

Линейная алгебра

Лекция 6

Система лин. однор. уравнений. Фундаментальная система решений

Общее решение неоднородной системы

Псевдообратные матрицы

Решение СЛУ с помощью обобщенно обратных матрицы – псевдорешение.

Решение СЛОУ

Всякая система n -мерных векторов, состоящая более чем из n векторов, будет линейно зависима.

Вывод: из числа решений однородной системы (1), являющихся n -мерными векторами, можно выбрать конечную максимальную линейно независимую систему векторов. (Максимально в том смысле, что всякое другое решение системы (1) будет линейной комбинацией решений, входящих в эту выбранную систему).

Определение. Всякая максимальная линейно независимая система решений однородной системы (1) называется **фундаментальной системой решений**.

Если ранг r матрицы из коэффициентов системы линейных однородных уравнений (1) меньше числа неизвестных n , то **всякая фундаментальная система решений системы (1) состоит из $n-r$ решений**.

Число свободных неизвестных равно $n-r$

Пример. Фундаментальная система решений СЛЮУ

- $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2. Поскольку первые два уравнения линейно независимы, ограничимся только первыми двумя уравнениями. Общее решение системы получим в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{19}{8} x_3 + \frac{3}{8} x_4 - \frac{1}{2} x_5, \\ x_2 &= \frac{7}{8} x_3 - \frac{25}{8} x_4 + \frac{1}{2} x_5. \end{aligned}$$

Рассмотрим вектор свободных неизвестных (x_3, x_4, x_5) . Для нахождения фундаментальную систему решений рассматриваем три л.н.в. вектора (x_3, x_4, x_5) : $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

Вычисляя значения x_1 и x_2 получим след. фундам. систему решений

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left(\frac{19}{8}, \frac{7}{8}, 1, 0, 0 \right), & \alpha_2 &= \left(\frac{3}{8}, -\frac{25}{8}, 0, 1, 0 \right), \\ \alpha_3 &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 1 \right). \end{aligned}$$

Пример (3.236. Демидович)

Найти общее решение неоднор. системы, используя фундаментальную систему решений для однородной системы

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 &= 3.\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c}1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & 10 & 2 \\ 0 & 9 & -9 & -9 & 15 & 3\end{array}\right).$$

Очевидно, что ранг матрицы системы равен 2. Фундаментальная система решений однородной системы состоит из $5-2=3$ решений.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{част}} + c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + c_3 \mathbf{x}_3.$$

$$\mathbf{x}_{\text{част}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0\right).$$

Находим фундаментальную систему решений Однородной системы исходя из линейно независимых векторов (x_3, x_4, x_5) : $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$:

$$x_2 = \frac{1}{3}(3x_3 + 3x_4 - 5x_5), \quad x_1 = (x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5).$$

$$\mathbf{x}_1 = (0, 1, 1, 0, 0), \quad \mathbf{x}_2 = (0, 1, 0, 1, 0), \quad \mathbf{x}_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 0, 1\right).$$

Заключение. О применении СЛУ

Пример 1. Рассмотрим производство трех товаров. Предположим, что все эти товары используются в производстве других товаров (для внутренних потребностей).

x_{ij} – количество i -го товара, использованного для производства j -го;

x_i – общее количество товара;

a_{ij} - количество i -го товара, использованного для производства единицы j -го товара:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}.$$

Пусть $y_1 = 20, y_2 = 30, y_3 = 40$, – потребности в 1-м, 2-м и 3-м товарах для конечного пользования (помимо внутренних потребностей),

Заключение. О применении СЛУ

$$\begin{cases} x_1 = 0,3x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3 + 20 & 0,7x_1 - 0,2x_2 - 0,3x_3 = 20 \\ x_2 = 0,2x_1 + 0,3x_2 + 0,2x_3 + 30 & \rightarrow -0,2x_1 + 0,7x_2 - 0,2x_3 = 30 \\ x_3 = 0,4x_1 + 0,6x_2 + 0,4x_3 + 40 & -0,4x_1 - 0,6x_2 + 0,6x_3 = 40. \end{cases}$$

Система имеет следующее матричное представление:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0,7 & -0,2 & -0,3 \\ -0,2 & 0,7 & -0,2 \\ -0,4 & -0,6 & 0,6 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

Решив систему получим

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 420 \\ 820 \end{bmatrix}.$$

Псевдообратная матрица

Рассмотрим систему лин. уравнений

$$Ax = b.$$

Если A невырожденная матрица, то $x = A^{-1}b$.

Но, если матрица A **вырожденная**, т.е. не имеет обратной матрицы или же – **не квадратная**, то возникают два вопроса.

Первый вопрос: если система совместная, как

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 4, \end{cases}$$

то возникает необходимость в выборе единственного решения системы. А желательно, что решение было получено аналитически (типа $x = A^{-1}b$).

