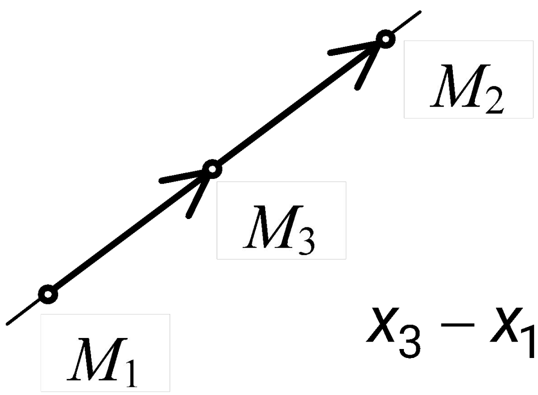
Деление отрезка в данном отношении

- Даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.
- Найти координаты точки M_3, делящей отрезок в отношении λ, т.е. $\frac{|\overrightarrow{M_1M_3}|}{|\overrightarrow{M_3M_2}|} = \lambda$ или $\overrightarrow{M_1M_3} = \lambda\overrightarrow{M_3M_2}$

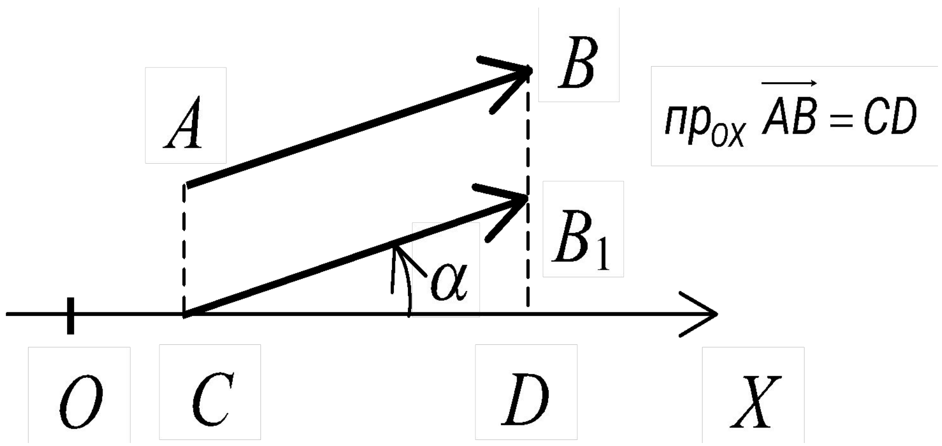


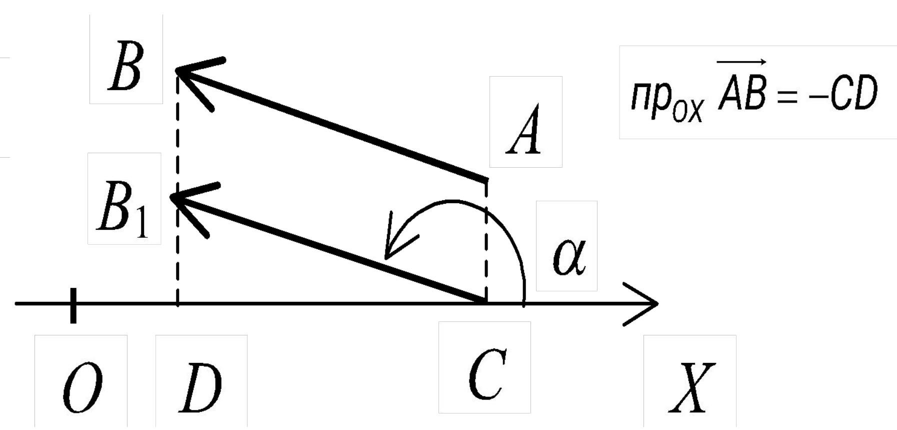
$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$
$$\overrightarrow{M_3M_2} = (x_2 - x_3, y_2 - y_3, z_2 - z_3)$$

$$\begin{matrix} x_3 - x_1 = \lambda(x_2 - x_3), \\ y_3 - y_1 = \lambda(y_2 - y_3), \\ z_3 - z_1 = \lambda(z_2 - z_3), \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y_3 = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \\ z_3 = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \end{cases}$$

