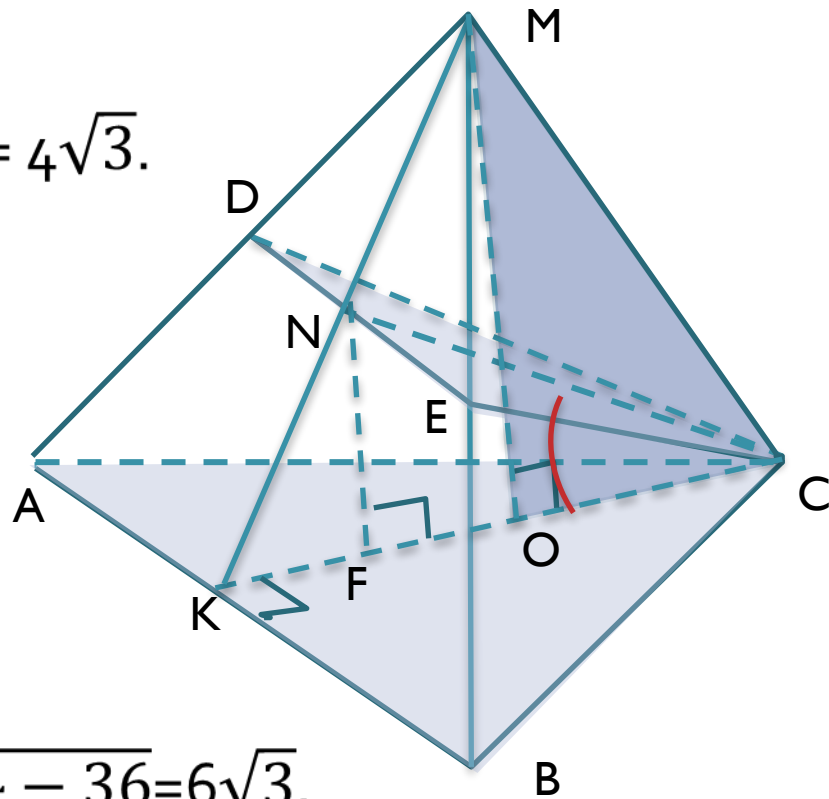
$$\sqrt{18^2 - (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{324 - 48} = 2\sqrt{69}.$$

$NF = \frac{1}{2}МО = \sqrt{69}$  - средняя линия  
 $\triangle КОМ$ .

Из  $\triangle КСВ$ , где  $BC = 12$ ,  $BK = 6$ ,  $КС = \sqrt{144 - 36} = 6\sqrt{3}$ .

$$\text{Следовательно, } \operatorname{tg} \angle NCF = \frac{NF}{FC} = \frac{\sqrt{69}}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{23}}{5}.$$

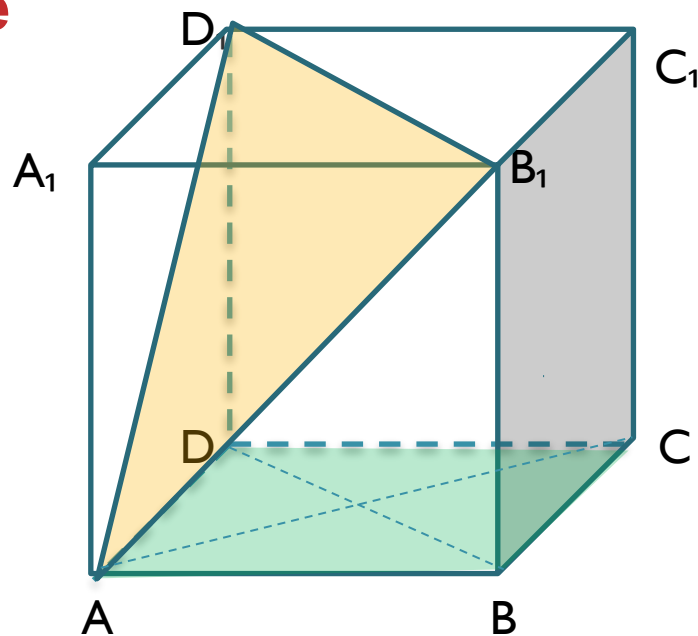
$$\angle NCF = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{23}}{5}.$$





# Угол между двумя плоскостями

9. В кубе  $A...D_1$  найдите углы между плоскостями между  $ABC$  и  $AB_1D_1$ .







# Угол между двумя плоскостями...



**В кубе  $A...D_1$  найдите углы между плоскостями между  $ABC$  и  $AB_1D_1$ .**

**Решение:**

Очевидно, что в единичном кубе  $A...D_1$  плоскость  $AB_1D_1 \parallel$  плоскости  $BC_1D$ , так как  $BD = B_1D_1$ ,  $AB_1 = DC_1$  и  $AD_1 = BC_1$ .

Пусть  $O$  – точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$  квадрата  $ABCD$ .

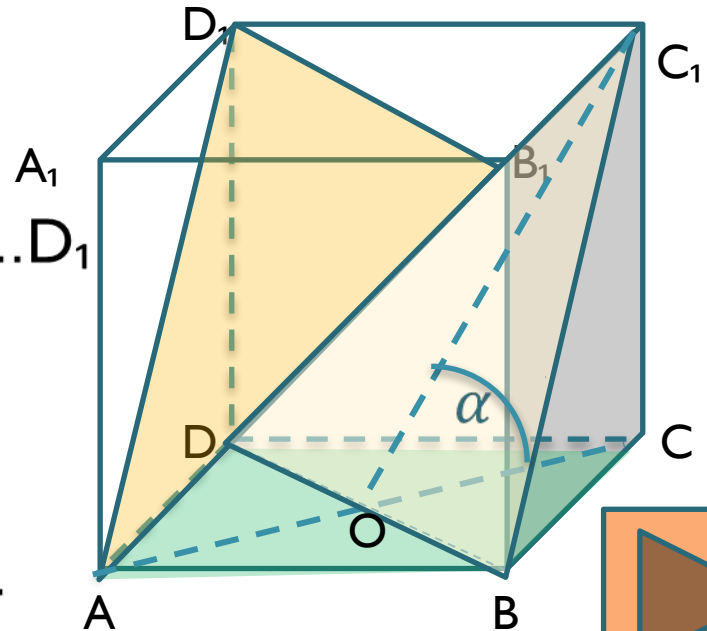
Тогда искомым линейным  $\alpha$  углом между плоскостями  $ABC$  и плоскостью  $BC_1D$ , будет  $\angle C_1OC = \alpha$

будет  $\angle C_1OC = \alpha$

В  $\Delta C_1OC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ),  $CC_1 = 1$ ,  $OC = R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CC_1}{OC} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$$





# *Литература.*

1. **Атанасян Л.С. Геометрия: учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений.-М.: Просвещение, 2011.**
2. **Смирнова И.М., Смирнов В.А. Эффективная подготовка к ЕГЭ.  
- М.: Экзамен, 2008**
3. **Рыбкин Н. Сборник задач по геом  
Стереометрия для  
9 и 10 классов.-М.: Просвещение, 19**