Вторая проблема возникает, когда система вовсе не совместная, но тоже «**нужно хоть какое-то приближенное решение**».

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$$

Псевдообратная матрица

В 20-м веке американским математиком **Э. Муром** (1920) и английским математиком **Р. Пенроузом** (1955) были отвечены на эти вопросы.

Определение 1. Пусть $A_{m \times n}$ - произвольная действительная матрица. Матрицу A^+ называют **псевдообратной** или **обобщенно обратной матрицей по Мура-Пенроузу**, если для нее выполняются следующие 4 условия:

- 1) $AA^+A = A$,
- 2) $A^+AA^+ = A^+$,
- 3) $(AA^+)^T = AA^+$,
- 4) $(A^+A)^T = A^+A$.

Для любой матрицы $A_{m \times n}$ существует псевдообратная матрица $A_{n \times m}^+$.

Псевдообратная матрица

Теорема 1. Для любой матрицы $A_{m \times n}$ всегда существует, причем единственная псевдообратная матрица A^+ .

Доказательство. Пусть B и C - псевдообратные матрицы и поэтому же удовлетворяют условиям 1)-4).

Тогда

$$\begin{aligned} B &= BAB = B(AB)^T = BB^T A^T = BB^T (ACA)^T = B(AB)^T (AC)^T = \\ &= BABAC = BAC = (BA)^T CAC = (BA)^T (CA)^T C = A^T B^T A^T C^T C = \\ &= A^T C^T C = CAC = C. \end{aligned}$$

Задача 1. Если A - невырожденная матрица, то $A^+ = A^{-1}$.

Доказательство. $AA^{-1}A = AI = A$ и $A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}I = A^{-1}$.

Задача 2. Пусть, $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, тогда $A^+ = \lambda A^T$, где $\lambda = \frac{1}{a_1^2 + \dots + a_n^2}$.

Выполнение условий 1)-4) легко проверяется.

Основные свойства псевдообратной матрицы

1. $(A^+)^+ = A$,
2. $(A^T)^+ = (A^+)^T$.
3. $\text{rank } A^+ = \text{rank } A$.

Замечание. Если ранг матрицы A равен 1, то все строки (столбцы) матрицы A пропорциональны.

Задача 4. Доказать, что если ранг матрицы A равен 1, то

$$A^+ = \frac{1}{\text{Tr}(AA^T)} A^T.$$

Определение 2. $A_{m \times n}$ – матрица полного столбцового (строчного) ранга, если $\text{rank } A = n$ ($\text{rank } A = m$).

Заметим, что матрица AA^+ - идемпотентная.

Разложение по матрицам полного ранга

Теорема 2. 1) Пусть $A_{m \times n}$ – матрица полного столбцового ранга и $\text{rank } A = n$. Тогда

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T.$$

2) Пусть $A_{m \times n}$ – матрица полного строчного ранга и $\text{rank } A = m$. Тогда

$$A^+ = A^T (A A^T)^{-1}.$$

Заметка. Если матрица $A_{m \times n}$ – матрица полного столбцового ранга и $\text{rank } A = n$, то матрица $A^T A$ обратима.

Пример 1. Вычислить обратную матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 13 \end{bmatrix},$$

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 13 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 13 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 13 & 15 & -10 \\ 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Разложение по матрицам полного ранга

Теорема 3. (скелетное разложение). Пусть A - матрица порядка $m \times n$. Тогда существуют $m \times r$ матрица F полного столбцового ранга и $r \times n$ матрица G полного строчного ранга, такие, что

$$A = FG.$$

Доказательство приведено в [AleskPiont].

Пример 5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$

Мы должны найти разложение $A = FG$.

Ранг матрицы A равен 2. Первые два столбца матрицы A линейно

независимы. Положим $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$

Ищем G в виде $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix}.$ **Почему?**

Выражаем третий столбец через первые 2 столбца

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

(1)

Разложение по матрицам полного ранга

Из (1) получаем систему уравнений и решаем ее.

$$\begin{cases} a + 2b = 3 \\ 4a + 5b = 6 \\ 7a + 8b = 9. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + 2b = 3 \\ -3b = -6. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2. \end{cases}$$

$$\text{Итак, } A = FG \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Теорема 3. (основная формула для вычисления псевдообратной матрицы). Для любой матрицы A порядка $m \times n$ существует псевдообратная матрица A^+ и ее можно вычислить по формуле

$$A^+ = G^T (GG^T)^{-1} (F^T F)^{-1} F^T.$$

Вычислим псевдообратную матрицу из примера 5, для которой определены F и G .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

$$GG^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$
$$F^T F = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{bmatrix}.$$

Слайд 1

По формуле

$$A^+ = G^T (GG^T)^{-1} (F^T F)^{-1} F^T.$$

вычисляем псевдообратную матрицу

$$\begin{aligned} A^+ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31/18 & -13/9 \\ -13/9 & 11/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{36} \begin{bmatrix} -23 & -6 & 11 \\ -2 & 0 & 2 \\ 19 & 6 & -7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Псевдообратная матрица и аппроксимация

Рассмотрим систему лин. уравнений

$$Ax = \mathbf{b}. \quad (2)$$

Пусть матрица A – произвольная матрица. Возможно, что A вырожденная или не квадратная, а система (2) имеет множество решений или не имеет никакого решения (несовместная).

