Линейная алгебра

Лекция 6

Система лин. однор. уравнений. Фундаментальная система решений

Общее решение неоднородной системы

Псевдообратные матрицы

Решение СЛУ с помощью обобщенно обратных матрицы – псевдорешение.

Продолжение. О решении однородной СЛУ

- Рассматриваем однородную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Вспомним теорему с предыдущей лекции:

Теорема 1. Система однородных уравнений $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ имеет единственное нулевое решение (0,…,0), если $\operatorname{rank} A = n$, и бесконечно много решений, если $\operatorname{rank} A < n$.

В частности система n линейных однородных уравнений с n неизвестными тогда и только тогда обладает решениями, отличными от нуля, когда определитель этой системы равен нулю.

Решение СЛОУ

Всякая система n-мерных векторов, состоящая более чем из n векторов, будет линейно зависимы.

Вывод: из числа решений однородной системы (1), являющихся n-мерными векторами, можно выбрать конечную максимальную линейно независимую систему векторов. (Максимально в том смысле, что всякое другое решение системы (1) будет линейной комбинацией решений, входящих в эту выбранную систему).

Определение. Всякая максимальная линейно независимая система решений однородной системы (1) называется **фундаментальной системой решений.**

Если ранг r матрицы из коэффициентов системы линейных однородных уравнений (1) меньше числа неизвестных n, то всякая фундаментальная система решений системы (1) состоит из n-r решений.

Число свободных неизвестных равно n-r

Пример. Фундаментальная система решений СЛОУ

- $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2. Поскольку первые два уравнения линейно независимы, ограничимся только первыми двум уравнениями. Общее решение системы получим в виде:

$$x_1 = \frac{19}{8} x_3 + \frac{3}{8} x_4 - \frac{1}{2} x_5,$$

$$x_2 = \frac{7}{8} x_3 - \frac{25}{8} x_4 + \frac{1}{2} x_5.$$

Рассмотрим вектор свободных неизвестных (x_3, x_4, x_5). Для нахождения фундаментальную систему решений рассматриваем три лин. независимых вектора (x_3, x_4, x_5): $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

Вычисляя значения x_1 и x_2 получим след. фундам. систему решений

$$\alpha_1 = \left(\frac{19}{8}, \frac{7}{8}, 1, 0, 0\right), \quad \alpha_2 = \left(\frac{3}{8}, -\frac{25}{8}, 0, 1, 0\right),$$

$$\alpha_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 1\right).$$

О множестве решений СЛНОУ

- Рассмотрим систему неоднородных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (2)$$

Приведенной системой для (2) – это система однородных уравнений, полученная из (2) «обнулением» правой части – свободных членов.

Теорема 1. Сумма любого решения (2) с любым решением приведенной системы (1) снова будет решением (2).

Следствие из теоремы 1. Найдя одно частное решение $\mathbf{x}_{\text{част}}$ системы (2) и складывая его с каждым из решений приведенной системы (1), мы получим все решения системы (2).

Утверждение 1. Пусть $\mathbf{x}_{\text{част}}$ - одно из решений системы (2), а $(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x}_{n-r})$ – фундаментальная система решений приведенной системы. Тогда любое решение (2) можно представить как

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{част}} + \mathrm{c}_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathrm{c}_{n-\mathrm{r}}\mathbf{x}_{n-r} \qquad (3)$$

и наоборот, каждый вектор (3) есть решение системы (2).

Пример (3.236. Демидович)

Найти общее решение неоднор. системы, используя фундаментальную систему решений для однородной системы

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 &= 3. \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & 10 & 2 \\ 0 & 9 & -9 & -9 & 15 & 3 \end{array}\right).$$

Очевидно, что ранг матрицы системы равен 2. Фундаментальная система решений однородной системы состоит из 5-2=3 решений.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{част}} + c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x_2} + c_3\mathbf{x}_3.$$

$$\mathbf{x}_{\text{част}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0,0,0\right).$$

Находим фундаментальную систему решений Однородной системы исходя из линейно независимых векторов (x_3, x_4, x_5): $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$:

$x_2 = \frac{1}{3}(3x_3 + 3x_4 - 5x_5)$, $x_1 = (x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5)$.

