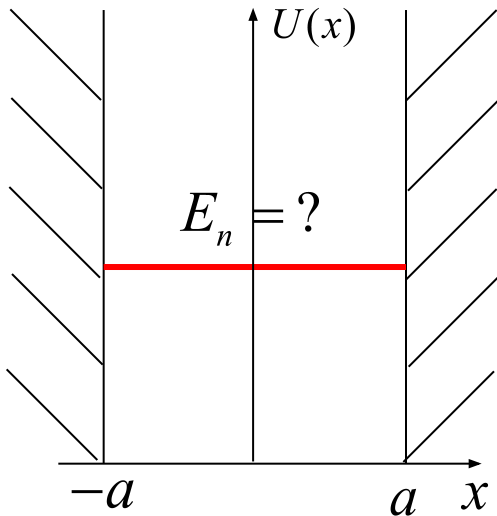


Найти возможные значения энергии в глубокой прямоугольной яме



Уравнение Шрёдингера

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \Rightarrow \frac{\hat{p}^2}{2m} \Psi_n(x) = E_n \Psi_n(x), \quad -a \leq x \leq a$$

Граничные условия?

Граничные условия

Если волновая функция при $|x| \geq a$ не обращается в ноль, то

$$\bar{U} = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\Psi_n(x)|^2 = +\infty$$

Но

$$\bar{E} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi_n^*(x) \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x) \right] \Psi_n(x) = E_n > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi_n^*(x) \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} \right] \Psi_n(x) = -\infty!!!$$

Возникает противоречие, которое разрешается с помощью условия

$$\Psi_n(x) = 0, \quad |x| \geq a$$

Или

$$\Psi_n(x = \pm a) = 0$$

Уравнение Шрёдингера

$$\Psi''(x) + k^2\Psi(x) = 0, \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Общее решение

$$\Psi(x) = A \cdot \cos kx + B \cdot \sin kx$$

+ граничные условия

Поступим иначе

Найти коммутатор

$$[\hat{H}, \hat{I}] = ?$$

Коммутатор

$$[\hat{H}, \hat{I}] = 0$$

Собственные функции гамильтониана должны быть собственными функциями оператора чётности!

Явный вид собственных функций гамильтониана?

Явный вид собственных функций гамильтониана

Чётные

$$\Psi^+(x) = A^+ \cdot \cos kx$$

Нечётные

$$\Psi^-(x) = A^- \cdot \sin kx$$

Граничные условия?

Граничные условия

Достаточно использовать граничные условия только с «одной стороны»!

Чётные

$$\Psi^+(x=a) = A^+ \cdot \cos ka = 0$$

$$k_n^{(+)} a = \frac{\pi}{2} (2n+1)$$

$$E_n^{(+)} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \cdot \frac{\pi^2 (2n+1)^2}{4}$$

Нечётные

$$\Psi^-(x=a) = A^- \cdot \sin ka = 0$$

$$k_n^{(-)} a = \pi n$$

$$E_n^{(-)} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \cdot \pi^2 n^2$$

Найти нормировку волновых функций?

Нормировка волновых функций

$$|A^\pm| = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Фазовый множитель?

Классификация уровней

$$\Psi_{n=0}^-(x) = A^- \cdot \sin k_{n=0} x \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \text{нечётного уровня с } n=0 \text{ нет!}$$

$$E_{n=0}^{(+)} \leq E_{n=1}^{(-)} \leq \dots$$