Векторная алгебра

Векторы. Основные понятия

Различают скалярные величины (масса, объём, площадь, длина и т. д.), которые определяются своим численным значением, и векторные величины (сила, скорость, ускорение и т. д.), определяемые не только своим числовым значением, но и направлением. Векторные величины геометрически изображаются с помощью векторов.

Вектором (геометрическим вектором) называется направленный отрезок, имеющий определённую длину и определённое направление.

Векторы обозначаются либо так: $\overline{AB}$ (точка A – начало вектора, точка B – конец вектора), либо так: $\bar{a}$. Длиной (модулем) вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $|\overline{AB}|$(или $|\bar{a}|$).

Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают, длина нулевого вектора равна нулю. Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором и обозначается $\bar{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, называется его ортом и обозначается $\overline{a^0}$.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых, записывают $\bar{a}||\bar{b}$.

Если $\bar{a}||\bar{b}$, то либо они направлены одинаково и тогда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются сонаправленными и обозначаются как $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$, либо векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ направлены противоположно и обозначаются как $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$.

Заметим, что нулевой вектор $\bar{0}$ считается коллинеарными любому вектору $\bar{a}$.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются равными $(\bar{a} = \bar{b})$,если они сонаправленные $(\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b})$ и имеют одинаковые длины $(|\bar{a}| = |\bar{b}|)$. Отсюда следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора поместить в любую точку пространства.

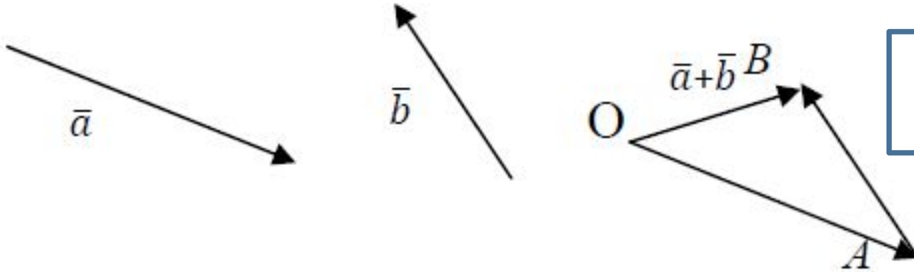
Векторы, лежащие на одной плоскости или на параллельных плоскостях, называются компланарными.

4.2

Линейные операции над векторами

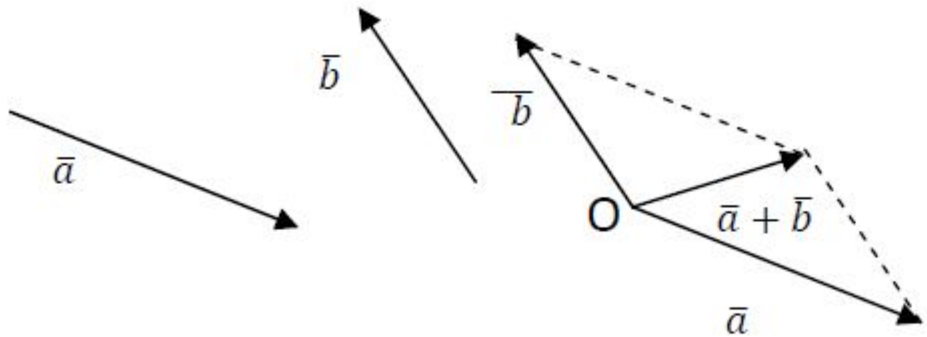
Линейные операции над векторами – сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число. Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – произвольные векторы и точка 0 – произвольная точка. Построим вектор $\overline{OA} = \bar{a}$. От точки A отложим вектор $\overline{AB} = \bar{b}$. Вектор $\overline{OB}$ называется суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{a} + \bar{b} = \overline{OB}$.

4.3



Это правило сложения векторов называется <u>правилом треугольника</u>.

Сумму неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ можно построить по <u>правилу параллелограмма</u> (рис. 2.2).



