

Векторная алгебра

The background features a decorative geometric pattern of triangles in various shades of blue, purple, and teal, arranged in a stylized, abstract manner.

Векторы. Основные понятия

Различают скалярные величины (масса, объём, площадь, длина и т. д.), которые определяются своим численным значением, и векторные величины (сила, скорость, ускорение и т. д.), определяемые не только своим числовым значением, но и направлением. Векторные величины геометрически изображаются с помощью векторов.

Вектором (геометрическим вектором) называется направленный отрезок, имеющий определённую длину и определённое направление.

Векторы обозначаются либо так: \overline{AB} (точка A – начало вектора, точка B – конец вектора), либо так: \vec{a} . Длиной (модулем) вектора \overline{AB} называется длина отрезка AB и обозначается $|\overline{AB}|$ (или $|\vec{a}|$).

Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают, длина нулевого вектора равна нулю. Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором и обозначается \vec{e} . Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора \vec{a} , называется его ортом и обозначается \vec{a}^0 .

Векторы \bar{a} и \bar{b} называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых, записывают $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то либо они направлены одинаково и тогда векторы \bar{a} и \bar{b} называются сонаправленными и обозначаются как $\bar{a} \uparrow \uparrow \bar{b}$, либо векторы \bar{a} и \bar{b} направлены противоположно и обозначаются как $\bar{a} \uparrow \downarrow \bar{b}$.

Заметим, что нулевой вектор $\bar{0}$ считается коллинеарными любому вектору \bar{a} .

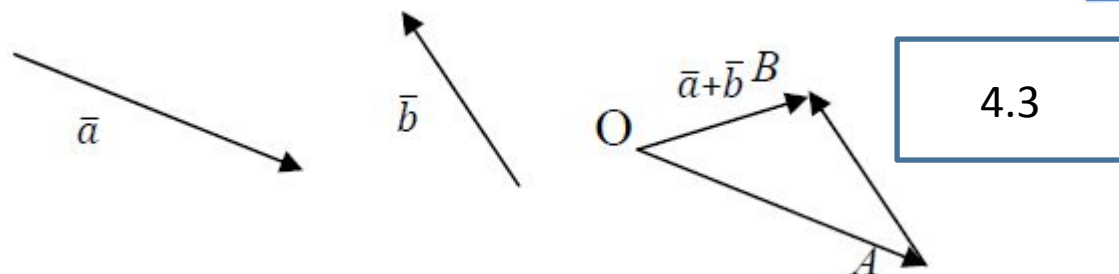
Векторы \bar{a} и \bar{b} называются равными ($\bar{a} = \bar{b}$), если они сонаправленные ($\bar{a} \uparrow \uparrow \bar{b}$) и имеют одинаковые длины ($|\bar{a}| = |\bar{b}|$). Отсюда следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора поместить в любую точку пространства.

Векторы, лежащие на одной плоскости или на параллельных плоскостях, называются компланарными.

4.2

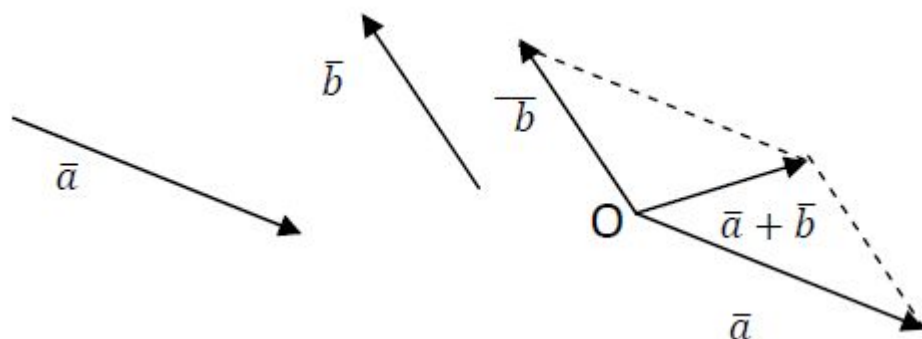
Линейные операции над векторами

Линейные операции над векторами – сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число. Пусть \bar{a} и \bar{b} – произвольные векторы и точка O – произвольная точка. Построим вектор $\overline{OA} = \bar{a}$. От точки A отложим вектор $\overline{AB} = \bar{b}$. Вектор \overline{OB} называется суммой векторов \bar{a} и \bar{b} : $\bar{a} + \bar{b} = \overline{OB}$.



