Основы функционального анализа

Задачи

7. Операторы A, B, C и D действуют в пространстве l_2 :

$$Ax = (-x_2, 2x_1, -x_3, x_4, x_5, ..., x_n, ...), \quad Bx = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, ..., x_n, 0, ...),$$

$$Cx = (x_1, 0, x_3, x_4, x_5, ..., x_n, ...), \quad Dx = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, ..., x_{2k-1}, -x_{2k}, ...)$$

(для $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...) \in l_2$).

1) Найдите норму каждого из этих операторов.

2) Проверьте, являются ли данные операторы обратимыми. Если оператор обратим, найдите обратный к нему.

1) $\|Ax\|_2 = \|y\|_2 = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x_2^2 + 4x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 + \ldots\right)^{\frac{1}{2}} \leq$

$\leq \left(4x_2^2 + 4x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 + \ldots\right)^{\frac{1}{2}} = 2\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} =$

$= 2\|x\|_2 \Rightarrow \underline{\|A\| \leq 2}$ (1)

$\bar{x} = e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $\|\bar{x}\|_2 = 1$;

$A\bar{x} = (0, 2, 0, 0, \ldots)$, $\|A\bar{x}\| = 2$.

$\|A\| = \sup\limits_{\substack{x \in l_2 \\ x \neq \theta}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \dfrac{\|A\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} = 2$; $\underline{\|A\| \geq 2}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \underline{\|A\| = 2.}$

$\|B\| = 1$; $\|C\| = 1$; $\|D\| = 1$.

2) Обратимость операторов.

а) $A: l_2 \to l_2$ обратим $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\, A = \{\theta\}$ и
(th 10.2) $\mathrm{Im}\, A = l_2$.

$Ax = \theta \Rightarrow x_k = 0 \ \forall k \Rightarrow x = \theta$. Сл-но, $\mathrm{Ker}\, A = \{\theta\}$.

$\mathrm{Im}\, A = ?$ Рассм. $\forall y = (y_1, y_2, \dots) \in l_2$.

Найдем такой $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$, что $Ax = y$:

$-x_2 = y_1,\ 2x_1 = y_2,\ -x_3 = y_3,\ x_4 = y_4,\ x_5 = y_5, \dots$

След-но, $x = \left(\frac{1}{2} y_2, -y_1, -y_3, y_4, y_5, \dots\right)$.

Итак, $\forall y \in l_2$ имеет прообраз $x \in l_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\, A = l_2$

$\Rightarrow \underline{\operatorname{Im} A = \ell_2}$

След-но, по $\underline{\text{th } 10.2}$, оп-р $A: \ell_2 \to \ell_2$ обратим и $\underline{A^{-1} y = x =}$

$$\underline{= \left(\tfrac{1}{2} y_2, -y_1, -y_3, y_4, y_5, \dots\right)}.$$

б) $\operatorname{Ker} B = \{\theta\}$, но $\operatorname{Im} B \neq \ell_2$, т.к. элемент $y = e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$ не имеет прообраза $x \in \ell_2$.

След-но, $B: \ell_2 \to \ell_2$ не обратим.

б) $\operatorname{Ker} B = \{\theta\}$, но $\operatorname{Im} B \neq \ell_2$, т.к. элемент $y = e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$ не имеет прообраза $x \in \ell_2$.

След-но, $B : \ell_2 \to \ell_2$ не обратим.

в) $\operatorname{Ker} C \neq \{\theta\}$, т.к. $x = e_2 \in \operatorname{Ker} C$.

След-но, C – не обратим.

г) D – обратим;

$D^{-1} y = (y_1, -y_2, y_3, -y_4, \dots)$, т.е.

$$D^{-1} = D.$$

8. Операторы A, B, C и D из задачи 7 действуют в пространстве l_1 . Найдите норму каждого из этих операторов.

9. Операторы A, B, C и D из задачи 7 действуют в пространстве l_3 . Найдите норму каждого из этих операторов.

10. Операторы A, B, C и D из задачи 7 действуют в пространстве m . Найдите норму каждого из этих операторов.

§ 13. Фактор-пространство

Пусть E — лин. простр-во, L — лин. многообразие в E.

<u>Опр.</u> Элементы $x, y \in E$ назыв-ся <u>эквивалентными</u>, если $x - y \in L$.

Обозначение: $x \sim y$.

Заметим, что выполняются след-е свойства (для $\forall x, y, z \in E$):

1) $x \sim x$ (рефлексивность);

2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (симметричность);

3) $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (транзитивность).

Итак, на ЛП E задано <u>отношение эквивалентности</u>, которое разбивает пр-во E на <u>классы смежности</u> (<u>фактор-классы</u>). Два класса смежности либо не пересекаются, либо совпадают (частично пересекаться они не могут).

Класс эквивалентности (смежности), порожденный элементом $x \in E$, имеет вид

$$x+L=\{x+y \mid y\in L\}.$$

Заметим, что для $\forall x_1\in x+L$ $x_1+L=x+L$ (любой "представитель" x_1 класса $x+L$ порождает этот же класс).

Множество всех классов смежности называется <u>фактор-множеством</u> и обозначается E/L ("E по L"):

$$E/L=\{x+L \mid x\in E\}.$$

На множестве E/L зададим операции сложения и умножения на число:

1) $(x+L)+(y+L)=(x+y)+(\overbrace{L+L}^{L})=$
$=x+y+L$ (классы складываются как множества);

2) $\lambda(x+L)=\lambda x+\underbrace{\lambda L}_{L}=\lambda x+L.$

Роль нулевого элемента играет ЛМ L.

Нетрудно проверить выполнение аксиом линейного простр-ва.

Линейное простр-во E/L наз-ся

<u>фактор-пространством</u>.

Пример $E = \mathbb{R}^2$,

$L = \{ x = (x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0 \}$.

$x^0 + L = \{ \bar{x} = (x^0_1 + x_1, x^0_2 + x_2) \mid x_1 + x_2 = 0 \}$

— фактор-класс, порожд-й элем-м x^0.