Сумму произвольного числа векторов $\overline{a_1} + \overline{a_2} + \cdots + \overline{a_k}$ можно построить по следующему правилу: приложим вектор $\overline{a_2}$ к концу вектора $\overline{a_1}$, вектор $\overline{a_3}$ – к концу вектора $\overline{a_2}$ и т. д.; тогда сумма k векторов будет представлять собой вектор с началом, совпадающим с началом вектора $\overline{a_1}$, и концом, совпадающим с концам вектора $\overline{a_k}$.

4.4

На рис. 2.3 показано сложение трёх векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$.

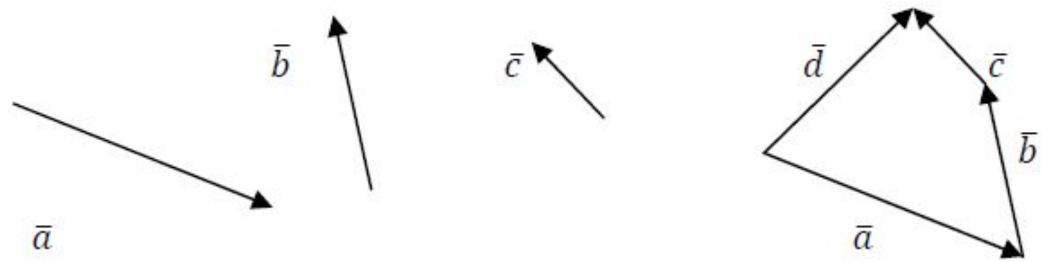


Рис. 2.3.

Разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ такой, что $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$ (рис 2.4).

$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$

Рис. 2.4.

Заметим, что в параллелограмме, построенном на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, одна направленная диагональ является суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а другая – разностью (рис. 2.5).

Можно рассматривать разность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как сумму векторов $\bar{a}$ и $(-\bar{b})$, противоположного вектору $\bar{b}$, $\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b})$.

<u>Произведением вектора $\bar{a}$ на действительное число α</u> называется вектор $\alpha\bar{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

4.5

1) $|\alpha\bar{a}|=|\alpha||\bar{a}|$,
2) $(\alpha\bar{a})||\bar{a}$,
3) $\alpha\bar{a}, \bar{a}$ – векторы сонаправленные, если α>0, и противоположно, если α<0 (если α=0, то $\alpha\bar{a}=\bar{0}$).

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1) $\bar{a}+\bar{b}=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$,
2) a+$(\bar{b}+\bar{c})$=$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$,
3) $\bar{a}+\bar{0}=a$,
4) $\bar{a}+(-1)\bar{a}=\bar{0}$,
5) $\alpha(\bar{a}+\bar{b})=\alpha\bar{a}+\alpha\bar{b}$,
6) $(\alpha+\beta)\bar{a}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{a}$,
7) $(\alpha\beta)\bar{a}=\alpha(\beta\bar{a})$,
8) $1\cdot\bar{a}=1\cdot\bar{a}$ для любых векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и любых $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$.

Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось l.

Проекцией (ортогональной проекцией) точки A на ось l называется основание A_1 перпендикуляра, опущенного из точки A на ось l (рис. 2.6).

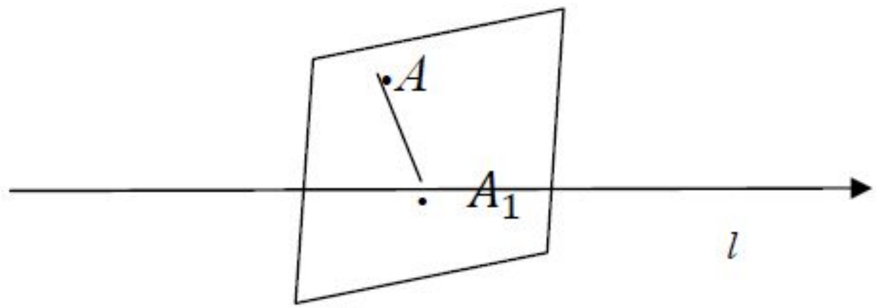


Рис. 2.6.