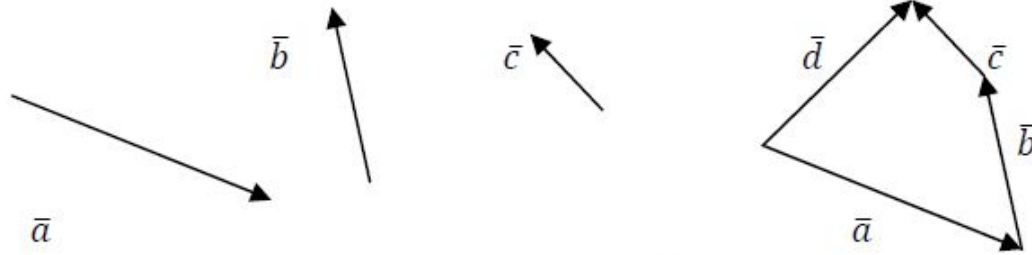
Это правило сложения векторов называется правилом треугольника.

Сумму неколлинеарных векторов \bar{a} и \bar{b} можно построить по правилу параллелограмма (рис. 2.2).



Сумму произвольного числа векторов $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_k$ можно построить по следующему правилу: приложим вектор \bar{a}_2 к концу вектора \bar{a}_1 , вектор \bar{a}_3 – к концу вектора \bar{a}_2 и т. д.; тогда сумма k векторов будет представлять собой вектор с началом, совпадающим с началом вектора \bar{a}_1 , и концом, совпадающим с концом вектора \bar{a}_k .

На рис. 2.3 показано сложение трёх векторов \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} .



4.4

Рис. 2.3.

Разностью векторов \bar{a} и \bar{b} называется вектор $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ такой, что $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$ (рис 2.4).



Рис. 2.4.

Заметим, что в параллелограмме, построенном на векторах \bar{a} и \bar{b} , одна направленная диагональ является суммой векторов \bar{a} и \bar{b} , а другая – разностью (рис. 2.5).



Можно рассматривать разность векторов \bar{a} и \bar{b} как сумму векторов \bar{a} и $(-\bar{b})$, противоположного вектору \bar{b} , $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$.

Произведением вектора \bar{a} на действительное число α называется вектор $\alpha\bar{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

4.5

1) $|\alpha\bar{a}| = |\alpha||\bar{a}|$,

2) $(\alpha\bar{a}) \parallel \bar{a}$,

3) $\alpha\bar{a}, \bar{a}$ – векторы сонаправленные, если $\alpha > 0$, и противоположно, если $\alpha < 0$ (если $\alpha = 0$, то $\alpha\bar{a} = \bar{0}$).

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1) $\bar{a} + \bar{b} = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$,

2) $\alpha(\bar{b} + \bar{c}) = (\alpha\bar{b} + \alpha\bar{c})$,

3) $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$,

4) $\bar{a} + (-1)\bar{a} = \bar{0}$,

5) $\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$,

6) $(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$,

7) $(\alpha\beta)\bar{a} = \alpha(\beta\bar{a})$,

8) $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$ для любых векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось l .

Проекцией (ортогональной проекцией) точки A на ось l называется основание A_1 перпендикуляра, опущенного из точки A на ось l (рис. 2.6).

