



# УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Примеры некорректных задач.

2. Режимы с обострением.





## Семинар 5-2. Некорректные задачи. (Продолжение).

**1. Пример некорректной задачи относительно существования решения. Режим с обострением.**

Рассмотрим задачу Коши для ОДУ, решение которой при  $t > 0$  не существует в целом.

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x^2(t) & x \in R, \quad t > 0 & (1) \\ x(0) = a & & (2) \end{cases}$$

Решение. Интегрируя (1), получаем:

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dt + C \rightarrow -\frac{1}{x(t)} = t + C \rightarrow x(t) = -\frac{1}{t + C}$$

Из (2) при  $t = 0$  легко находим:  $C = -1/a \equiv t_a$ .

Таким образом  $x(t)$  изменяется по гиперболическому закону:

$$x(t) = \frac{1}{t_a - t}$$

с сингулярностью в точке  $t = t_a$ .

Полученное решение относится к классу задач, называемых режимы с обострением. В них одна (или несколько характеристик системы неограниченно возрастают за конечное время  $t_a$ , называемое временем обострения. Фактически это означает, что не существует решения задачи при любых  $t > 0$ .

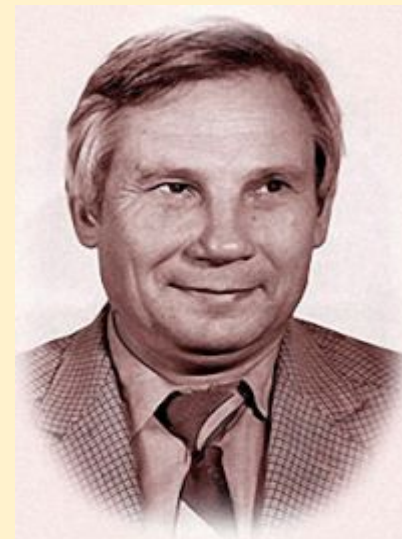


Такие решения описывают множество различных процессов с неустойчивостями (в квантовой механике, гидродинамике, лазерной термодинамике, в физике плазмы, в экологии и демографии).

Теория режимов с обострением впервые была построена в ИПМ РАН членом-корреспондентом АН Курдюмовым Сергеем Павловичем и получила мировое признание. Им вместе академиком РАН Александром Александровичем Самарским было высказано интересное предположение, что режимы

с обострением в нелинейных системах могут порождаться самой системой, а не навязываться в виде условий на границах. Для этого в среде должен действовать нелинейным образом зависящий от температуры источник тепла (правая часть ДУЧП).

В этом случае конкуренция процессов выделения (источник) и распространение (диффузия) энергии приводит к появлению совершенно новой характеристики среды – минимального размера области, на которой эти процессы «уравновешивают» друг друга. Источник тепла порождает сам режим с обострением, а развитие этого режима приводит к локализации тепла на определённом размере, называемом «фундаментальной длиной».



В результате этих исследований ими было сделано научное открытие «эффекта Т-слоя» — нового типа неустойчивости плазмы, которое занесено в Государственный реестр открытий СССР под № 55 с приоритетом от 1968 г. Суть: если температура на границе среды с коэффициентом теплопроводности, растущим с температурой, увеличивалась стремительно к бесконечности, то прекращалось распространение тепла в глубь среды в течении всего промежутка времени до указанного момента  $t_a$ .

Применение подобных моделей с обострением в самых различных областях науки оказывается очень продуктивным: в физике плазмы был открыт Т-слой, в астрофизике предложено новое объяснение хромосферных вспышек на Солнце, в демографии — была построена теория роста населения Земли.



## ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ РОСТ НАСЕЛЕНИЯ ЗЕМЛИ И МОДЕЛЬ С.П. КАПИЦЫ.

В настоящее время общество, человечество является одной из наиболее сложных самоорганизующихся систем. Необходимость рассмотрения человечество как единой системы признается сегодня большинством демографов и социологов. Однако системное поведение было свойственно человечеству практически с момента возникновения. Это подтверждается тем фактом, что закон роста населения Земли оставался неизменным в течение миллионов лет, а отклонения от него были кратковременны и невелики.

