Матрицы

Матрицей называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит m строк и n столбцов

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Любой элемент обозначается aij

i- номер строки   j- номер столбца

Виды матриц

Если число строк матрицы не равно числу столбцов, матрица называется прямоугольной

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$$

Если число строк равно числу столбцов, матрица называется квадратной

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Квадратные матрицы

Порядок квадратной матрицы- это число её строк и столбцов

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональ, содержащую элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, будем называть *главной*, а диагональ, содержащую элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$, — *побочной* (или вспомогательной).

Если у матрицы отличны от нуля только элементы, находящиеся на главной диагонали, она называется диагональной

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

А- диагональная матрица второго порядка, В…

Если у диагональной матрицы все числа главной диагонали равны между собой, т. е. $a_{11}=a_{22}=\ldots=a_{nn}$, то такая диагональная матрица называется *скалярной*. Если в скалярной матрице все числа главной диагонали равны единице, то матрица называется *единичной* и обозначается буквой E:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой матрицей* и обозначается так:

$$O=\begin{pmatrix}0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}.$$

В прямоугольной матрице типа $m\times n$ возможен случай, когда $m=1$. При этом получается *матрица-строка*:

$$A=(a_{11}\quad a_{12}\quad \ldots\quad a_{1n}).$$

В случае, когда $n=1$, получаем *матрицу-столбец*:

$$B=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \ldots\\ a_{m1}\end{pmatrix}.$$

Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковое число строк m и одинаковое число столбцов n и их соответствующие элементы равны: $a_{ij}=b_{ij}$.

Так, матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

равны, если $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{13}=b_{13}$, $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$, $a_{23}=b_{23}$.

Равные матрицы обязательно имеют одно и то же строение: либо обе они прямоугольные типа $m\times n$, либо квадратные одного и того же порядка n.

Если в матрице типа $m\times n$, имеющей вид

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

переставить строки со столбцами, получим матрицу типа $n\times m$, которую будем называть *транспонированной* матрицей:

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сложение матриц

Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда сумма матриц $C=A+B$ имеет вид

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

где $c_{11}=a_{11}+b_{11}$, $c_{12}=a_{12}+b_{12}$; … $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, …, $c_{mn}=a_{mn}+b_{mn}$

Произведение матрицы на число

Произведением матрицы A на число k называется такая матрица kA, каждый элемент которой равен ka_{ij}, т. е.

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ . & . & . & . \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число сводится к умножению на это число всех элементов матрицы.