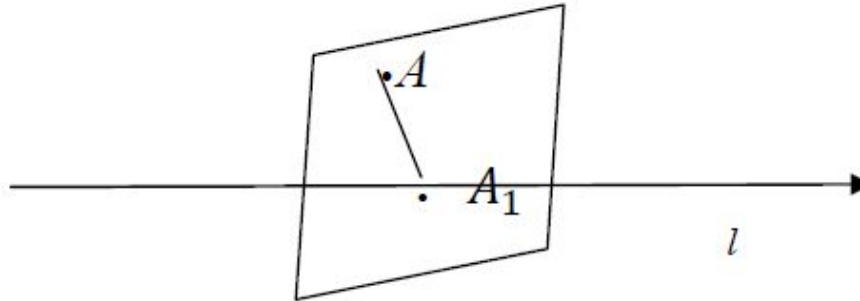


Рис. 2.6.

4.6

Пусть $\overline{AB} \neq \vec{0}$ – ненулевой произвольный вектор, A_1 и B_1 – проекции точек A и B соответственно вектора \overline{AB} (рис. 2.7).

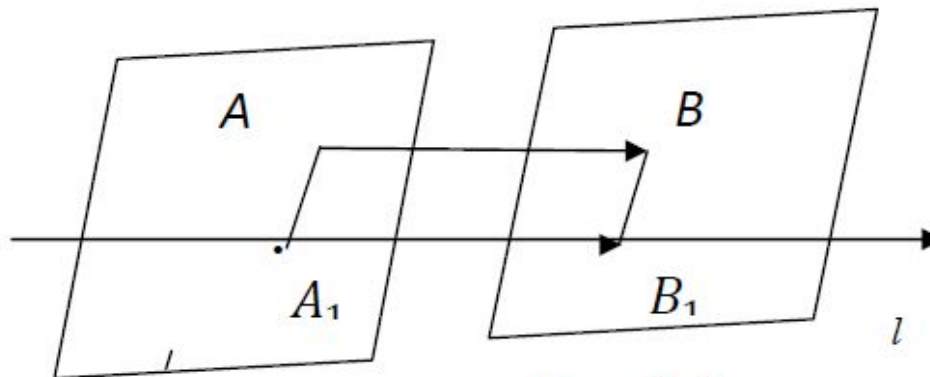


Рис. 2.7.

Проекцией (ортогональной проекцией) вектора \overline{AB} на ось l называется положительное число $|\overline{A_1B_1}|$, если вектор \overline{AB} и ось l одинаково направлены; отрицательное число $(-|\overline{A_1B_1}|)$, если вектор \overline{AB} и ось l противоположно направлены; число 0, если $A_1=B_1$ (т. е. $\overline{AB} = \overline{0}$).
Обозначение: $\text{пр}_l \overline{AB}$.

Углом φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) между векторами \bar{a} и осью l (или между двумя векторами) называется угол кратчайшего поворота оси до совмещения её направления с направлением вектора (аналогично определяется угол между двумя векторами) (рис. 2.8).

Проекция вектора \bar{a} на ось l находится по формуле

$$\text{пр}_l \bar{a} = |\bar{a}| \cos \varphi.$$

Отметим основные свойства проекций:

- 1) если $\bar{a} = \bar{b}$, то $\text{пр}_l \bar{a} = \text{пр}_l \bar{b}$,
- 2) $\text{пр}_l (\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}) = \text{пр}_l \bar{a} + \text{пр}_l \bar{b} - \text{пр}_l \bar{c}$,
- 3) $\text{пр}_l (\alpha \bar{a}) = \alpha \text{пр}_l \bar{a}$.