Социальные, экологические, демографические исследования показывают, что человечество вступило сейчас в период глобального кризиса. Рост населения Земли происходит в режиме с обострением, момент обострения оценивается примерно 2025 годом. Это означает, что закон роста должен неизбежно смениться новым в течение ближайших десятилетий.

### 1. Модель Форстера-Мора-Эмиота.

В 1960 году фон Форстер, Мор и Эмиот на основе обработки известных им статистических данных (до 1960 года) провели статистическую оценку демографических данных и обнаружили, что кривая роста населения всей Земли лучше всего аппроксимируется гиперболической кривой описываемой уравнением

$$n(t) = \frac{C}{T_1 - t} \quad (5)$$

где  $C$  – константа, величина которой зависит от того, в каких единицах измеряется  $n$ : если – в млрд. человек, то  $C$  оценивалась авторами модели в 200 млрд. человек и  $T_1$  – другая константа имеющая размерность «год» и равная 2026,8685 лет, (соответствует 13 ноября 2026 года).

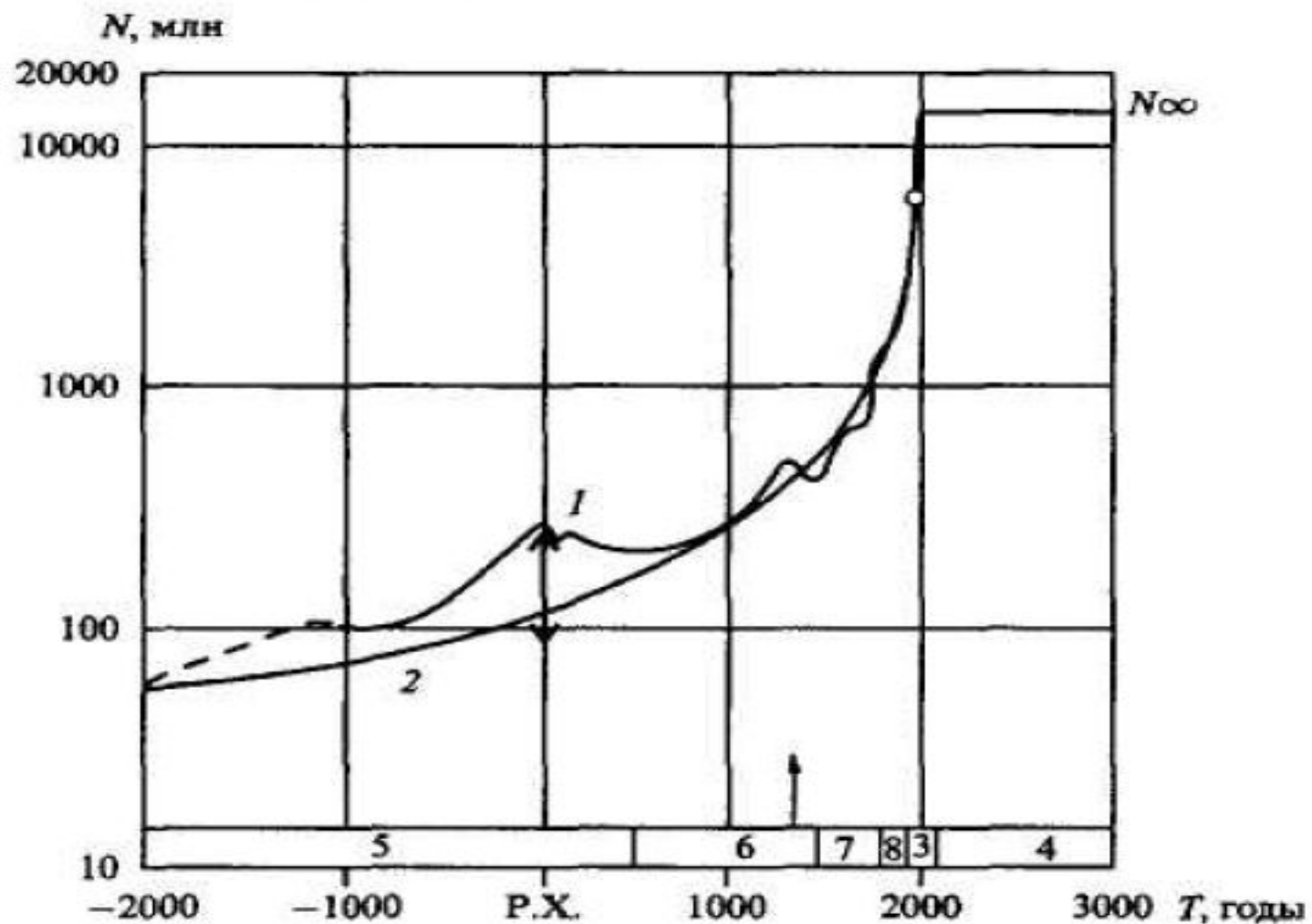
Эта гиперболическая математическая модель, в которой присутствуют только 2 постоянные  $C$  и  $T_1$ , является очень простой, но при этом удивительно точной для описания динамики численности населения на протяжении не только веков, но и тысячелетий.