4.6

Пусть $\overline{AB} \neq \overline{0}$ – ненулевой произвольный вектор, A_1 и B_1 – проекции точек A и B соответственно вектора $\overline{AB}$ (рис. 2.7).

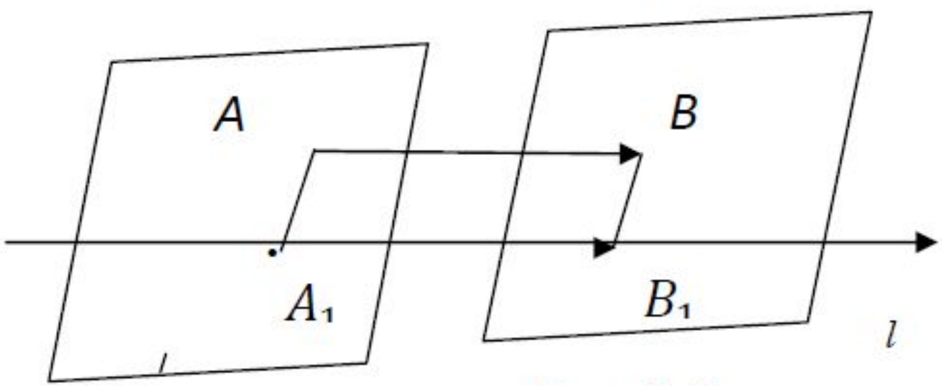


Рис. 2.7.

Проекцией (ортогональной проекцией) вектора $\overline{AB}$ на ось l называется положительное число $|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{AB}$ и ось l одинаково направлены; отрицательное число $(-|\overline{A_1B_1}|)$, если вектор $\overline{AB}$ и ось l противоположно направлены; число 0, если A_1=B_1 (т. е. $\overline{AB} = \bar{0}$). Обозначение: пр$_l\,\overline{AB}$.

Углом φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) между векторами $\bar{a}$ и осью l (или между двумя векторами) называется угол кратчайшего поворота оси до совмещения её направления с направлением вектора (аналогично определяется угол между двумя векторами) (рис. 2.8).

Проекция вектора $\bar{a}$ на ось l находится по формуле

$$\text{пр}_l\bar{a} = |\bar{a}|cos\varphi.$$

Отметим основные свойства проекций:

1) если $\bar{a} = b$, то пр$_l\,\bar{a}$=пр$_l\bar{b}$,
2) пр$_l$ $(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c})$= пр$_l\bar{a}$+ пр$_l\bar{b}$ − пр$_l\bar{c}$,
3) пр$_l(\alpha\bar{a}) = \alpha$ пр$_l\,\bar{a}$.

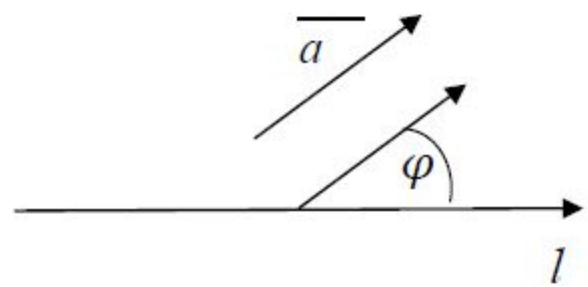
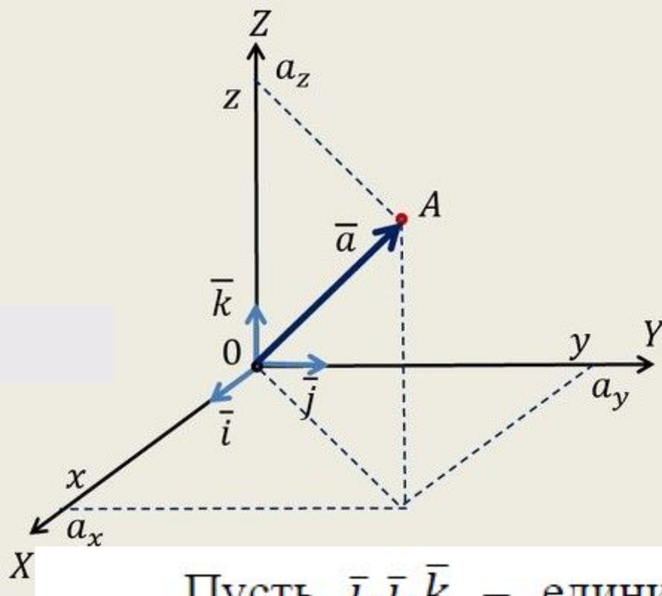