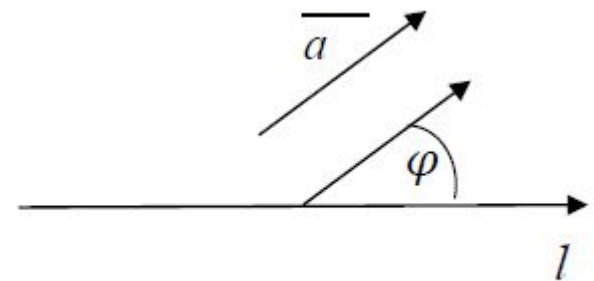
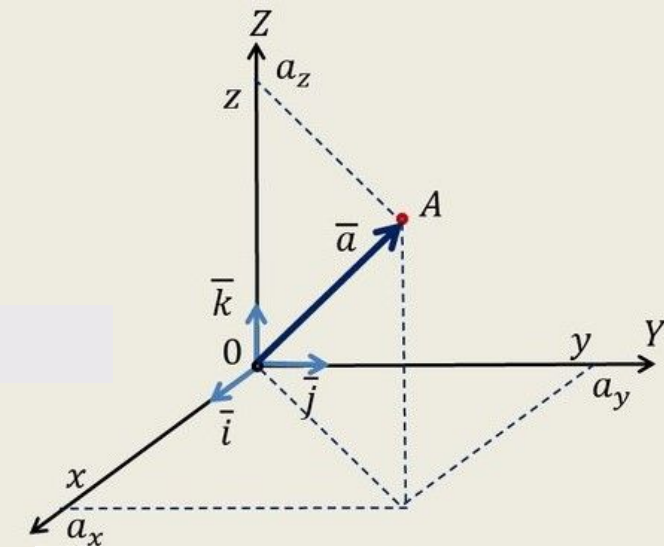


Рис. 2.8.

Разложение вектора по базису. Длина вектора. Направляющие косинусы



$$\bar{i} = (1, 0, 0);$$

$$\bar{j} = (0, 1, 0);$$

$$\bar{k} = (0, 0, 1);$$

4.8

Пусть $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – единичные векторы осей прямоугольной системы координат $Oxyz$. Эти векторы образуют базис. Поэтому любой вектор \bar{a} пространства можно разложить по этому базису:

где a_x, a_y, a_z – координаты вектора \bar{a} . Они представляют собой проекции вектора на оси координат.

Если даны начало вектора $A(x_A, y_A, z_A)$, и конец $B(x_B, y_B, z_B)$, то имеем:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A)\bar{i} + (y_B - y_A)\bar{j} + (z_B - z_A)\bar{k}$$

$$\text{или } \overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

В частном случае, когда начало вектора \overline{OB} находится в начале координат, то имеем: $\overline{OB} = x_B\bar{i} + y_B\bar{j} + z_B\bar{k} = (x_B, y_B, z_B)$,

т. е. в этом случае координаты вектора совпадают с координатами конца вектора. Заметим, что вектор \overline{OB} называется радиусом - вектором точки B .

Длина вектора \overline{AB} находится по формуле

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

В частности, длина вектора \overline{OB} :

$$|\overline{OB}| = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2}.$$

4.9

Пример

1) Пусть точки $A(-2,3,0)$ и $B(1,2,-1)$ – начало и конец соответственно вектора \overline{AB} . Найти длину векторов \overline{AB} , \overline{OB} , \overline{OA} .

Решение.

Найдём координаты векторов \overline{AB} , \overline{OB} , \overline{OA} . Используем формулы (2.5) и (2.6).

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (1 - (-2); 2 - 3; -1 - 0) = (3, -1, -1), \\ \overline{OA} &= (2, 3, 0); \overline{OB} = (1, 2, -1).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}|\overline{AB}| &= \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11}, \\ |\overline{OA}| &= \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 9 + 0} = \sqrt{13}, \\ |\overline{OB}| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}.\end{aligned}$$

Ответ: $|\overline{AB}| = \sqrt{11}$, $|\overline{OA}| = \sqrt{13}$, $|\overline{OB}| = \sqrt{6}$.

Действия над векторами, заданными своими координатами

Пусть векторы $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ заданы своими координатами или иначе $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$.

Тогда

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x)\bar{i} + (a_y \pm b_y)\bar{j} + (a_z \pm b_z)\bar{k}$$

$$\alpha\bar{a} = \alpha a_x\bar{i} + \alpha a_y\bar{j} + \alpha a_z\bar{k} = (\alpha a_x; \alpha a_y; \alpha a_z)$$

4.10

Два вектора \bar{a} и \bar{b} равны тогда и только тогда, когда выполняются равенства: $a_x=b_x$, $a_y=b_y$, $a_z=b_z$ (т. е. равны у них соответствующие координаты).