Согласно теории роста населения Земли, предложенной по этой модели, в течение длительного периода скорость роста была пропорциональна квадрату числа людей. Это означает, что главную роль в развитии человеческой цивилизации играли парные контакты между людьми: мужчина — женщина, ученик — учитель, слуга — господин... и т.п.



Рис. 1

*Население мира от 2000 г. до Р. Х. до 3000 г.*



*Рис.1 Динамика роста численности населения на Земле.*



Данные по динамике численности населения, рассчитанной по формуле Форстера.

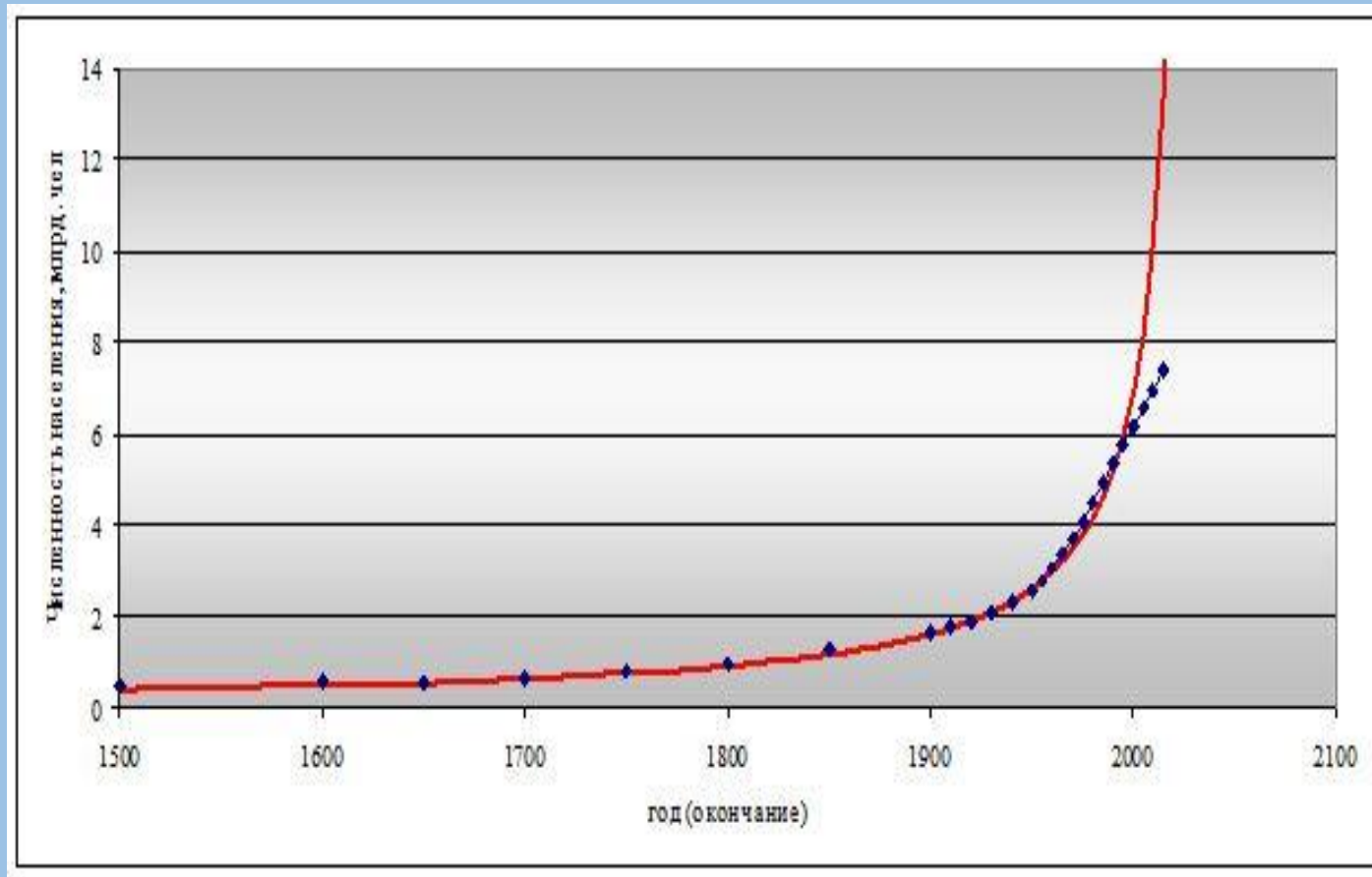


Рис. 2. Динамика численности населения на Земле (модель Форстера)



На протяжении 6 миллионов лет человеческой истории были выделены 11 периодов замедления и ускорения развития человечества. Эти колебания могут быть обусловлены наличием в модели эволюции человеческой цивилизации нелинейных диссипативных факторов. Однако период колебаний сокращался с приближением к моменту обострения, что указывает на недостаточно сильную степень нелинейности системы.

Следует отметить тот факт, что начиная с шестидесятых годов XX века реальная динамика народонаселения Земли стала все больше отходить от гиперболической кривой, и к настоящему времени темпы роста населения резко понизились:

