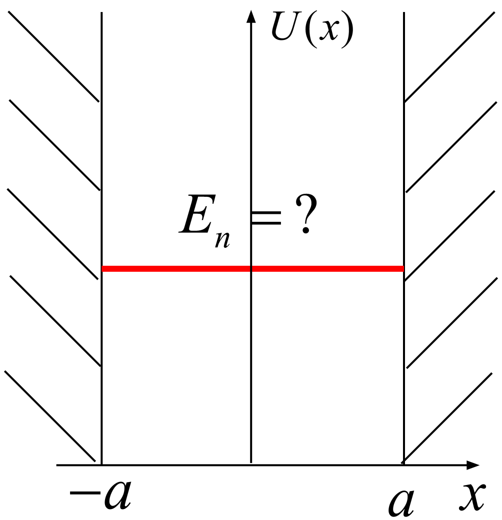
Найти возможные значения энергии в глубокой прямоугольной яме



Уравнение Шрёдингера

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{p}^2}{2m}\Psi_n(x) = E_n\Psi_n(x), \quad -a \le x \le a$$

Граничные условия?

Граничные условия

Если волновая функция при $|x| \geq a$ не обращается в ноль, то

$$\bar{U} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left|\Psi_n(x)\right|^2 = +\infty$$

Но

$$\bar{E} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi_n^*(x)\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x)\right]\Psi_n(x) = E_n > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi_n^*(x)\left[\frac{\hat{p}^2}{2m}\right]\Psi_n(x) = -\infty!!!$$

Возникает противоречие, которое разрешается с помощью условия

$$\Psi_n(x) = 0, \quad |x| \geq a$$

Или

$$\Psi_n(x = \pm a) = 0$$

Уравнение Шрёдингера

$$\Psi''(x) + k^2\Psi(x) = 0, \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Общее решение

$$\Psi(x) = A \cdot \cos kx + B \cdot \sin kx$$

+ граничные условия

Поступим иначе

Найти коммутатор

$$\left[\hat{H}, \hat{I}\right] = ?$$

Коммутатор

$$\left[\hat{H},\hat{I}\right]=0$$

Собственные функции гамильтониана должны быть собственными функциями оператора чётности!

Явный вид собственных функций гамильтониана?

Явный вид собственных функций гамильтониана

Чётные

$$\Psi^{+}(x) = A^{+} \cdot \cos kx$$

Нечётные

$$\Psi^{-}(x) = A^{-} \cdot \sin kx$$

Граничные условия?

Граничные условия

Достаточно использовать граничные условия только с «одной стороны»!

Чётные

$$\Psi^{+}\left(x=a\right)=A^{+}\cdot\cos ka=0$$

$$k_n^{(+)}a=\frac{\pi}{2}\left(2n+1\right)$$

$$E_n^{(+)}=\frac{\hbar^2}{2ma^2}\cdot\frac{\pi^2\left(2n+1\right)^2}{4}$$

Нечётные

$$\Psi^{-}\left(x=a\right)=A^{-}\cdot\sin ka=0$$

$$k_n^{(-)}a=\pi n$$

$$E_n^{(-)}=\frac{\hbar^2}{2ma^2}\cdot\pi^2 n^2$$

Найти нормировку волновых функций?

Нормировка волновых функций

$$\left|A^{\pm}\right| = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Фазовый множитель?

Классификация уровней

$$\Psi^{-}_{n=0}\left(x\right) = A^{-} \cdot \sin k_{n=0} x \equiv 0 \quad \Rightarrow$$ нечётного уровня с n=0 нет!

$$E^{(+)}_{n=0} \leq E^{(-)}_{n=1} \leq \ldots$$