METODE NUMERICE – pregătire 3 25.06.2021

Exerciţii – capitolele 5, 6

✍ Exerciţiul 1

Realizaţi funcţia MATLAB care returnează un vector din subspaţiul nul al unei matrici reale de dimensiuni oarecare. Se vor folosi funcţiile elementare, precum şi funcţia svd.

<u>*Rezolvare:*</u>

☞parametrii de intrare – ieşire funcție MATLAB:

-intrare: matrice oarecare;

-ieşire: vector din subspaţiul nul sau cod eroare.

☞structura funcției:

✔determinare dimensiuni matrice (*m, n*) & verificări (dimensiuni nenule)

nu → cod eroare

da ↓

✓calcul descompunere valori singulare pentru parametrul de intrare (apel funcţie svd: [u,s,v]=svd(a))

✓calcul toleranţă: $\tau = \max\{m,n\} \cdot \hat{\sigma}_1 \cdot \varepsilon_m$

✓calcul rang, r (numărare valori singulare mai mari decât toleranţa)

✓selectare ultimele n – r coloane ale matricei v

✓ calculare parametru returnat ca o combinaţie liniară a coloanelor selectate la pasul anterior

METODE NUMERICE – pregătire 3 25.06.2021

✍ Exerciţiul 2

Realizaţi în mediul de programare MATLAB, funcţia care returnează p-norma Schatten a unei matrici oarecare:

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{min\{m,n\}} \sigma_i^p(A)\right)^{\frac{1}{p}},$$

unde $\sigma_i(A), i = 1,2, \dots, min\{m,n\}$ *sunt valorile singulare ale matricei* $A \in \mathbb{R}^{mxn}$. *Se vor folosi funcţiile elementare, precum şi funcţia* svd.

<u>*Rezolvare:*</u>

☞parametrii de intrare – ieşire funcție MATLAB:

-intrare: matrice oarecare, ordinul normei Schatten, p;

-ieşire: scalar care reprezintă valoarea p-normei Schatten a matricei.

☞structura funcției:

✔determinare dimensiuni matrice (*m, n*) & verificări (dimensiuni nenule)

nu

da

cod eroare

nu

da

✔ verificare parametru de intrare, p (natural, nenul)

✔calcul descompunere valori singulare pentru parametrul de intrare (apel funcţie svd: [u,s,v]=svd(a))

✔determinare min{m ,n}

✔Calcul p-norma Schatten (aplicarea formulei)

METODE NUMERICE – pregătire 3 25.06.2021

✍ Exerciţiul 3

Fie ecuaţia neliniară $x^2 + cos(x+2) = 0$. *Verificaţi că ecuaţia admite o soluţie reală în intervalul [-1, 0] şi determinaţi o vecinătate din care ar putea fi iniţializată metoda Newton astfel încât să fie posibilă calcularea numerică a soluţiei reale.*

Rezolvare:

a). $f(x) = x^2 + cos(x+2)$

$f(-1) = 1 + \cos(1) > 0$

$f(0) = \cos(2) < 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\exists \alpha \in (-1,0)\ \ a.i.\ f(\alpha) = 0}$

b). Metoda Newton : $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}; \quad g'(x) = \dfrac{f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$

→ condiţia de convergenţă: $|g'(x)| < 1, \forall x \in V_\alpha$

→ condiţia de evitare a blocării: $f(x)$ strict monotonă pe V_α

$f'(x) = 2x - \sin(x+2) \longrightarrow f'(-1) = -2 - \sin(1) < 0; f'(0) = -\sin(2) < 0$

$f''(x) = 2 - \cos(x+2) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow f'$ - strict crescătoare

$\Rightarrow f'(x) < 0\ \forall x \in [-1,0]$ $\Rightarrow$ $f(x)$ - strict monotonă pe [-1, 0]

↓

metoda Newton nu se poate bloca

METODE NUMERICE – pregătire 3 25.06.2021

Exerciţiul 4

Fie ecuaţia neliniară $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0$. *Demonstrați că ecuația are o soluție reală în intervalul [0, 1] şi construiţi funcţia de iterare ce ar putea fi utilizată în cadrul metodei iterării pentru a determina respectiva soluţie.*