Определение 1. Вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ называют решением наименьших квадратов системы (2), если

$$|A\mathbf{u} - \mathbf{b}| \leq |A\mathbf{x} - \mathbf{b}| \text{ для всех } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Заметка 1. Вектор \mathbf{u} , удовлетворяющий (3) - не обязательно единственный.

Определение 2. Вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, **минимальной длины**, из всех векторов удовлетворяющих условию (3) называют **нормальным псевдорешением системы (2)** (или, **решением наименьших квадратов минимальной длины**),

Теорема 4. Нормальное псевдорешение (решение наименьших квадратов минимальной длины) системы (2) – единственное и определяется формулой

$$\mathbf{x} = A^+ \mathbf{b}.$$

Нормальное псевдорешение СЛУ

Найти наилучшее решение системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Данная система – несовместная.

Строим матрицу: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ранг этой матрицы равен 2. Значит, A можно представить следующим скелетным разложением (full rank factorization)

$$A = FG = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тема 6.

Вычисляем $F^T F$ и GG^T

$$F^T F = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}; \quad (F^T F)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2/3 \end{bmatrix};$$

$$GG^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad (CG)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix};$$

Далее, A^+ вычисляем по формуле $A^+ = G^T (GG^T)^{-1} (F^T F)^{-1} F^T$.

$$A^+ = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Итак, находим наилучшее решение

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Тема 6.

Найти наилучшее решение системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 9. \end{cases}$$

Данная система **совместная**. Хотя она отличается от предыдущей системы только последним уравнением, где правая часть равна 0.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Пример

Пример 1. Цена на яблоки «Голден» в сети магазинов «Карусель» в Москве в первой половине октября менялась согласно следующей таблице:

	12 октября	14 октября	16 октября	19 октября	23 октября
	140 руб.	145 руб.	142 руб.	130 руб.	?

Используя метод наименьших квадратов при аппроксимации функции цены от дня месяца в виде $p = a + bx$, найти приближенную цену на яблоко «Голден» на 23 октября.

Решение. $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 14 \\ 1 & 16 \\ 1 & 19 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 140 \\ 145 \\ 142 \\ 130 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^+ B = (A^T A)^{-1} A^T B = \begin{pmatrix} 163,34 \\ -1,58 \end{pmatrix}.$$

$$p = 163,34 - 1,58 * 23 = 127.$$

Домашняя задача

[Демидович]

3.233*. Выяснить, образуют ли строки каждой из матриц

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & 50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -30 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0,$$

$$5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0,$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0,$$

$$x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0.$$

Решить неоднородную систему используя фонд. сист. реш. однородной системы.

$$3.239. \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0,$$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 2,$$

$$2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -1.$$

Домашняя задача Темы 6.

Задачи из книги Aleskerov_Piontkovski.

Вычислить псевдообратные матрицы.

1. Calculate $[1, 0]^+$.

2. Calculate

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}^+.$$

3. Calculate $[3, 2, 1, 0]^+$.

4. Calculate

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^+.$$

5. Calculate

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}^+.$$

Домашняя задача Темы 6.

В задаче 7 нужно найти скелетное разложение матрицы A , т.е. $A=FG$.

Задача 8 решается так: сперва находится разложение FG указанной матрицы, а потом применяется теорема 3.

7. Find a full rank factorization of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. Calculate

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^+.$$

Домашняя задача Темы 6.

Найти решение наименьших квадратов минимальной длины (нормальное псевдорешение системы):

12. Find the least-square solution of smallest length of the linear system

$$\begin{cases} x - 3y + t & = -1, \\ 2y - 3z & = -1, \\ x - 2y + z + t & = 0, \\ x - 2z + t & = 8. \end{cases}$$

Следующая задача отмечена звездочкой (из сложных).

6.* Let A be an $m \times n$ matrix of rank r and let

$$K = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$$

be its canonical form (see Definition 2.4), where G is an upper $r \times n$ submatrix without zero rows and 0 denotes a zero submatrix. Let i_1, \dots, i_r be the numbers of columns where the leading coefficients of the echelons appears, and let F be a submatrix of A formed by its columns i_1, \dots, i_r . Prove that

$$A = FG$$

and this is a full rank factorization of A .