

Exerciții – capitolele 5, 6

Exercițiul 1

Realizați funcția MATLAB care returnează un vector din subspațiul nul al unei matrici reale de dimensiuni oarecare. Se vor folosi funcțiile elementare, precum și funcția `svd`.

Rezolvare:

 parametri de intrare – ieșire funcție MATLAB:

-intrare: matrice oarecare;

-ieșire: vector din subspațiul nul sau cod eroare.

 structura funcției:

✓ determinare dimensiuni matrice (m, n) & verificări (dimensiuni nenule)

da



nu

cod eroare

- ✓ calcul descompunere valori singulare pentru parametrul de intrare (apel funcție `svd`: `[u,s,v]=svd(a)`)
- ✓ calcul toleranță: $\tau = \max\{m, n\} \cdot \hat{\sigma}_1 \cdot \varepsilon_m$
- ✓ calcul rang, r (numărare valori singulare mai mari decât toleranța)
- ✓ selectare ultimele $n - r$ coloane ale matricii v
- ✓ calculare parametru returnat ca o combinație liniară a coloanelor selectate la pasul anterior

Exercițiul 2

Realizați în mediul de programare MATLAB, funcția care returnează p-norma Schatten a unei matrici oarecare:

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} \sigma_i^p(A) \right)^{\frac{1}{p}},$$

unde $\sigma_i(A), i = 1, 2, \dots, \min\{m, n\}$ sunt valorile singulare ale matricii $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Se vor folosi funcțiile elementare, precum și funcția svd.

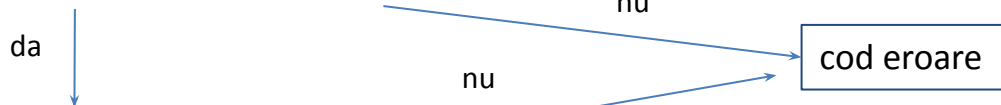
Rezolvare:

parametrii de intrare – ieșire funcție MATLAB:

- intrare: matrice oarecare, ordinul normei Schatten, p;
- ieșire: scalar care reprezintă valoarea p-norme Schatten a matricii.

structura funcției:

✓ determinare dimensiuni matrice (m, n) & verificări (dimensiuni nenule)



✓ verificare parametru de intrare, p (natural, nenul)

✓ calcul descompunere valori singulare pentru parametrul de intrare (apel funcție svd: [u,s,v]=svd(a))

✓ determinare min{m ,n}

✓ Calcul p-norma Schatten (aplicarea formulei)

 **Exercițiul 3**

Fie ecuația neliniară $x^2 + \cos(x + 2) = 0$. Verificați că ecuația admite o soluție reală în intervalul $[-1, 0]$ și determinați o vecinătate din care ar putea fi inițializată metoda Newton astfel încât să fie posibilă calcularea numerică a soluției reale.

Rezolvare:

a). $f(x) = x^2 + \cos(x + 2)$

$$f(-1) = 1 + \cos(1) > 0$$

$$f(0) = \cos(2) < 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\exists \alpha \in (-1, 0) \text{ a.i. } f(\alpha) = 0}$$

b). Metoda Newton : $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$; $g'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$

↳ condiția de convergență: $|g'(x)| < 1, \forall x \in V_\alpha$

↳ condiția de evitare a blocării: $f(x)$ strict monotonă pe V_α

$$f'(x) = 2x - \sin(x + 2) \rightarrow f'(-1) = -2 - \sin(1) < 0; f'(0) = -\sin(2) < 0$$

$$f''(x) = 2 - \cos(x + 2) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f' - \text{strict crescătoare}$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 \forall x \in [-1, 0] \Rightarrow f(x) - \text{strict monotonă pe } [-1, 0]$$



metoda Newton nu se poate bloca

 **Exercițiul 4**


Fie ecuația neliniară $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0$. Demonstrați că ecuația are o soluție reală în intervalul $[0, 1]$ și construiți funcția de iterare ce ar putea fi utilizată în cadrul metodei iterării pentru a determina respectiva soluție.

