

**Оснoвы
функционального
анализа**

Задачи

7. Операторы A , B , C и D действуют в пространстве l_2 :

$$Ax = (-x_2, 2x_1, -x_3, x_4, x_5, \dots, x_n, \dots), \quad Bx = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \dots, x_n, 0, \dots),$$

$$Cx = (x_1, 0, x_3, x_4, x_5, \dots, x_n, \dots), \quad Dx = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots, x_{2k-1}, -x_{2k}, \dots)$$

(для $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) \in l_2$).

1) Найдите норму каждого из этих операторов.

2) Проверьте, являются ли данные операторы обратимыми. Если оператор обратим, найдите обратный к нему.

$$\begin{aligned}
 1) \quad \|Ax\|_2 &= \|y\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(x_2^2 + 4x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 + \dots \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \left(4x_2^2 + 4x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 + \dots \right)^{\frac{1}{2}} = 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= 2 \|x\|_2 \Rightarrow \underline{\|A\| \leq 2} \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\bar{x} = e_1 = (1, 0, 0, \dots), \quad \|\bar{x}\|_2 = 1;$$

$$A\bar{x} = (0, 2, 0, 0, \dots), \quad \|A\bar{x}\| = 2.$$

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \ell_2 \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|A\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} = 2; \quad \underline{\|A\| \geq 2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \underline{\|A\| = 2}.$$

$$\|B\| = 1; \quad \|C\| = 1; \quad \|D\| = 1.$$

2) Обратимость операторов.

а) $A: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ обратим $\Leftrightarrow \text{Ker } A = \{\theta\}$ и
(th 10.2) $\text{Im } A = \ell_2$.

$Ax = \theta \Rightarrow x_k = 0 \forall k \Rightarrow x = \theta$. Сл-но, $\text{Ker } A = \{\theta\}$.

$\text{Im } A = ?$ Рассмотрим $\forall y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell_2$.

Найдем такой $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$, что $Ax = y$:

$$-x_2 = y_1, \quad 2x_1 = y_2, \quad -x_3 = y_3, \quad x_4 = y_4, \quad x_5 = y_5, \dots$$

След-но, $x = (\frac{1}{2}y_2, -y_1, -y_3, y_4, y_5, \dots)$.

Итак, $\forall y \in \ell_2$ имеет прообраз $x \in \ell_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\text{Im } A = \ell_2}$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Im } A = \ell_2}$$

След-но, по th 10.2, оп-р $A: \ell_2 \rightarrow \ell_2$
обратим и $A^{-1}y = x =$
 $= (\frac{1}{2}y_2, -y_1, -y_3, y_4, y_5, \dots)$.

б) $\text{Ker } B = \{0\}$, но $\text{Im } B \neq \ell_2$, т.к.
элемент $y = e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$ не
имеет прообраза $x \in \ell_2$.

След-но, $B: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ не обратим.

б) $\text{Ker } B = \{0\}$, но $\text{Im } B \neq \ell_2$, т.к. элемент $y = e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$ не имеет прообраза $x \in \ell_2$.

След-но, $B: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ не обратим.

в) $\text{Ker } C \neq \{0\}$, т.к. $x = e_2 \in \text{Ker } C$.
След-но, C — не обратим.

г) D — обратим;

$D^{-1}y = (y_1, -y_2, y_3, -y_4, \dots)$, т.е.

$$D^{-1} = D.$$

8. Операторы A , B , C и D из задачи 7 действуют в пространстве l_1 . Найдите норму каждого из этих операторов.

9. Операторы A , B , C и D из задачи 7 действуют в пространстве l_3 . Найдите норму каждого из этих операторов.

10. Операторы A , B , C и D из задачи 7 действуют в пространстве m . Найдите норму каждого из этих операторов.

§ 13. Фактор-пространство

Пусть E — лин. простр-во, L — лин. многообразие в E .

Опр. Элементы $x, y \in E$ называются эквивалентными, если $x - y \in L$.

Обозначение: $x \sim y$.

Заметим, что выполняются след-е свойства (для $\forall x, y, z \in E$):

- 1) $x \sim x$ (рефлексивность);
- 2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (симметричность);
- 3) $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (транзитивность).

Итак, на $\Lambda \Pi E$ задано отношение эквивалентности, которое разбивает $\text{кр-во } E$ на классы смежности (фрагмент-классы). Два класса смежности либо не пересекаются, либо совпадают (частично пересекаясь они не могут).

Класс эквивалентности (смежности), содержащий элемент $x \in E$,

имеет вид

$$x + L = \{x + y \mid y \in L\}.$$

Заметим, что для $\forall x_1 \in x + L$

$x_1 + L = x + L$ (любой "представитель"

x_1 класса $x + L$ порождает этот же класс).

Множество всех классов смежности называется фактор-множеством и

обозначается E/L ("E по L"):

$$E/L = \{x + L \mid x \in E\}.$$

На множестве E/L зададим
операции сложения и умножения
на число:

$$1) (x+L) + (y+L) = (x+y) + \overbrace{(L+L)}^L = \\ = x+y+L \text{ (классы складываются} \\ \text{как множества);}$$

$$2) \lambda(x+L) = \lambda x + \underbrace{\lambda L}_L = \lambda x + L.$$

Роль нулевого элемента играет $LM L$.

Нетрудно проверить выполнение аксиом
линейного пространства.

Линейное пространство E/L называется
фактор-пространством.

Пример $E = \mathbb{R}^2$,

$$L = \{ x = (x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0 \}.$$

$$x^0 + L = \{ \bar{x} = (x_1^0 + x_1, x_2^0 + x_2) \mid x_1 + x_2 = 0 \}$$

— сдвиг-класс, порожд-б элем-и x^0 .