Рис. 2.8.

Разложение вектора по базису. Длина вектора. Направляющие косинусы



$$\overline{i} = (1,0,0);$$
$$\overline{j} = (0,1,0);$$
$$\overline{k} = (0,0,1);$$

4.8

Пусть $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – единичные векторы осей прямоугольной системы координат $Oxyz$. Эти векторы образуют базис. Поэтому любой вектор $\overline{a}$ пространства можно разложить по этому базису:

где a_x, a_y, a_k – координаты вектора $\overline{a}$. Они представляют собой проекции вектора на оси координат.

Если даны начало вектора $A(x_A, y_A, z_A)$, и конец $B(x_B, y_B, z_B)$, то имеем:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A)\overline{i} + (y_B - y_A)\overline{j} + (z_B - z_A)\overline{k}$$

или $\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

В частном случае, когда начало вектора $\overline{OB}$ находится в начале координат, то имеем: $\overline{OB} = x_B\overline{i} + y_B\overline{j} + z_B\overline{k} = (x_B, y_B, z_B)$,

т. е. в этом случае координаты вектора совпадают с координатами конца вектора. Заметим, что вектор $\overline{OB}$ называется радиусом - вектором точки B.

Длина вектора $\overline{AB}$ находится по формуле

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}\ .$$

В частности, длина вектора $\overline{OB}$:

$$|\overline{OB}| = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2}\ .$$

4.9

Пример

1) Пусть точки $A(-2,3,0)$ и $B(1,2,-1)$ – начало и конец соответственно вектора $\overline{AB}$. Найти длину векторов $\overline{AB}, \overline{OB}, \overline{OA}$.

Решение.

Найдём координаты векторов $\overline{AB}, \overline{OB}, \overline{OA}$. Используем формулы (2.5) и (2.6).

$$\overline{AB} = (1 - (-2); 2 - 3; -1 - 0) = (3, -1, -1),$$

$$\overline{OA} = (2,3,0);\ \overline{OB} = (1,2,-1).$$

Тогда

$$|\overline{AB}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11},$$

$$|\overline{OA}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 9 + 0} = \sqrt{13},$$

$$|\overline{OB}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}.$$

Ответ: $|\overline{AB}| = \sqrt{11}, |\overline{OA}| = \sqrt{13}, |\overline{OB}| = \sqrt{6}$.

Действия над векторами, заданными своими координатами

Пусть векторы $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$и $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ заданы своими координатами или иначе $\bar{a} = a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k}, \bar{b} = b_x\bar{\imath} + b_y\bar{\jmath} + b_z\bar{k}$.

Тогда

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm a_x)\bar{\imath} + (a_y \pm b_y)\bar{\jmath} + (a_z \pm b_z)\bar{k}$$

$$\alpha a = \alpha a_x\bar{\imath} + \alpha a_y\bar{\jmath} + \alpha a_z\bar{k} = (\alpha a_x; \alpha a_y; \alpha a_z)$$

4.10

Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны тогда и только тогда, когда выполняются равенства: $a_x=b_x$, $a_y=b_y$, $a_z=b_z$ (т. е. равны у них соответствующие координаты).

$$\bar{a} = \bar{b} <=> \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases}$$

Пример

Найти координаты вектора $-4\bar{a} + 3\bar{b}$, если $\bar{a} = (-1,2,-3), \bar{b} =$
$= (4,0,1)$.