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases}$$

Пример

Найти координаты вектора $-4\bar{a} + 3\bar{b}$, если $\bar{a} = (-1, 2, -3)$, $\bar{b} = (4, 0, 1)$.

Решение.

Найдём координаты векторов $(-4)\bar{a}$ и $3\bar{b}$: $-4\bar{a} = (4, -8, 12)$, $3\bar{b} = (12, 0, 3)$, тогда $-4\bar{a} + 3\bar{b} = (4 + 12, -8 + 0, 12 + 3) = (16, -8, 15)$.

Ответ: $-4\bar{a} + 3\bar{b} = (16, -8, 15)$.

Векторы \bar{a} и \bar{b} коллинеарны (т.е. $\bar{a} = \lambda\bar{b}$, λ – некоторое число) тогда и только тогда, когда

$$a_x = \lambda b_x, a_y = \lambda b_y, a_z = \lambda b_z, \text{ т. е.}$$

$$\bar{a} = \lambda\bar{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

4.11

Скалярное произведение векторов

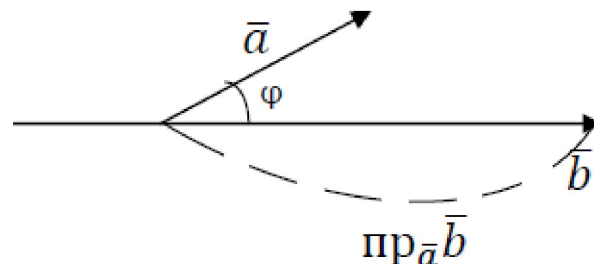
Скалярным произведением векторов \bar{a} и \bar{b} называется число, обозначаемое $\bar{a}\bar{b}$ и равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi, \text{ где } \varphi = (\bar{a} \wedge \bar{b}).$$

Другие обозначения скалярного произведения: $\bar{a} \cdot \bar{b}$, (\bar{a}, \bar{b}) .

$$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi, \text{ пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\cos\varphi$$

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$$



Свойства скалярного произведения

- 1) $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$,
- 2) $(\alpha\bar{a})\bar{b} = \bar{a}(\alpha\bar{b}) = \alpha(\bar{a}\bar{b})$,
- 3) $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$,
- 4) $\bar{a}\bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$,
- 5) ненулевые векторы \bar{a} и \bar{b} взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\bar{a}\bar{b} = 0$, т. е.

$$\bar{a} \neq \bar{0}, \bar{b} \neq \bar{0}, \bar{a} \perp \bar{b} \iff \bar{a}\bar{b} = 0.$$

Заметим, что $\sqrt{\bar{a}^2} = |\bar{a}|$ ($\sqrt{\bar{a}^2} \neq \bar{a}$).

4.12

Пример

Найти модуль вектора $\bar{c} = 2\bar{a} + 5\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, $(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Решение.

$$\begin{aligned} |\bar{c}| &= \sqrt{\bar{c}^2} = \sqrt{(2\bar{a} + 5\bar{b}, 2\bar{a} + 5\bar{b})} = \sqrt{4\bar{a}^2 + 20\bar{a}\bar{b} + 25|\bar{b}|^2} = \\ &= \sqrt{4 \cdot 3^2 + 20 \cdot 3 \cdot 4 \cos \frac{\pi}{3} + 25 \cdot 4^2} = \sqrt{36 + 120 + 400} = \sqrt{556} = \\ &= 2\sqrt{139}. \end{aligned}$$

Ответ: $|\bar{c}| = 2\sqrt{139}$.

