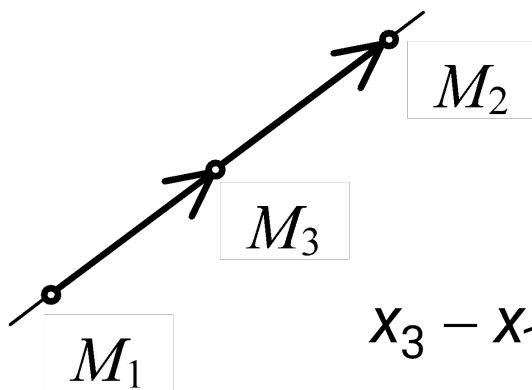


Деление отрезка в данном отношении

- Даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.
- Найти координаты точки M_3 , делящей отрезок в отношении λ , т.е. $\frac{|\overrightarrow{M_1M_3}|}{|\overrightarrow{M_3M_2}|} = \lambda$ или $\overrightarrow{M_1M_3} = \lambda \overrightarrow{M_3M_2}$



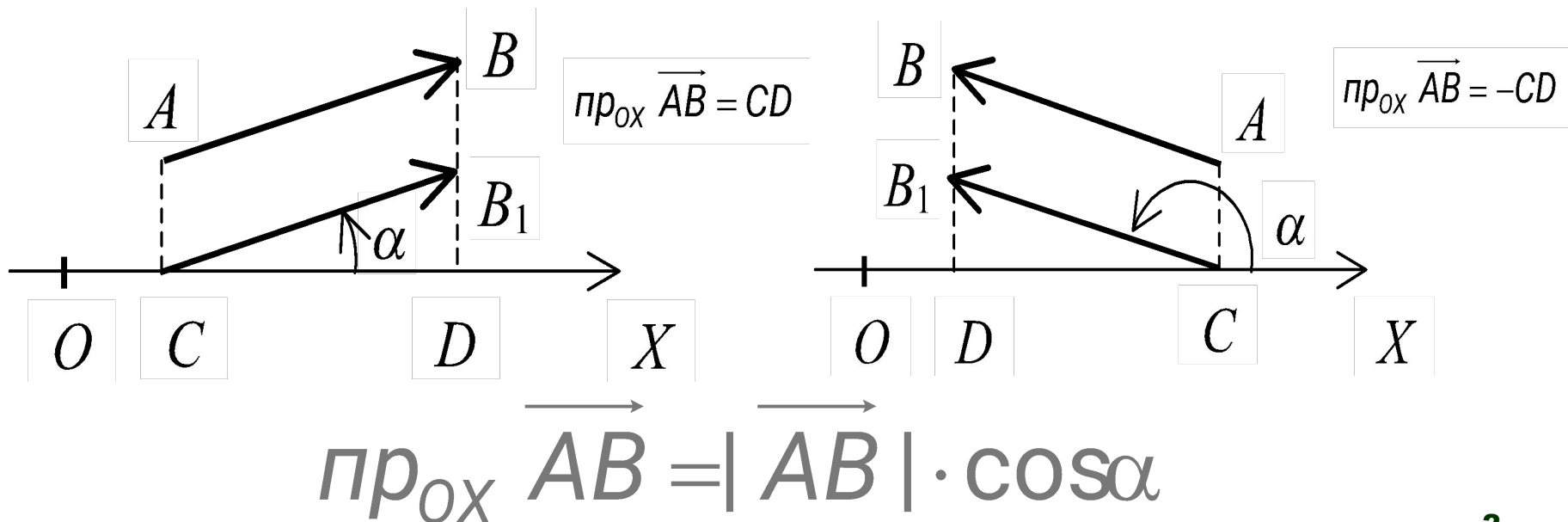
$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_3} &= (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) \\ \overrightarrow{M_3M_2} &= (x_2 - x_3, y_2 - y_3, z_2 - z_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_3 - x_1 &= \lambda(x_2 - x_3), \\ y_3 - y_1 &= \lambda(y_2 - y_3), \\ z_3 - z_1 &= \lambda(z_2 - z_3),\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \\ z_3 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \end{cases}$$

Проекция

- **Опр. Проекция** вектора на ось OX – длина отрезка оси, заключенного между проекциями его начальной и конечной точек
 - со знаком “+”, если направление отрезка совпадает с направлением оси
 - со знаком “-”, в противном случае.