Проекция

- **Опр. Проекция** вектора на ось ОХ – длина отрезка оси, заключенного между проекциями его начальной и конечной точек
  - со знаком “+”, если направление отрезка совпадает с направлением оси
  - со знаком “–”, в противном случае.





$$пр_{OX}\,\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\alpha$$

Свойства проекции

- 1. $\text{пр}_e \lambda \vec{a} = \lambda\, \text{пр}_e \vec{a}$
- 2. $\text{ïð}_{\text{å}}(\vec{a}+\vec{b}) = \text{ïð}_{\text{å}}\vec{a} + \text{ïð}_{\text{å}}\vec{b}$

- **Теорема.** Декартовы прямоугольные координаты вектора равны проекциям вектора $\overline{a} = (x, y, z)$ на соответствующие оси декартовой прямоугольной с/к.

$$x = \text{пр}_{OX}\vec{a} \qquad y = \text{пр}_{OY}\vec{a} \qquad z = \text{пр}_{OZ}\vec{a}$$

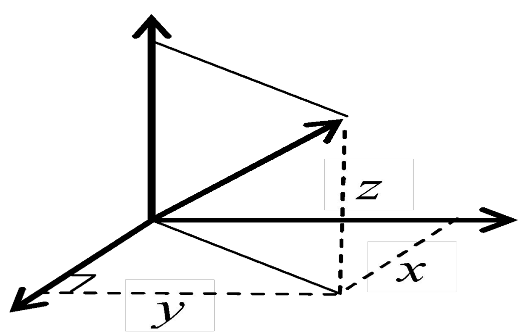
- Из опр. проекции ⇒

$$x = |\vec{a}|\cos\alpha \qquad y = |\vec{a}|\cos\beta \qquad z = |\vec{a}|\cos\gamma$$

где α, β, γ – углы наклона вектора к осям OX, OY, OZ.

- По т.Пифагора

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



Направляющие косинусы

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Скалярное произведение векторов

- Ск. пр. – операция умножения вектора на вектор, в результате которой получается скаляр (число).

$$(\vec a,\vec b)=\vec a\cdot\vec b=|\vec a|\cdot|\vec b|\cos\varphi$$

$$(\vec a,\vec b)=|\vec a|\cdot\text{пр}_{\vec a}\vec b=|\vec b|\cdot\text{пр}_{\vec b}\vec a$$

Свойства

- 1. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$
- 2. $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$
- 3. $(\vec{a}, \lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$, где λ - константа
- 4. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то
$$(\vec{a}, \vec{b}) = \pm |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$
- 4а. $(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

Свойства

- 5. $\vec{a} = \vec{0}$ èëè $\vec{b} = \vec{0},$ òî $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$
- 6. $\boldsymbol{\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0}$
- 7. Åñëè $(\vec{a}, \vec{b}) = 0,\ \vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0},$ òî $\vec{a} \perp \vec{b}$
- 8. $(\vec{i}, \vec{i}) = \vec{i}^{\,2} = 1$
  $(\vec{j}, \vec{j}) = \vec{j}^{\,2} = 1$
  $(\vec{k}, \vec{k}) = \vec{k}^{\,2} = 1$
  $$(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{i}, \vec{k}) = (\vec{j}, \vec{k}) = 0$$

Скалярное произведение в координатной форме

- Пусть $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$

$$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2) = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

- Тогда

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$

$$= x_1x_2(\vec{i}, \vec{i}) + x_1y_2(\vec{i}, \vec{j}) + x_1z_2(\vec{i}, \vec{k}) +$$

$$+ y_1x_2(\vec{j}, \vec{i}) + y_1y_2(\vec{j}, \vec{j}) + y_1z_2(\vec{j}, \vec{k}) +$$

$$+ z_1x_2(\vec{k}, \vec{i}) + z_1y_2(\vec{k}, \vec{j}) + z_1z_2(\vec{k}, \vec{k}) =$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