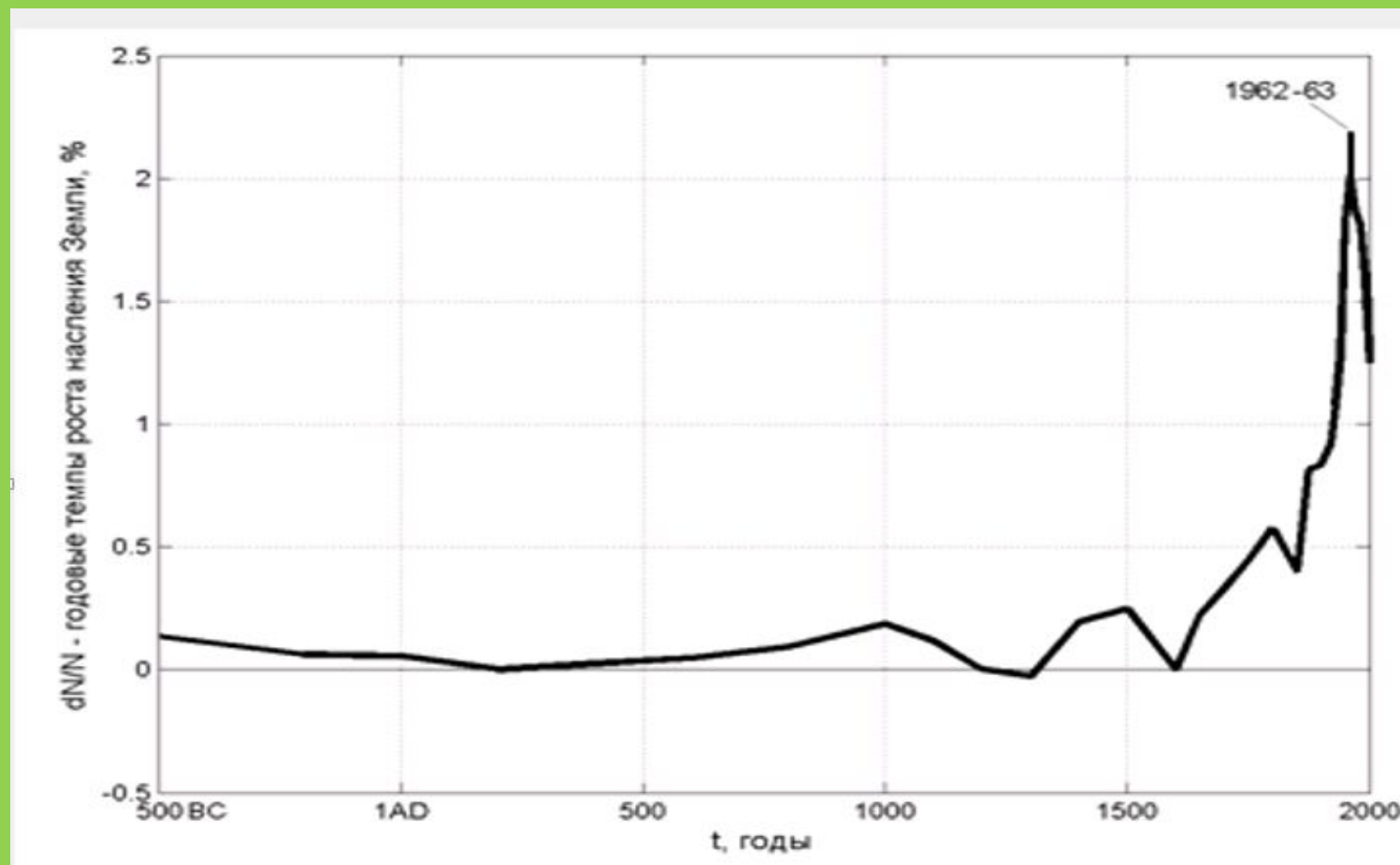


Рис.3 Темпы роста численности населения на Земле.



● Согласно этой формуле Форстера  $n(t) = C/(T_1 - t)$  в день, когда  $t = T_1$  численность человечества должна была бы стать бесконечно большой (временная сингулярность).

Имеющиеся официальные данные таблицы по динамике численности населения в мире этой особенностью принципиально не изменяют: разве что если ориентироваться на цифры с 1900 г., то вместо 13 ноября 2026 г. получается 27 сентября 2030 г.

Напрашивается аналогия с вышедшем из-под контроля ядерным реактором, который скоро должен пойти в разнос. Поэтому наличие особой точки является самым серьёзным недостатком Модели 1.

С.П. Капица 1928 - 2012

## Модель С.П. Капицы.

С.П. Капица считал, что существенным фактором, который не был учтён в модели Форстера, являются времена жизни и наступления Репродуктивной способности человека. Эти два фактора он смоделировал при помощи одного параметра  $\tau$  следующим образом.

Сначала он записал уравнение (1) в дифференциальной форме, а затем в знаменателе заменил  $(T_1 - t)^2$  на  $(T_2 - t)^2 + \tau^2$ .  
Получилось дифференциальное уравнение:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{C}{(T_2 - t)^2} \quad (2)$$







• Решая это уравнение при условии, что  $(T_2 - t)/\tau \rightarrow \infty$  (т.е. в далёком прошлом  $\tau \rightarrow 0$ ), можно получить простое аналитическое выражении для  $n(t)$  :

$$n(t) = \frac{C}{\tau} \operatorname{arcctg} \left[ \frac{(T_2 - t)}{\tau} \right] \quad (3)$$

В (3) константы  $C$ ,  $T_2$  и  $\tau$  должны определяться из условия минимизации суммы квадратов относительных рассогласований между модельными и реальными значениями.