Выражения скалярного произведения через координаты векторов

Пусть векторы \bar{a}, \bar{b} в прямоугольной системе координат $Oxyz$ заданы своими координатами: $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ (т. е. $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$). $\bar{a}\bar{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

Угол между ненулевыми векторами \bar{a} и \bar{b} можно найти из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

4.13

Если векторы \bar{a} и \bar{b} – ненулевые, то необходимое и достаточное условия перпендикулярности векторов \bar{a} и \bar{b} следующие:

$$\bar{a} \neq \bar{0}, \bar{b} \neq \bar{0}, \bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.$$

Обозначим через α, β, γ углы, образованные вектором $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно. Тогда справедливы следующие формулы:

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a}\bar{i}}{|\bar{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\bar{a}\bar{j}}{|\bar{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\bar{a}\bar{k}}{|\bar{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Величины $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора \vec{a} .

Приложение скалярного произведения

4.14

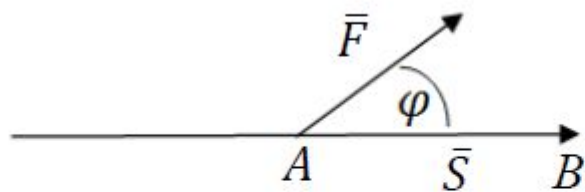


Рис. 2.10.

Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из положения A в положение B под действием постоянной силы \vec{F} , образующей угол φ с перемещением $\overline{AB} = \vec{S}$ (рис. 2.10)

Известно, что работа силы \vec{F} при

перемещении \vec{S} равна $A = \vec{F} \cdot \vec{S} \cos\varphi$, т.е. $A = \vec{F} \vec{S}$. Следовательно, работа постоянной силы при прямолинейном перемещении её точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Пример 2.5.

Вычислить работу, произведённую силой $\vec{F} = (3, 2, 4)$, если точка её приложения перемещается, прямолинейно из положения $A(2, -4, 4)$ в положение $B(4, 2, 3)$. Под каким углом к \overline{AB} направлена сила \vec{F} ?

Решение.

$$\begin{aligned} \text{Найдём } \vec{S} = \overline{AB} &= (2, 6, -1) \text{ тогда } A = \vec{F} \vec{S} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot (-1) = \\ &= 14 \text{ (ед. работы) и } \cos \varphi = \frac{\vec{F} \vec{S}}{|\vec{F}| |\vec{S}|} = \frac{14}{\sqrt{9+4+1} \cdot \sqrt{4+36+1}} = \frac{14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{41}} = \\ &= \sqrt{\frac{14}{41}}, \varphi = \arccos \sqrt{\frac{14}{41}}. \end{aligned}$$

Векторное произведение векторов

Векторным произведением вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется вектор, обозначаемый символом $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ и удовлетворяющий следующим трём условиям:

1) длина вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , приведённых к общему началу, т. е. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$,

2) вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярен векторам \vec{a} и \vec{b} , т. е. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$,

3) вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ относительно векторов \vec{a} и \vec{b} направлен так же, как ось Oz направлена относительно оси Ox и Oy (рис. 2.11).

Другое обозначение векторного произведения: $[\vec{a}, \vec{b}]$.

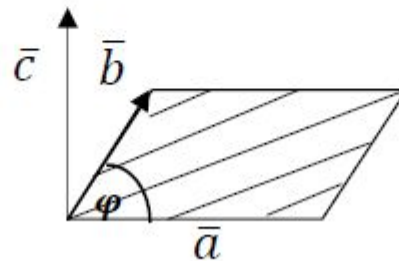


Рис. 2.11.

Условие 3) можно выразить и так: векторы \vec{a} , \vec{b} и $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ образуют правую тройку векторов, т. е. эти векторы (приведённые к общему началу) располагаются в порядке нумерации аналогично большому, указательному и среднему пальцам правой руки («правило правой руки»).