$\mathbf{x_1} = (0,1,1,0,0)$, $\mathbf{x_2} = (0,1,0,1,0)$, $\mathbf{x_3} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 0,0,1\right)$.

Заключение. О применении СЛУ

- Пример 1. Рассмотрим производство трех товаров. Предположим, что все эти товары используются в производстве других товаров (для внутренних потребностей).

x_{ij} – количество i-го товара, использованного для производства j-го;

x_i – общее количество товара;

a_{ij} - количество i-го товара, использованного для производства единицы j-го товара:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}.$$

Пусть $y_1 = 20, y_2 = 30, y_3 = 40,$ – потребности в 1-м, 2-м и 3-м товарах для конечного пользования (помимо внутренних потребностей),

Заключение. О применении СЛУ

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 + 20 \\ x_2 = 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}2x_3 + 30 \\ x_3 = 0{,}4x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}4x_3 + 40 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 0{,}7x_1 - 0{,}2x_2 - 0{,}3x_3 = 20 \\ -0{,}2x_1 + 0{,}7x_2 - 0{,}2x_3 = 30 \\ -0{,}4x_1 - 0{,}6x_2 + 0{,}6x_3 = 40. \end{matrix}$$

Система имеет следующее матричное представление:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}7 & -0{,}2 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & 0{,}7 & -0{,}2 \\ -0{,}4 & -0{,}6 & 0{,}6 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

Решив систему получим

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 420 \\ 820 \end{bmatrix}.$$

Псевдообратная матрица

- Рассмотрим систему лин. уравнений

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Если A невырожденная матрица, то $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Но, если матрица A вырожденная, т.е. не имеет обратной матрицы или же – не квадратная, то возникают два вопроса.

Первый вопрос: если система совместная, как

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 4, \end{cases}$$

то возникает необходимость в выборе единственного решения системы. А желательно, что решение было получено аналитически (типа $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$).

Вторая проблема возникает, когда система вовсе не совместная, но тоже «нужно хоть какое-то приближенное решение».

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$$

Псевдообратная матрица

- В 20-м веке американским математиком Э. Муром (1920) и английским математиком Р. Пенроузом (1955) были отвечены на эти вопросы.

Определение 1. Пусть $A_{m\times n}$ - произвольная действительная матрица. Матрицу A^+ называют псевдообратной или обобщенно обратной матрицей по Мура-Пенроузу, если для нее выполняются следующие 4 условия:

1) $AA^+A = A,$

2) $A^+AA^+ = A^+,$

3) $(AA^+)^T = AA^+,$

4) $(A^+A)^T = A^+A.$

Для любой матрицы $A_{m\times n}$ существует псевдообратная матрица $A^+_{n\times m}$.

Псевдообратная матрица

- Теорема 1. Для любой матрицы $A_{m\times n}$ всегда существует, причем единственная псевдообратная матрица A^{+}.

Доказательство. Пусть B и C - псевдооратные матрицы и поэтому же удовлетворяют условиям 1)-4).

Тогда

$$B = BAB = B(AB)^T = BB^TA^T = BB^T(ACA)^T = B(AB)^T(AC)^T =$$
$$= BABAC = BAC = (BA)^TCAC = (BA)^T(CA)^TC = A^TB^TA^TC^TC =$$
$$= A^TC^TC = CAC = C.$$

Задача 1. Если A – невырожденная матрица, то $A^{+} = A^{-1}$.

Доказательство. $AA^{-1}A = AI = A$ и $A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}I = A^{-1}$.

Задача 2. Пусть , $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, тогда $A^{+} = \lambda A^T$, где $\lambda = \frac{1}{a_1^2+\cdots+a_n^2}$.

Выполнение условий 1)-4) легко проверяется.

Основные свойства псевдообратной матрицы

1. $(A^+)^+ = A$,
2. $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^+ = (A^+)^T$.
3. $\operatorname{rank} A^+ = \operatorname{rank} A$.