$$(\vec{a},\vec{b}) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

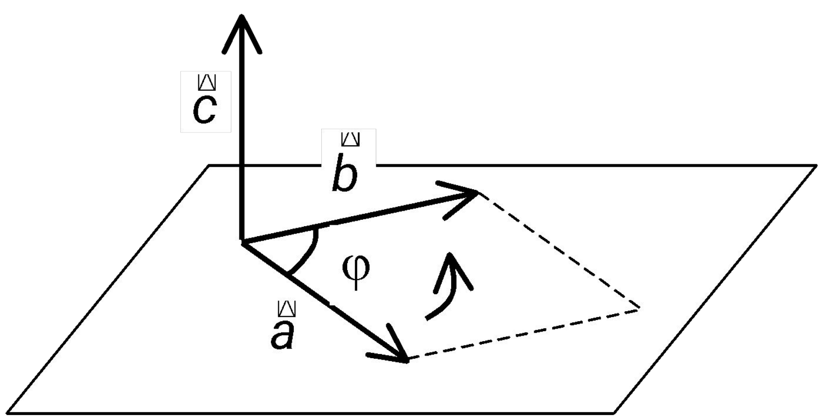
$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{ï ð}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a},\vec{b}) = 0$$

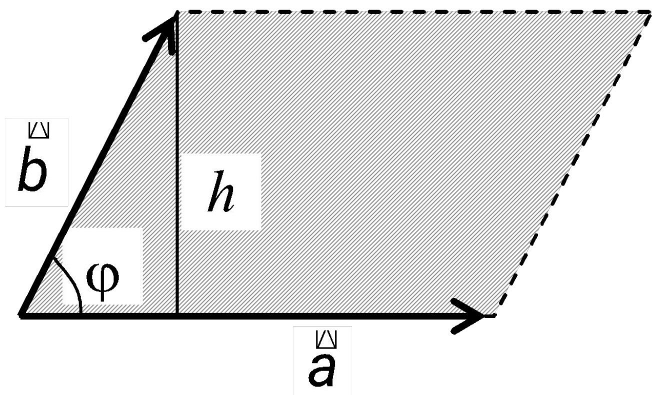
Векторное произведение

- **Опр.** Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$, который
- 1. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$
- 2. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \hat{\ } \vec{b})$
- 3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка



- <u>Правая тройка</u>.

  Если смотреть с конца вектора $\vec{c}$, то кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ происходит против часовой стрелки.



$$S_{\square} = h \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin\varphi$$

$$S_{\square} = \left\| \left[\vec{a}, \vec{b} \right] \right\|$$

Свойства

- 1. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$
- 2. $[\alpha \vec{a}, \vec{b}] = \alpha [\vec{a}, \vec{b}]$
- 3. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$
- Критерий коллинеарности

  Если $\vec{a} \neq 0 \text{ è } \vec{b} \neq 0$, то $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

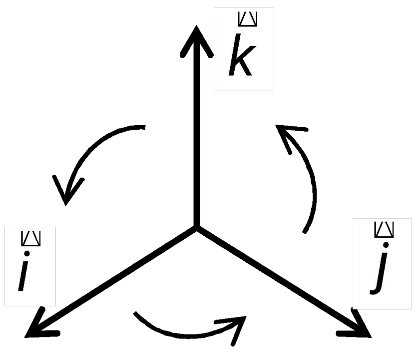
Векторное произведение в координатной форме

$$\vec a = x_1\vec i + y_1\vec j + z_1\vec k \qquad \vec b = x_2\vec i + y_2\vec j + z_2\vec k$$

$$[\vec a,\vec b] = [x_1\vec i + y_1\vec j + z_1\vec k,\ x_2\vec i + y_2\vec j + z_2\vec k] =$$

$$= x_1x_2\cancel{[\vec i,\vec i]}\to 0 + x_1y_2[\vec i,\vec j] + x_1z_2[\vec i,\vec k] + y_1x_2[\vec j,\vec i] + y_1y_2\cancel{[\vec j,\vec j]}\to 0 +$$

$$+ y_1z_2[\vec j,\vec k] + z_1x_2[\vec k,\vec i] + z_1y_2[\vec k,\vec j] + z_1z_2\cancel{[\vec k,\vec k]}\to 0.$$



$$[\vec a,\vec b] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Векторное произведение в координатной форме

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Смешанное произведение векторов

- **Опр**. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, называется число, равное $$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$$
- Свойства
- 1. $(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c)$
- 2. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) =$
  $= -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$