Решение.

Найдём координаты векторов $(-4)\bar{a}$и $3\bar{b}$: $-4\bar{a} = (4,-8,12)$,
$3\bar{b} = (12,0,3)$, тогда $-4\bar{a} + 3\bar{b} = (4 + 12, -8 + 0, 12 + 3) =$
$= (16,-8,15)$.

Ответ: $-4\bar{a} + 3\bar{b} = (16,-8,15)$.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны (т.е. $\bar{a} = \lambda\bar{b}, \lambda -$ некоторое число) тогда и только тогда, когда

$a_x = \lambda b_x, a_y = \lambda b_y, a_z = \lambda b_z$, т. е.

$$\bar{a} = \lambda\bar{b} <=> \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

4.11

Скалярное произведение векторов

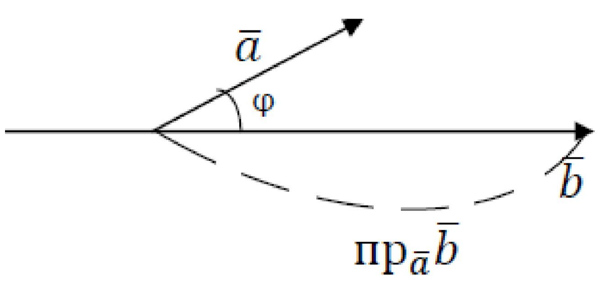
Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, обозначаемое $\bar{a}\bar{b}$ и равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|cos\varphi, \quad \text{где} \quad \varphi=(\bar{a}\hat{}\,\bar{b}).$$

Другие обозначения скалярного произведения: $\bar{a} \cdot \bar{b}, (\bar{a}, \bar{b})$.

$$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}|cos\varphi, \text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|cos\varphi$$

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$$



Свойства скалярного произведения

4.12

1) $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$,
2) $(\alpha\bar{a})\bar{b} = \bar{a}(\alpha\bar{b}) = \alpha(\bar{a}\bar{b})$,
3) $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$,
4) $\bar{a}\bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$,
5) ненулевые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\bar{a}\bar{b} = 0$, т. е.

$$\bar{a} \neq \bar{0}, \bar{b} \neq \bar{0}, \bar{a} \perp \bar{b} <=> \bar{a}\bar{b} = 0.$$

Заметим, что $\sqrt{\bar{a}^2} = |\bar{a}|$ $(\sqrt{\bar{a}^2} \neq \bar{a})$.

Пример

Найти модуль вектора $\bar{c} = 2\bar{a} + 5\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 3, |\bar{b}| = 4$, $(\bar{a}\hat{}\bar{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Решение.

$$|\bar{c}| = \sqrt{\bar{c}^2} = \sqrt{(2\bar{a} + 5\bar{b}, 2\bar{a} + 5\bar{b})} = \sqrt{4\bar{a}^2 + 20\bar{a}\bar{b} + 25|\bar{b}|^2} =$$

$$\sqrt{4 \cdot 3^2 + 20 \cdot 3 \cdot 4\cos\frac{\pi}{3} + 25 \cdot 4^2} = \sqrt{36 + 120 + 400} = \sqrt{556} =$$

$$= 2\sqrt{139}.$$

Ответ: $|\bar{c}| = 2\sqrt{139}$.

Выражения скалярного произведения через координаты векторов

Пусть векторы $\bar{a}, b$ в прямоугольной системе координат Oxyz заданы своими координатами: $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$(т. е. $\bar{a} = a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k}, \bar{b} = b_x\bar{\imath} + b_y\bar{\jmath} + b_z\bar{k}$). $\bar{a}\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Угол между ненулевыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ можно найти из соотношения

$$cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} * \sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

4.13

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – ненулевые, то необходимое и достаточное условия перпендикулярности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ следующие:

$$\bar{a} \neq \bar{0}, \bar{b} \neq \bar{0}, \bar{a} \perp \bar{b} <=> a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Обозначим через α, β, γ углы, образованные вектором $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно. Тогда справедливы следующие формулы:

$$cos\alpha = \frac{\bar{a}\bar{\imath}}{|\bar{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$cos\beta = \frac{\bar{a}\bar{\jmath}}{|\bar{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$cos\gamma = \frac{\bar{a}\bar{k}}{|\bar{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$$

Величины $cos\alpha, cos\beta, cos\gamma$ называются <u>направляющими косинусами</u> вектора $\bar{a}$.