Замечание. Если ранг матрицы A равен 1, то все строки (столбцы) матрицы A пропорциональны.

Задача 4. Доказать, что если ранг матрицы A равен 1, то

$$A^+ = \frac{1}{\mathrm{Tr}(AA^T)} A^T.$$

Определение 2. $A_{m\times n}$ – матрица полного столбцового (строчного) ранга, если $\operatorname{rank} A=n$ ($\operatorname{rank} A=m$).

Заметим, что матрица AA^+ - идемпотентная.

Разложение по матрицам полного ранга

Теорема 2. 1) Пусть $A_{m\times n}$ – матрица полного столбцового ранга и rank A=n. Тогда

$$A^{+} = (A^{T}A)^{-1}A^{T}.$$

2) Пусть $A_{m\times n}$ – матрица полного строчного ранга и rank A=m. Тогда

$$A^{+} = A^{T}(AA^{T})^{-1}.$$

Заметка. Если матрица $A_{m\times n}$ – матрица полного столбцового ранга и rank A=n, то матрица $A^{T}A$ обратима.

Пример 1. Вычислить обратную матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что

$$A^{T}A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 13 \end{bmatrix},$$

$$A^{+} = (A^{T}A)^{-1}A^{T} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 13 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 13 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{38}\begin{bmatrix} 13 & 15 & -10 \\ 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Разложение по матрицам полного ранга

Теорема 3. (скелетное разложение). Пусть A - матрица порядка $m \times n$. Тогда существуют $m \times r$ матрица F полного столбцового ранга и $r \times n$ матрица G полного строчного ранга, такие, что

$$A = FG.$$

Доказательство приведено в [AleskPiont].

Пример 5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Мы должны найти разложение $A = FG$.

Ранг матрицы A равен 2. Первые два столбца матрицы A линейно независимы. Положим $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.

Ищем G в виде $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix}$. **Почему?**

Выражаем третий столбец через первые 2 столбца

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Разложение по матрицам полного ранга

Из (1) получаем систему уравнений и решаем ее.

$$\begin{cases} a+2b=3 \\ 4a+5b=6 \\ 7a+8b=9. \end{cases} \to \begin{cases} a+2b=3 \\ -3b=-6. \end{cases} \to \begin{cases} a=-1 \\ b=2. \end{cases}$$

Итак, $A = FG \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Теорема 3. (основная формула для вычисления псевдообратной матрицы). Для любой матрицы A порядка $m \times n$ существует псевдообратная матрица A^+ и ее можно вычислить по формуле

$$A^+ = G^T(GG^T)^{-1}(F^TF)^{-1}F^T.$$

Вычислим псевдообратную матрицу из примера 5, для которой определены F и G.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

$$GG^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$F^TF = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{bmatrix}.$$

Слайд 1

По формуле

$$A^{+} = G^{T}(GG^{T})^{-1}(F^{T}F)^{-1}F^{T}.$$

вычисляем псевдообратную матрицу

$$A^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31/18 & -13/9 \\ -13/9 & 11/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{36} \begin{bmatrix} -23 & -6 & 11 \\ -2 & 0 & 2 \\ 19 & 6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Псевдообратная матрица и аппроксимация

- Рассмотрим систему лин. уравнений

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \qquad (2)$$

Пусть матрица A – произвольная матрица. Возможно, что A вырожденная или не квадратная, а система (2) имеет множество решений или не имеет никакого решения (несовместная).

Определение 1. Вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ называют решением наименьших квадратов системы (2), если

$$|A\mathbf{u} - \mathbf{b}| \leq |A\mathbf{x} - \mathbf{b}| \text{ для всех } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}. \qquad (3)$$

Заметка 1. Вектор **u,** удовлетворяющий (3) - не обязательно единственный.

Определение 2. Вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, минимальной длины, из всех векторов удовлетворяющих условию (3) называют нормальным псевдорешением системы (2) (или, решением наименьших квадратов минимальной длины),

Теорема 4. Нормальное псевдорешение (решение наименьших квадратов минимальной длины) системы (2) – единственное и определяется формулой

$$\mathbf{x} = A^{+}\mathbf{b}.$$

Нормальное псевдорешение СЛУ

Найти наилучшее решение системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Данная система – несовместная.