<u>*Rezolvare:*</u>

a). $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

$f(0) = 1 > 0$

$f(1) = -1 < 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\exists \alpha \in (0,1) \;\; a.i. \;\, f(\alpha) = 0}$

b). Metoda iterării : $f(x) = 0 \rightarrow x = g(x) \Rightarrow x = \dfrac{-x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 1}{-3}$

condiţia de convergenţă: $|g'(x)| < 1 \, , \forall x \in V_\alpha$

$$|g'(x)| = \frac{1}{3} \cdot |-4x^3 + 9x^2 - 6x| < 1$$

$|g'(x)| = \left|\frac{4}{3}x^3 - 3x^2 + 2x\right| < 1$ – de demonstrat

METODE NUMERICE – pregătire 3 25.06.2021

$$p(x) = \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 + 2x; \;\; p(0) = 0; \;\; p(1) = \frac{1}{3}$$
$$p'(x) = 4x^2 - 6x + 2 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x_1 = 1; \;\; x_2 = 0.5$$

p(x) – strict crescătoare pe [0, 0.5]
- strict descrescătoare pe [0.5, 1]

☞ $p(0.5) = \frac{5}{12} < 1$

$$\boxed{|g'(x)| < 1, \forall x \in [0, 1]}$$

[0, 1] – vecinătate din care poate fi iniţializată metoda iterării

✍ Exerciţiul 5

Fie ecuaţia neliniară $x^3 - x^2 - x \cdot cos(x) = 2$. Verificaţi că ecuaţia admite o soluţie reală în intervalul [1, 2] şi determinaţi o vecinătate din care ar putea fi iniţializată metoda Newton astfel încât să fie evitată blocarea ei.

<u>*Rezolvare:*</u>

$$f(x) = x^3 - x^2 - x \cdot cos(x) - 2$$
$$f(1) = -2 - \cos(1) < 0$$
$$f(2) = 2 - 2 \cdot \cos(2) > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\exists \alpha \in (1, 2) \;\; a.i. \;\; f(\alpha) = 0}$$

METODE NUMERICE – pregătire 3 25.06.2021

☞ evitarea blocării metodei Newton → f'(x) – strict monotonă pe V_α

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x - \cos(x) + x \cdot \sin(x)$$

$$f'(1) = 3 - 2 - \cos(1) + \sin(1) > 0$$

$$f'(2) = 12 - 4 - \cos(2) + 2 \cdot \sin(1) > 0$$

$$f''(x) = 6 \cdot \mathrm{x} - 2 + 2 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)$$

$$f''(1) = 4 + 2 \cdot \sin(1) + \cos(1) > 0$$

$$f''(2) = 10 + 2 \cdot \sin(2) + 2 \cdot \cos(2) > 0$$

$f'''(x) = 6 + 2 \cdot \cos(x) + \cos(x) - x \cdot \sin(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f''(x)$- strict crescătoare

$f'(x)$ - strict crescătoare ← $f''(x) > 0, \forall x \in (1{,}2)$

$f'(x)$ - strict monotonă

⇓

$$V_\alpha = [1, 2]$$

METODE NUMERICE – pregătire 3 25.06.2021

✍ Exerciţiul 6

Realizaţi în mediul de programare MATLAB, funcţia care returnează numărul rădăcinilor reale ale unui polinom. Parametrul de intrare al funcției va fi vectorul ce conține coeficienţi reali ai polinomului (se utilizează funcțiile elementare, precum şi funcţia schur cu sintaxa S = schur(a) care returnează forma canonică Schur a matricei dată drept parametru de intrare).

<u>Rezolvare:</u>

☞parametrii de intrare – ieşire funcție MATLAB:

-intrare: vector ce conţine coeficienţii polinomului;

-ieşire: scalar care reprezintă numărul rădăcinilor reale ale polinomului.

☞structura funcției:

- ✔ verificare parametru de intrare (vector cu cel putin 2 elemente)
- ✔ determinare grad polinom
- ✔ împărţirea coeficienţilor prin coeficientul puterii dominante
- ✔ formare matrice Frobenius atașată polinomului
- ✔ calcul formă canonică Schur pentru matricea Frobenius create
- ✔ numărare elemente nenule de pe subdiagonala principală a matricei Schur
- ✔ Calcul număr rădăcini reale