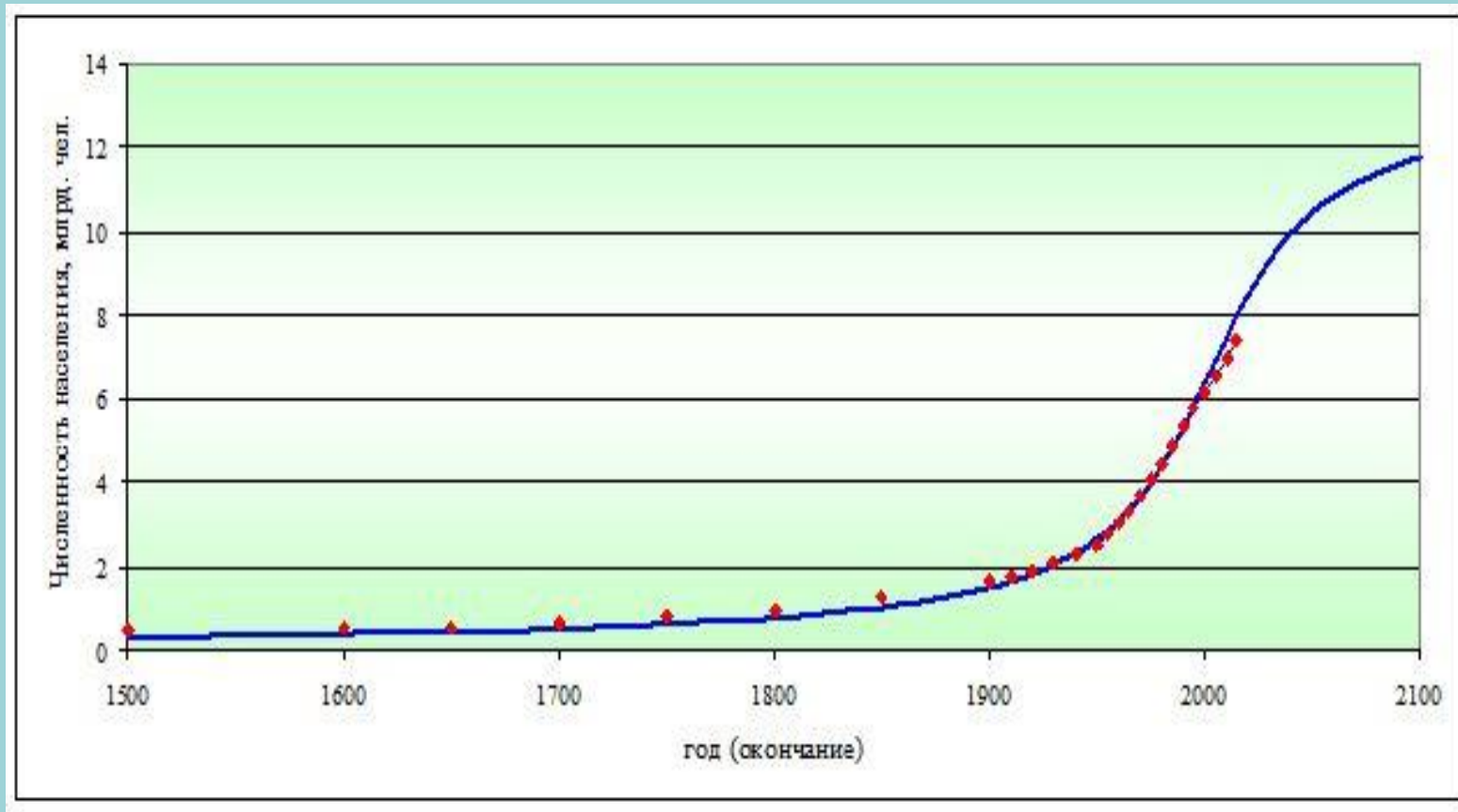
С.П. Капица предложил следующие значения параметров своей модели ( $n$  измеряется в млрд. человек):  $C = 172$  млрд. чел.  $\times$  лет;  $T_2 = 2000$ ;  $\tau = 45$  лет.

Модель Капицы при малых  $t$  переходит в модель Форстера. Рассогласования модели Капицы с имеющимися фактическими данными, также как и модели Форстера, весьма малы.

Данные по динамике численности населения, рассчитанной по Капицы, представлены на Рис. 4.

1. В ней отсутствует критическая точка  $T_1$ , при которой  $n \rightarrow \infty$ , что соответствует реальности.
2. Из модели Капицы следует существование предела  $N_{max}$ , к которому будет асимптотически стремиться численность человечества:

$$N_{max} = \pi C/\tau$$



*Рис. 4. Динамика численности населения на Земле по модели С. П. Капицы.*

**По оценкам С.П. Капицы, этот предел равен 12 млрд. человек, по данным Таблице 2. – 13,322 млрд. человек.**



● Работы Капицы показали, что рост населения Земли можно описать математически, фактически не вводя никаких дополнительных переменных, то есть, по сути, не привлекая никаких дополнительных факторов.

Для указанного изменения характера роста численности населения придумали специальное словосочетание – глобальный демографический переход. Что-то вроде фазового перехода 2-го рода в физике.