1. Свойства векторного произведения:

$$1) \bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a},$$

$$2) (\lambda \bar{a}) \times \bar{b} = \lambda(\bar{a} \times \bar{b}), \text{ где } \lambda \in \mathbf{R},$$

$$3) \bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c},$$

4) пусть $\bar{a} \neq \bar{0}$ и $\bar{b} \neq \bar{0}$, тогда для того, чтобы векторы \bar{a} и \bar{b} были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

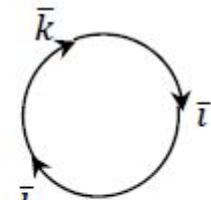
Выражение векторного произведения векторов через координаты векторов

Составим таблицу векторного умножения базисных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ в прямоугольной системе координат:

\times	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
\bar{i}	$\bar{0}$	\bar{k}	$-\bar{j}$
\bar{j}	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	\bar{i}
\bar{k}	\bar{j}	$-\bar{i}$	$\bar{0}$

При определении знака удобно пользоваться схемой:

Если направление кратчайшего пути от первого вектора к второму совпадает с направлением стрелки, то \bar{j} произведение равно третьему вектору, если не совпадаем – третий вектор берётся со знаком «минус».



Пусть векторы \bar{a} и \bar{b} разложены по базису $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \quad \bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}.$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Приложения

4.17

1) Установление коллинеарности векторов.

Пусть векторы \bar{a} и \bar{b} – ненулевые. Тогда векторы \bar{a} и \bar{b} коллинеарны ($\bar{a} \parallel \bar{b}$) в том и только в том случае, когда $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$, т. е.

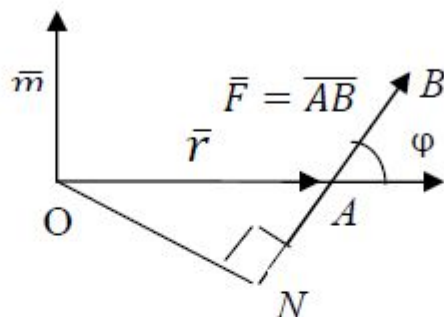
$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{0} \Leftrightarrow \frac{a_x}{a_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}.$$

2) Нахождение площади параллелограмма и треугольника.

$$\begin{aligned} \text{По определению векторного произведения векторов } \bar{a} \text{ и } \bar{b} \quad |\bar{a} \times \bar{b}| &= \\ &= |\bar{a}| |\bar{b}| \sin(\bar{a} \wedge \bar{b}) = S_{\text{пар.}} = 2S_{\Delta} \end{aligned}$$

3) Определения момента силы относительно точки.

Пусть в точке A приложена сила $\vec{F} = \vec{AB}$ и O – некоторая точка пространства (рис.2. 12).



4.18

Рис. 2.12.

Из физики известно, что моментом силы F относительно точки O называется вектор \vec{m} , который проходит через точку O и:

- 1) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B ,
- 2) численно равен произведению силы на плечо $|\vec{m}| = |\vec{F}| \cdot$

$$|\vec{r}| \sin \varphi = |\vec{F}| |\vec{OA}| \sin(\vec{F}, \wedge \vec{OA}),$$

- 3) образует правую тройку с векторами \vec{OA}, \vec{AB} .

$$\vec{m} = \vec{OA} \times \vec{F}$$

Пример

Даны точки $A(2,-1,2)$, $B(1,2,-1)$ и $C(3,2,1)$. Найти площадь треугольника ABC .

Решение.

1) Найдём векторы \overline{AB} и \overline{AC} :

$$\overline{AB} = (1 - 2, 2 - (-1), -1 - 2) = (-1, 3, -3)$$

$$\overline{AC} = (3 - 2, 2 - (-1), 1 - 2) = (1, 3, -1)$$

4.19

2) Вычислим векторное произведение:

$$\begin{aligned}\overline{AB} \times \overline{AC} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \bar{k} = \\ &= 6\bar{i} - 4\bar{j} - 6\bar{k}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3) S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} S_{\text{пар.}} = \frac{1}{2} |6\bar{i} - 4\bar{j} - 6\bar{k}| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-6)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{84} = \sqrt{21} \text{ (кв. ед.)}.\end{aligned}$$

Пример

Даны векторы $\bar{a} = (2,3,5)$ и $\bar{b} = (1,2,1)$. Найти координаты вектора, перпендикулярного векторам \bar{a} и \bar{b} .