Приложение скалярного произведения

4.14

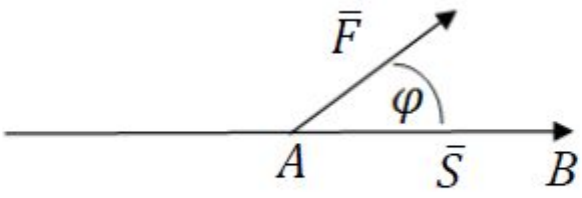


Рис. 2.10.

Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из положения A в положение B под действием постоянной силы $\bar{F}$, образующей угол φ с перемещением $\overline{AB} = \bar{S}$ (рис. 2.10) Известно, что работа силы $\bar{F}$ при перемещении $\bar{S}$ равна $A = \bar{F} \cdot \bar{S} cos\varphi$, т. е. $A = \bar{F}\bar{S}$. Следовательно, работа постоянной силы при прямолинейном перемещении её точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Пример 2.5.

Вычислить работу, произведённую силой $\bar{F} = (3,2,4)$, если точка её приложения перемещается, прямолинейно из положения $A(2,-4,4)$ в положение $B(4,2,3)$. Под каким углом к $\overline{AB}$ направлена сила $\bar{F}$?

Решение.

Найдём $\bar{S} = \overline{AB} = (2,6,-1)$ тогда $A = \bar{F}\bar{S} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot (-1) =$

$= 14$ (ед. работы) и $cos\,\varphi = \frac{\bar{F}\bar{S}}{|\bar{F}||\bar{S}|} = \frac{14}{\sqrt{9+4+1}\cdot\sqrt{4+36+1}} = \frac{14}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{41}} =$

$= \sqrt{\frac{14}{41}}, \varphi = arccos\sqrt{\frac{14}{41}}.$

Векторное произведение векторов

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор, обозначаемый символом $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ и удовлетворяющий следующим трём условиям:

1) длина вектора $\bar{c} = \bar{a} \times b$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, приведённых к общему началу, т. е. $\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = |\bar{a}||\bar{b}|sin\varphi$, где $\varphi = (\bar{a},\hat{}\,\bar{b})$,

4.15

2) вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т. е. $\bar{c} \perp \bar{a}$ и $\bar{c} \perp \bar{b}$,

3) вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ относительно векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ направлен так же, как ось Oz направлена относительно оси Ox и Oy (рис. 2.11).

Другое обозначение векторного произведения: $[\bar{a}, \bar{b}]$.

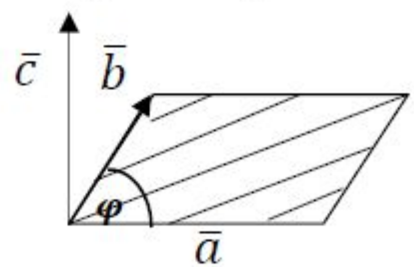


Рис. 2.11.

Условие 3) можно выразить и так: векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ образуют правую тройку векторов, т. е. эти векторы (приведённые к общему началу) располагаются в порядке нумерации аналогично большому, указательному и среднему пальцам правой руки («правило правой руки»).