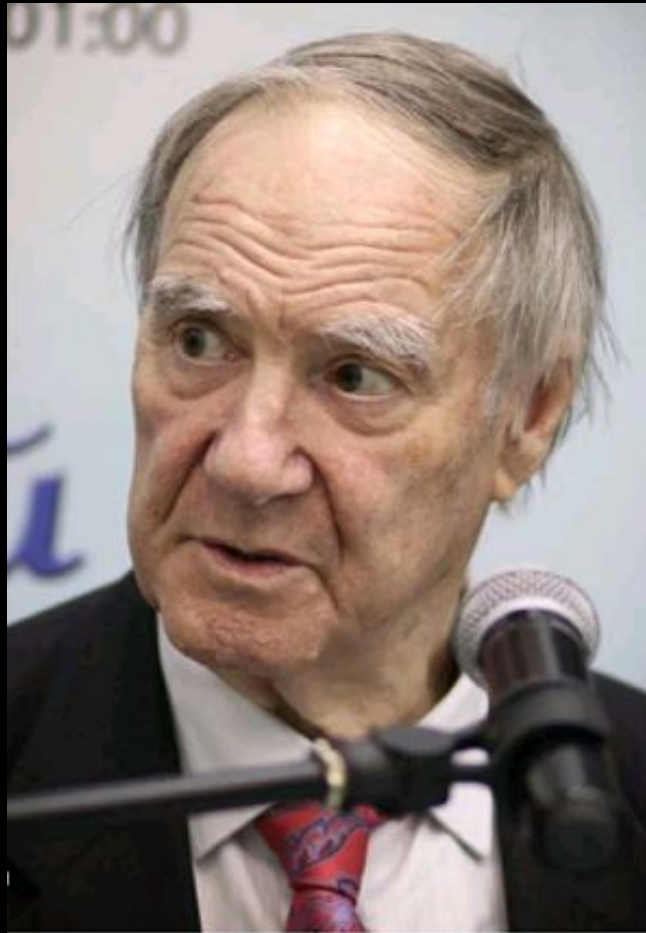
Этот эффект дал основание для провозглашения так называемого «демографического императива» – признания первостепенной и самодостаточной роли демографии в истории развития человеческого общества.

Основной недостаток Модели Капицы заключается в неясности физического смысла параметра  $\tau$ : если он определяет среднее время жизни, то 42-45 лет – мало, а если темп смены поколений – то много; для этого больше подходит цифра 15-25 лет.

Но главное даже не в этом. Если  $\tau$  рассматривать, как некую задержку по времени, то логично записать дифференциальное уравнение динамики численности населения не в виде (3), а в виде:

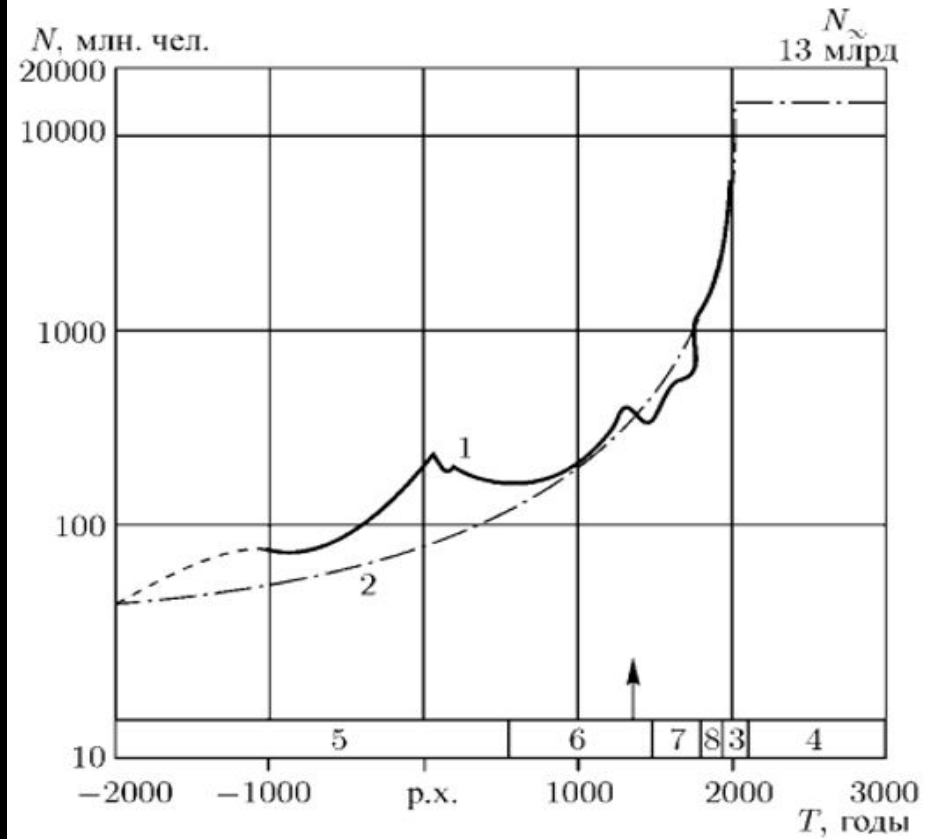
$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{C}{(T_1 + \tau - t)^2}$$