Свойства проекции

- 1. $pr_e \lambda \overset{\boxtimes}{a} = \lambda pr_e \overset{\boxtimes}{a}$
- 2. $i \overset{\checkmark}{\partial}_{\overset{\boxtimes}{a}} (\overset{\boxtimes}{a} + \overset{\boxtimes}{b}) = i \overset{\checkmark}{\partial}_{\overset{\boxtimes}{a}} \overset{\boxtimes}{a} + i \overset{\checkmark}{\partial}_{\overset{\boxtimes}{a}} \overset{\boxtimes}{b}$

- **Теорема.** Декартовы прямоугольные координаты вектора равны проекциям вектора $\vec{a} = (x, y, z)$ на соответствующие оси декартовой прямоугольной с/к.

$$x = \vec{i} \cdot \vec{\delta}_i \cdot \vec{a} \quad y = \vec{j} \cdot \vec{\delta}_j \cdot \vec{a} \quad z = \vec{k} \cdot \vec{\delta}_k \cdot \vec{a}$$

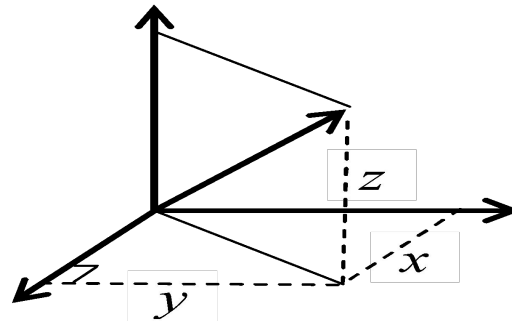
- Из опр. проекции \Rightarrow

$$x = |\vec{a}| \cos \alpha \quad y = |\vec{a}| \cos \beta \quad z = |\vec{a}| \cos \gamma$$

где α, β, γ – углы наклона вектора к осям OX, OY, OZ.

- По т.Пифагора

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



Направляющие косинусы

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Скалярное произведение векторов

- Ск. пр. – операция умножения вектора на вектор, в результате которой получается скаляр (число).

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot i \delta_a \vec{b} = |\vec{b}| \cdot i \delta_b \vec{a}$$

Свойства

- 1. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$
- 2. $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$
- 3. $(\vec{a}, \lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b})$, где λ - константа
- 4. Если векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, то
$$(\vec{a}, \vec{b}) = \pm |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$
- 4а. $(\vec{a}, \vec{a}) = a^2 = |\vec{a}|^2$

Свойства

- 5. $\vec{a} = \vec{0}$ è è è $\vec{b} = \vec{0}$, òî $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$
- 6. $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0$
- 7. Àñ è è $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, òî $\vec{a} \perp \vec{b}$
- 8. $(\vec{i}, \vec{i}) = \vec{i}^2 = 1$
 $(\vec{j}, \vec{j}) = \vec{j}^2 = 1$
 $(\vec{k}, \vec{k}) = \vec{k}^2 = 1$
 $(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{i}, \vec{k}) = (\vec{j}, \vec{k}) = 0$

Скалярное произведение в координатной форме

- Пусть $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$
- Тогда $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2) = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$$\begin{aligned}
 (\vec{a}, \vec{b}) &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = \\
 &= x_1x_2(\vec{i}, \vec{i}) + x_1y_2(\vec{i}, \vec{j}) + x_1z_2(\vec{i}, \vec{k}) + \\
 &+ y_1x_2(\vec{j}, \vec{i}) + y_1y_2(\vec{j}, \vec{j}) + y_1z_2(\vec{j}, \vec{k}) + \\
 &+ z_1x_2(\vec{k}, \vec{i}) + z_1y_2(\vec{k}, \vec{j}) + z_1z_2(\vec{k}, \vec{k}) = \\
 &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.
 \end{aligned}$$

$$\overset{\boxtimes}{(a, b)} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

$$|\overset{\boxtimes}{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

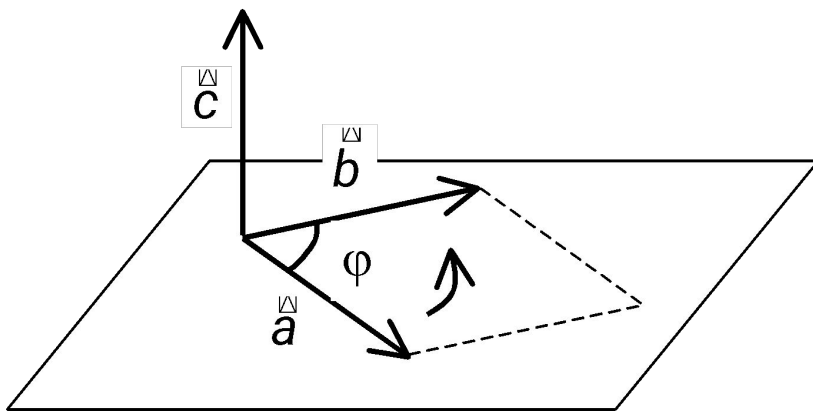
$$\cos \varphi = \frac{\overset{\boxtimes}{(a, b)}}{|\overset{\boxtimes}{a}| \cdot |\overset{\boxtimes}{b}|}$$