4.16

1. Свойства векторного произведения:

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$,

2) $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \lambda(\bar{a} \times \bar{b})$, где $\lambda \in \boldsymbol{R}$,

3) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$,

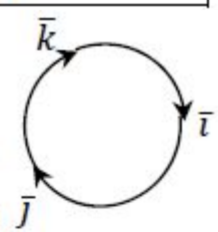
4) пусть $\bar{a} \neq \bar{0}$ и $\bar{b} \neq \bar{0}$, тогда для того, чтобы векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

Выражение векторного произведения векторов через координаты векторов

Составим таблицу векторного умножения базисных векторов $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$ в прямоугольной системе координат:

$\times$	$\bar{\imath}$	$\bar{\jmath}$	$\bar{k}$
$\bar{\imath}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	$-\bar{\jmath}$
$\bar{\jmath}$	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	$\bar{\imath}$
$\bar{k}$	$\bar{\jmath}$	$-\bar{\imath}$	$\bar{0}$

При определении знака удобно пользоваться схемой:



Если направление кратчайшего пути от первого вектора к второму совпадает с направлением стрелки, то произведение равно третьему вектору, если не совпадаем – третий вектор берётся со знаком «минус».

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ разложены по базису $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$:

$\bar{a} = a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k}, \quad \bar{b} = b_x\bar{\imath} + b_y\bar{\imath} + b_z\bar{k}.$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{\imath} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{\jmath} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

4.17

Приложения

1) Установление коллинеарности векторов.

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – ненулевые. Тогда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны $(\bar{a}||\bar{b})$ в том и только в том случае, когда $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$, т. е.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{0} <=> \frac{a_x}{a_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} <=> \bar{a}||\bar{b}.$$

2) Нахождение площади параллелограмма и треугольника.

По определению векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ $|\bar{a} \times \bar{b}| =$

$= |\bar{a}||\bar{b}| \sin(\bar{a} \wedge \bar{b}) = S\text{пар.} = 2S\,\Delta$

3) Определения момента силы относительно точки.

Пусть в точке A приложена сила $\bar{F} = \overline{AB}$ и O − некоторая точка пространства (рис.2. 12).

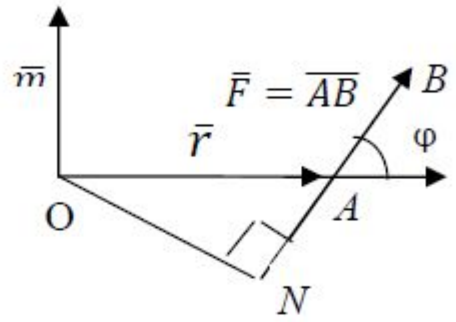


Рис. 2.12.

4.18

Из физики известно, что моментом силы F относительно точки O называется вектор $\bar{m}$, который проходит через точку O и:

1) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B,

2) численно равен произведению силы на плечо $|\bar{m}| = |\bar{F}| \cdot |\bar{r}| sin\varphi = |\bar{F}||\overline{OA}| \sin(\bar{F}, \wedge\overline{OA})$,

3) образует правую тройку с векторами $\overline{OA}, \overline{AB}$.

$$\bar{m} = \overline{OA} \times \bar{F}$$

Пример

Даны точки $A(2,-1,2)$, $B(1,2,-1)$ и $C(3,2,1)$. Найти площадь треугольника ABC.

4.19

Решение.

1) Найдём векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} = (1-2, 2-(-1), -1-2) = (-1,3,-3)$$
$$\overline{AC} = (3-2, 2-(-1), 1-2) = (1,3,-1)$$

2) Вычислим векторное произведение:

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\bar{\imath} - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\bar{\jmath} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\bar{k} =$$
$$= 6\bar{\imath} - 4\bar{\jmath} - 6\bar{k}.$$

3) $$S\Delta_{ABC} = \frac{1}{2}S\text{пар.} = \frac{1}{2}\left|6\bar{\imath} - 4\bar{\jmath} - 6\bar{k}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-6)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{84} = \sqrt{21}\ (\text{кв. ед.}).$$

Пример

Даны векторы $\bar{a} = (2,3,5)$ и $\bar{b} = (1,2,1)$. Найти координаты вектора, перпендикулярного векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Решение.