Решение.

Найдём векторное произведение векторов данных векторов:

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \bar{k} = -7\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}.$$

Согласно определению векторного произведения, вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ перпендикулярен векторам \bar{a} и \bar{b} .

4.20

Пример

Сила $\bar{F} = (2, -4, 5)$ приложена к точке $A(4, -2, 3)$. Определить момент этой силы относительно точки $O(3, 2, -1)$.

Решение.

Найдём вектор \overline{OA} :

$$\overline{OA} = (4 - 3; 2 - (-2); -1 - 3) = (1, 4, -4).$$

Тогда момент \bar{m} силы \bar{F} относительно точки O согласно формуле равен:

$$\begin{aligned} \bar{m} = \bar{F} \times \overline{OA} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \bar{k} = \\ &= -4\bar{i} + 13\bar{j} + 12\bar{k} = (-4, 13, 12). \end{aligned}$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} называется число $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Выясним геометрический смысл выражения $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Построим параллелепипед, рёбрами которого являются векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и вектор $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ (рис. 2.13).

4.21

Имеем: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \text{пр}_{\vec{d}} \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \text{пр}_{\vec{d}} \vec{c} = S_{\text{пар}} \cdot H$,
где H – высота параллелепипеда и
 $\text{пр}_{\vec{d}} \vec{c} = \begin{cases} H, & \text{если тройка векторов } \vec{a}, \vec{b} \text{ и } \vec{c} \text{ – правая,} \\ -H, & \text{если тройка векторов } \vec{a}, \vec{b} \text{ и } \vec{c} \text{ – левая.} \end{cases}$

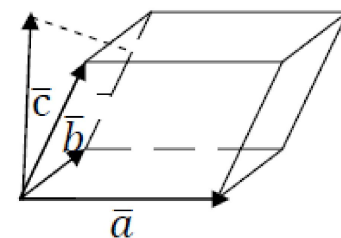


Рис. 2.13.

Свойства смешанного произведения

1) Из геометрического смысла смешанного произведения следует, что $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$; это позволяет обозначать смешанное произведение символом $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$,

2) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$ (при перестановке любых двух сомножителей смешанное произведение меняет знак),

3) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$,

4) пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, тогда для того, чтобы векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Выражение смешанного произведения через координаты векторов

Пусть векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ разложены по базису \bar{i}, \bar{j} и \bar{k} : $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$, $\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$, $\bar{c} = c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}$.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

4.22

Приложения смешанного произведения

1) Определение взаимной ориентации векторов в пространстве

Если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$, то тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – правая, если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$, то тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – левая.

2) Определение объёмов параллелепипеда и треугольной пирамиды.

Согласно геометрическому смыслу смешанного произведения векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, объём параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен:

$$V = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}|.$$

А объём треугольной пирамиды, построенной на этих векторах, равен:

$$V = \frac{1}{6} |\bar{a}\bar{b}\bar{c}|.$$

Пример

Найти объём треугольной пирамиды, если даны координаты её вершин $A(1, -1, -1)$, $B(0, 5, 4)$, $C(2, -3, -4)$, $D(5, -4, -6)$.

Решение.

Найдём координаты векторов \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} .

$$\overline{AB} = (-1, 6, 5), \quad \overline{AC} = (1, -2, -3), \quad \overline{AD} = (4, -3, -5).$$

Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$\begin{aligned} \overline{AB} \overline{AC} \overline{AD} &= \begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 21 & 15 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= 6 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -18. \end{aligned}$$

Тогда объём параллелепипеда, построенного на трёх рассматриваемых векторах, равен: $V = |-18| = 18$, а искомый объём треугольной пирамиды $ABCD$ равен: $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}V = \frac{18}{3} = 3$ куб. ед.