Rezolvare:


a). $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

$f(0) = 1 > 0$

$f(1) = -1 < 0$

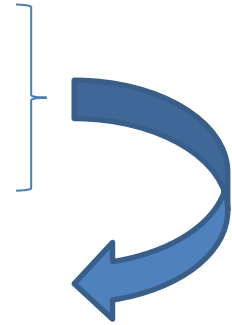
 $\exists \alpha \in (0, 1) \text{ a. i. } f(\alpha) = 0$

b). Metoda iterării: $f(x) = 0 \rightarrow x = g(x) \Rightarrow x = \frac{-x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 1}{-3}$

 condiția de convergență: $|g'(x)| < 1, \forall x \in V_\alpha$

$$|g'(x)| = \frac{1}{3} \cdot |-4x^3 + 9x^2 - 6x| < 1$$

$|g'(x)| = \left| \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 + 2x \right| < 1$ - de demonstrat



$$p(x) = \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 + 2x; \quad p(0) = 0; \quad p(1) = \frac{1}{3}$$

$$p'(x) = 4x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; \quad x_2 = 0.5$$

} \Rightarrow $p(x)$ – strict crescătoare pe $[0, 0.5]$
 - strict descrescătoare pe $[0.5, 1]$

$$\Rightarrow p(0.5) = \frac{5}{12} < 1$$

$$|g'(x)| < 1, \forall x \in [0, 1]$$

$[0, 1]$ – vecinătate din care poate fi inițializată metoda iterării

Exercițiul 5

Fie ecuația neliniară $x^3 - x^2 - x \cdot \cos(x) = 2$. Verificați că ecuația admite o soluție reală în intervalul $[1, 2]$ și determinați o vecinătate din care ar putea fi inițializată metoda Newton astfel încât să fie evitată blocarea ei.

Rezolvare:

$$f(x) = x^3 - x^2 - x \cdot \cos(x) - 2$$

$$f(1) = -2 - \cos(1) < 0$$

$$f(2) = 2 - 2 \cdot \cos(2) > 0$$

$$\Rightarrow \exists \alpha \in (1, 2) \text{ a. i. } f(\alpha) = 0$$

☞ evitarea blocării metodei Newton → $f'(x)$ – strict monotonă pe V_α

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x - \cos(x) + x \cdot \sin(x)$$

$$f'(1) = 3 - 2 - \cos(1) + \sin(1) > 0$$

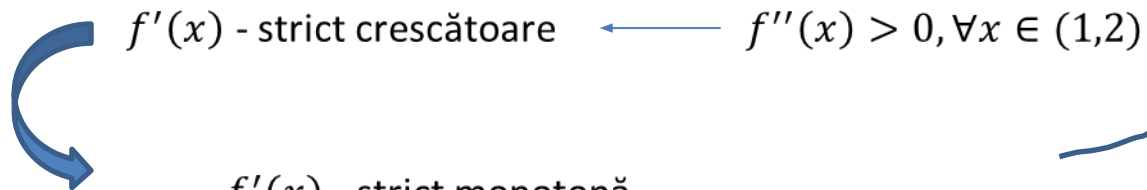
$$f'(2) = 12 - 4 - \cos(2) + 2 \cdot \sin(1) > 0$$

$$f''(x) = 6 \cdot x - 2 + 2 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)$$

$$f''(1) = 4 + 2 \cdot \sin(1) + \cos(1) > 0$$

$$f''(2) = 10 + 2 \cdot \sin(2) + 2 \cdot \cos(2) > 0$$

$$f'''(x) = 6 + 2 \cdot \cos(x) + \cos(x) - x \cdot \sin(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f''(x) \text{- strict crescătoare}$$



$$V_\alpha = [1, 2]$$

Exercițiul 6

Realizați în mediul de programare MATLAB, funcția care returnează numărul rădăcinilor reale ale unui polinom. Parametrul de intrare al funcției va fi vectorul ce conține coeficienți reali ai polinomului (se utilizează funcțiile elementare, precum și funcția `schur` cu sintaxa `S = schur(a)` care returnează forma canonică Schur a matricei dată drept parametru de intrare).

Rezolvare:

parametri de intrare – ieșire funcție MATLAB:

- intrare: vector ce conține coeficienții polinomului;
- ieșire: scalar care reprezintă numărul rădăcinilor reale ale polinomului.

structura funcției:

- ✓ verificare parametru de intrare (vector cu cel puțin 2 elemente)
- ✓ determinare grad polinom
- ✓ împărțirea coeficienților prin coeficientul puterii dominante
- ✓ formare matrice Frobenius atașată polinomului
- ✓ calcul formă canonică Schur pentru matricea Frobenius create
- ✓ numărare elemente nenule de pe subdiagonala principală a matricei Schur
- ✓ Calcul număr rădăcini reale