Строим матрицу: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ранг этой матрицы равен 2. Значит, A можно представить следующим скелетным разложением (full rank factorization)

$$A = FG = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тема 6.

- Вычисляем $F^T F$ и GG^T

$$F^T F = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}; \qquad (F^T F)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2/3 \end{bmatrix};$$

$$GG^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; \qquad (CG)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix};$$

Далее, A^+ вычисляем по формуле $A^+ = G^T (GG^T)^{-1} (F^T F)^{-1} F^T$.

$$A^+ = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Итак, находим наилучшее решение

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Тема 6.

Найти наилучшее решение системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 9. \end{cases}$$

Данная система совместная. Хотя она отличается от предыдущей системы только последним уравнением, где правая часть равна 0.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Пример

Пример 1. Цена на яблоки «Голден» в сети магазинов «Карусель» в Москве в первой половине октября менялась согласно следующей таблице:

	12 октября	14 октября	16 октября	19 октября	23 октября
	140 руб.	145 руб.	142 руб.	130 руб.	?

Используя метод наименьших квадратов при аппроксимации функции цены от дня месяца в виде $p = a + bx$, найти приближенную цену на яблоко «Голден» на 23 октября.

Решение. $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 14 \\ 1 & 16 \\ 1 & 19 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 140 \\ 145 \\ 142 \\ 130 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{+}B = (A^{T}A)^{-1}A^{T} \; B = \begin{pmatrix} 163{,}34 \\ -1{,}58 \end{pmatrix}.$$

$p = 163{,}34 - 1.58 * 23 = 127.$

Домашняя задача

[Демидович]

3.233*. Выяснить, образуют ли строки каждой из матриц

$$A=\begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & 50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -30 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+2x_3+x_4+6x_5&=0,\\ 5x_1+9x_2+7x_3+4x_4+7x_5&=0,\\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4+11x_5&=0,\\ x_1+6x_2+8x_3+5x_4-4x_5&=0. \end{aligned}$$

Решить неоднородную систему используя фунд. сист. реш. однородной системы.

3.239.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5&=0,\\ x_1-2x_2-3x_3-4x_4-5x_5&=2,\\ 2x_2+3x_3+4x_4+5x_5&=-1. \end{aligned}$$

Домашняя задача Темы 6.

Задачи из книги Aleskerov_Piontkovski.

Вычислить псевдообратные матрицы.

1. Calculate $[1, 0]^+$.
2. Calculate

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}^+ .$$

3. Calculate $[3, 2, 1, 0]^+$.

4. Calculate

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^+ .$$

5. Calculate

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}^+ .$$

Домашняя задача Темы 6.

В задаче 7 нужно найти скелетное разложение матрицы A, т.е. $A=FG$.

Задача 8 решается так: сперва находится разложение FG указанной матрицы, а потом применяется теорема 3.

7. Find a full rank factorization of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. Calculate

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{+}.$$

Домашняя задача Темы 6.

Найти решение наименьших квадратов минимальной длины (нормальное псевдорешение системы):

12. Find the least-square solution of smallest length of the linear system

$$\begin{cases} x - 3y + t &= -1, \\ 2y - 3z &= -1, \\ x - 2y + z + t &= 0, \\ x - 2z + t &= 8. \end{cases}$$

Следующая задача отмечена звездочкой (из сложных).

6.* Let A be an $m \times n$ matrix of rank r and let

$$K = \left[\frac{G}{0}\right]$$

be its canonical form (see Definition 2.4), where G is an upper $r \times n$ submatrix without zero rows and 0 denotes a zero submatrix. Let $i_1, \ldots, i_r$ be the numbers of columns where the leading coefficients of the echelons appears, and let F be a submatrix of A formed by its columns $i_1, \ldots, i_r$. Prove that

$$A = FG$$

and this is a full rank factorization of A.