$$i \overset{\boxtimes}{\partial}_b \overset{\boxtimes}{a} = \frac{\overset{\boxtimes}{(a, b)}}{|\overset{\boxtimes}{b}|}$$

$$\overset{\boxtimes}{a} \perp \overset{\boxtimes}{b} \iff \overset{\boxtimes}{(a, b)} = 0$$

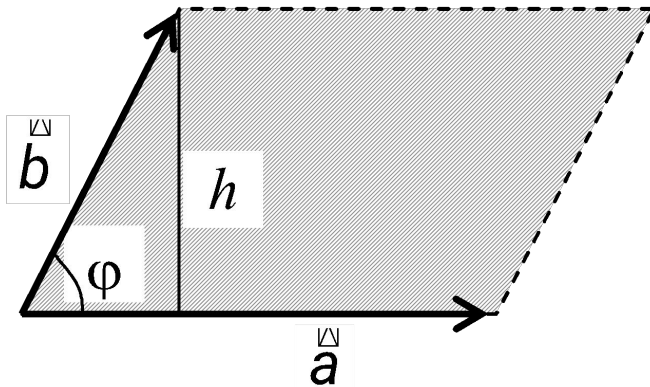
Векторное произведение

- **Опр.** Векторным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$, который
 1. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$
 2. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$
 3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка



- Правая тройка.

Если смотреть с конца вектора \vec{c} , то кратчайший поворот от \vec{a} к \vec{b} происходит против часовой стрелки.



$$S_{\square} = h \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin \varphi$$

$$S_{\square} = \left| \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix} \right|$$

Свойства

- 1. $[\overset{\boxtimes}{a}, \overset{\boxtimes}{b}] = -[\overset{\boxtimes}{b}, \overset{\boxtimes}{a}]$

- 2. $[\alpha \overset{\boxtimes}{a}, \overset{\boxtimes}{b}] = \alpha [\overset{\boxtimes}{a}, \overset{\boxtimes}{b}]$

- 3. $[\overset{\boxtimes}{a} + \overset{\boxtimes}{b}, \overset{\boxtimes}{c}] = [\overset{\boxtimes}{a}, \overset{\boxtimes}{c}] + [\overset{\boxtimes}{b}, \overset{\boxtimes}{c}]$

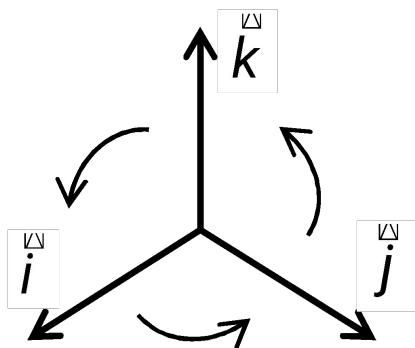
- Критерий коллинеарности

Если $\overset{\boxtimes}{a} \neq 0$ è $\overset{\boxtimes}{b} \neq 0$, то $[\overset{\boxtimes}{a}, \overset{\boxtimes}{b}] = 0 \Leftrightarrow \overset{\boxtimes}{a} \boxtimes \overset{\boxtimes}{b}$

Векторное произведение в координатной форме

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \quad \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= [x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}] = \\ &= \cancel{x_1 x_2 [\vec{i}, \vec{i}]} + \cancel{x_1 y_2 [\vec{i}, \vec{j}]} + x_1 z_2 [\vec{i}, \vec{k}] + y_1 x_2 [\vec{j}, \vec{i}] + \cancel{y_1 y_2 [\vec{j}, \vec{j}]} + \\ &+ y_1 z_2 [\vec{j}, \vec{k}] + z_1 x_2 [\vec{k}, \vec{i}] + z_1 y_2 [\vec{k}, \vec{j}] + z_1 z_2 [\vec{k}, \vec{k}]. \end{aligned}$$



$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Векторное произведение в координатной форме

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

$$\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Смешанное произведение векторов

- **Опр.** Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, называется число,

равное $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$

- **Свойства**

- 1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

- 2. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) =$
 $= -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$