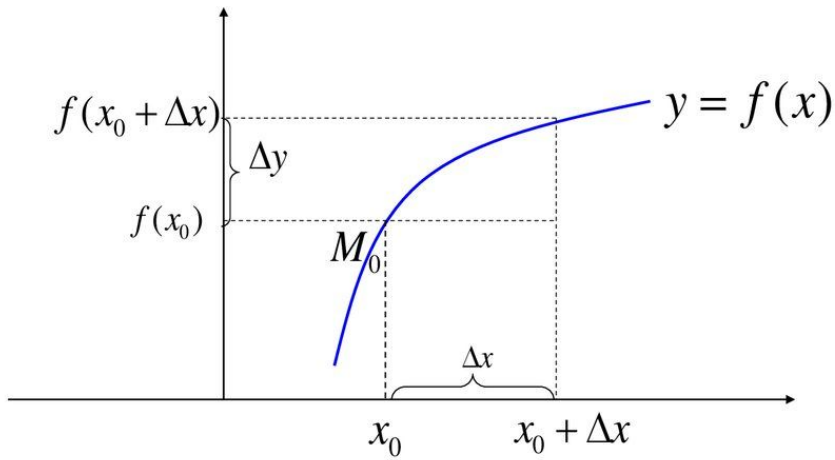
Производная сложной функции



Δx - приращение аргумента

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ - приращение функции

Производная сложная функция

Формула нахождения производной сложной функции:

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$$

Решение задач

Пример. Найти производную сложной функции

$$y = (2x+1)^2$$

Решение:

В данном примере f – функция возведения в квадрат, а $g(x) = (2x+1)$ – линейная функция. Вот подробное решение с использованием формулы производной сложной функции: $\left(\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\right)\right)' = \boldsymbol{f}'\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\right) \cdot \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})$

$$\boldsymbol{f}'\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\right) = \left(\left(g(x)\right)^2\right)' = 2\left(g(x)\right)^{2-1} = 2 \cdot g(x) = 2 \cdot (2x+1);$$

$$\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) = (2x+1)' = (2x)' + (1)' = 2 + 0 = 2$$

$$\left(\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) = 2 \cdot (2x+1) \cdot 2 = 8x + 4$$

Ответ: $y' = \left((2x+1)^2\right)' = 8x + 4$

или

$$y' = \left((2x+1)^2\right)' = \left((2x+1)^2\right)' \cdot (2x+1)' = 2(2x+1) \cdot 2 = 8x + 4$$

Самостоятельно решить следующие примеры:

1) $y = (-2x + 2)^4$

2) $y = (x^2 - 2)^3$

3) $y = (3x + 2)^5$

4) $y = (-5x + 11)^4$

Пример: найти производную функции:

$$y = sin^2x \qquad y = sinx^{\,2}$$

Решение:

В первом случае f – это функция возведения в квадрат, а $g(x)$ – функция синуса, поэтому

$$y' = \left(sin^2x\right)' = 2 \cdot sin^{2-1}x \cdot (sinx)' = 2sinx \cdot cosx$$

Во втором случае f – это функция синуса, а формула - степенная функция. Следовательно, по формуле произведения сложной функции имеем

$$y' = \left(sinx^2\right)' = cos\left(x^2\right) \cdot \left(x^2\right)' = \cos\left(x^2\right) \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 2xcos\left(x^2\right)$$

Самостоятельно решить следующие примеры:

1) $y = cos^2 x$

2) $y = cosx^{\,2}$