Найдём векторное произведение векторов данных векторов:

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \bar{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \bar{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \bar{k} = -7\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} + \bar{k}.$$

Согласно определению векторного произведения, вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

4.20

Пример

Сила $\bar{F} = (2, -4{,}5)$ приложена к точке $A(4,-2,3)$. Определить момент этой силы относительно точки O(3,2,-1).

Решение.

Найдём вектор $\overline{OA}$:

$$\overline{OA} = (4 - 3; 2 - (-2);\ -1 - 3) = (1{,}4, -4).$$

Тогда момент $\bar{m}$ силы $\bar{F}$ относительно точки O согласно формуле равен:

$$\bar{m} = \bar{F} \times \overline{OA} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} \bar{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \bar{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \bar{k} =$$

$$= -4\bar{\imath} + 13\bar{\jmath} + 12\bar{k} = (-4, 13, 12).$$

Смешанное произведение векторов

4.21

Смешанным произведением векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число $(\bar{a} \times \bar{b})\,\bar{c}$. Выясним геометрический смысл выражения $(\bar{a} \times \bar{b})c$. Построим параллелепипед, рёбрами которого являются векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и вектор $\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b}$ (рис. 2.13).

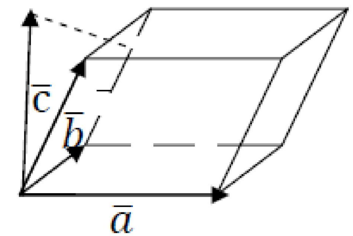


Рис. 2.13.

Имеем: $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \bar{d}\bar{c} = |\bar{d}|\text{пр}_{\bar{d}}\bar{c} = |\bar{a} \times \bar{b}|\text{пр}_{\bar{d}}\bar{c} = S\text{пар} \cdot H$,

где H − высота параллелепипеда и

$$\text{пр}_{\bar{d}}\bar{c} = \begin{cases} H, \text{если тройка векторов } \bar{a}, \bar{b} \text{ и } \bar{c} - \text{правая}, \\ -H, \text{если тройка векторов } \bar{a}, \bar{b} \text{ и } \bar{c} - \text{левая}. \end{cases}$$

Свойства смешанного произведения

1) Из геометрического смысла смешанного произведения следует, что $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c})$; это позволяет обозначать смешанное произведение символом $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$,

2) $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a}$ (при перестановке любых двух сомножителей смешанное произведение меняет знак),

3) $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b}$,

4) пусть $\bar{a} \neq \bar{0}, \bar{b} \neq \bar{0}$, тогда для того, чтобы векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$.

Выражение смешанного произведения через координаты векторов

Пусть векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ разложены по базису $\bar{\imath}, \bar{\jmath}$ и $\bar{k}$: $\bar{a} = a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k}$, $\bar{b} = b_x\bar{\imath} + b_y\bar{\jmath} + b_z\bar{k}$, $\bar{c} = c_x\bar{\imath} + c_y\bar{\jmath} + c_z\bar{k}$.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad 4.22$$

Приложения смешанного произведения

1) Определение взаимной ориентации векторов в пространстве

Если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$, то тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – правая, если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$, то тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – левая.

2) Определение объёмов параллелепипеда и треугольной пирамиды.

Согласно геометрическому смыслу смешанного произведения векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, объём параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен:

$$V = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}|.$$

А объём треугольной пирамиды, построенной на этих векторах, равен:

$$V = \frac{1}{6}|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|.$$

Пример

Найти объём треугольной пирамиды, если даны координаты её вершин $A(1, -1, -1)$, $B(0,5,4)$, $C(2, -3, -4)$, $D(5, -4, -6)$.

Решение.

Найдём координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$.

$$\overline{AB} = (-1, 6, 5), \qquad \overline{AC} = (1, -2, -3), \qquad \overline{AD} = (4, -3, -5).$$

Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 21 & 15 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -18.$$

Тогда объём параллелепипеда, построенного на трёх рассматриваемых векторах, равен: $V = |-18| = 18$, а искомый объём треугольной пирамиды $ABCD$ равен: Vпир.$= \frac{1}{3}V = \frac{18}{5} = 3$ куб. ед.