из которого достаточно очевидно получается (1), в котором  $T_2 = T_1 + \tau - t$ , а критическая точка никуда не исчезает. Более того, она остаётся на прежнем месте. Поэтому проблема устранения сингулярности не решается.



Сергей Петрович  
Капица (1928-2012)

## Динамика численности человечества





**Различные сценарии перехода через момент обострения и прогнозы дальнейшего развития человечества предполагают существенное замедление роста (или даже уменьшение численности людей), но не дают ответа на вопрос о дальнейших тенденциях системного поведения, сохранявшегося до этого в течение миллионов лет. Однако, возможно, вопрос надо ставить не об эволюции системного поведения, а об изменении самой системы, которую представляет собой человеческая цивилизация. Информационное общество, формирующееся в течение последних десятилетий, коренным образом изменило характер взаимоотношений между людьми. Парные взаимодействия еще играют существенную роль, однако на смену им идут взаимодействия коллективные, когда благодаря средствам массовой информации, компьютерным сетям, новейшим средствам связи и транспорта в общении могут принимать участие десятки и сотни людей. Это ведет к существенному увеличению степени нелинейности системы, и переход к новым соотношениям между источником и диссипацией, между производством и распространением информации, материальных ценностей, людей, по-видимому, и представляет собой сущность нынешнего переломного периода в развитии человечества.**



**Как видно из выражений (1) – (3) для рассмотренных моделей, они предполагают, что рост численности  $n$  населения Земли на протяжении тысячелетий зависит только от самой численности населения  $n$  и не связан с другими внешними факторами: параметрами окружающей среды, технологиями, ресурсными ограничениями и т.д. Это достаточно смелое предположение получило название «демографический императив» – признания первостепенной и самодостаточной роли демографии в истории развития человеческого общества.**

**Название, конечно, красивое, но мало, что объясняет; поэтому оно недостаточно конструктивно.**

**В работе А.В. Коротаяева и др. рассмотрены иные возможные модели роста населения Земли. Основная задача этих подходов, многие из которых весьма остроумны, заключается в попытках объяснения феномена последних десятилетий – замедления темпов роста численности населения после 1967-1968 гг.**

**Действительно, всё довольно странно: больших войн и эпидемий не было, большие астероиды на Землю не падали, а темпы роста вдруг стали падать. С точки зрения демографического императива это – необъяснимо, и поэтому неприятно для его последователей.**



**Из современных новых подходов можно выделить три модели:**

**1) М. Кремера, 2) А.В. Подлазова, 3) А. Фомина.**

**Любопытны также попытки связать снижение рождаемости с уровнем грамотности населения. Правда, где здесь причина, а где следствие – тоже не очень понятно: если в семье 10 негритят или семеро по лавкам, то это как-то не стимулирует получение хорошего образования.**

**Для объяснения снижения темпов роста большинство авторов предполагают создание вспомогательных моделей 2-го и 3-го уровней. По их мнению, это поможет решить исходную задачу.**

**По нашему мнению, эти исследователи попадают в методическую ловушку. Дело в том, что математические модели более низких системных уровней для своей калибровки требуют наличия больших объёмов исходных данных. А их как раз и недостаточно. Это известная эконометрическая дилемма – выбор рациональной сложности математической модели, чтобы она соответствовала располагаемым фактическим данным: часто приходится упрощать математическую модель, поскольку для более адекватных и более сложных моделей недостаточно количества и качества исходных данных.**



**БЛАГОДАРЮ**

**ЗА**

**ВНИМАНИЕ**

