Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

Основные тригонометрические тождества

Основное тригонометрическое тождество.

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Зависимость между синусом и косинусом:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \qquad \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Синус, косинус, тангенс углов $(-\alpha)$ ***и*** α

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad tg(-\alpha) = -tg\alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$$

Пример 1: Могут ли одновременно быть справедливы равенства:

$$a)\cos\alpha = \frac{1}{2} \text{ и } \sin\alpha = \frac{1}{2}?$$

Решение: т.к. рассматриваются функции $\sin\alpha$ *и* $\cos\alpha$ *одного и того же аргумента, то должно выполнятся основное тригонометрическое тождество:*

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \text{ но } \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \neq 1$$

=> $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ и $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ одновременно справедливы быть не могут.

Пример 1: Могут ли одновременно быть справедливы равенства:

$$б) cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} и \sin\alpha = \frac{1}{2}?$$

$Решение:$ *проверим выполнение основного тригонометрического тождества:*

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \ \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

Основное тригонометрическое тождество выполняется. Значит одновременно справедливы.

Выполнить самостоятельно:
Могут ли одновременно быть справедливы равенства:

$$1) cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} u \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$2) \cos\alpha = -\frac{3}{5} u \sin\alpha = -\frac{4}{5};$$

$$3) \cos\alpha = -\frac{\sqrt{23}}{5} u \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{5};$$

$$4) \cos\alpha = 0{,}8 u \sin\alpha = 0{,}2\,?$$

Пример 2:Найти значения тригонометрических функций числа α, зная, что sinα=0,6 и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$

$$Решение: т.к. \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, то \alpha \in IIчIчетвер ,следовательно$$

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}6^2} = -0{,}8;$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{0{,}6}{0{,}8} = -\frac{3}{4};$$

$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -1\frac{1}{3}.$$

Выполнить самостоятельно:

1) $\sin\alpha, tg\alpha, ctg\alpha, если \cos\alpha = -\frac{3}{5} и \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$

2) $\cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha, если \sin\alpha = -\frac{2}{5} и \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2};$

3) $\sin\alpha, tg\alpha, ctg\alpha, если \cos\alpha = -\frac{5}{13} и \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi;$

4) $\cos\alpha, \sin\alpha, ctg\alpha, если tg\alpha = \frac{15}{8} и \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2};$

5) $\sin\alpha, tg\alpha, ctg\alpha, если \cos\alpha = 0{,}8 и 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$

6) $\sin\alpha, tg\alpha, \cos\alpha, если ctg\alpha = -3 и \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi;$

Пример 3:Упростить:

$$\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha =$$

$$= \sin^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha =$$

$$= \sin^2\alpha * 1 + \cos^2\alpha = 1$$

Упростить выражение:

1) $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha - 2\sin\alpha$;

2) $\cos\alpha - \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$;

4) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$.

Пример 3: докажите тождество:

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{ctg\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=2tg^2\alpha$$

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{ctg\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-1}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha-1}{\dfrac{\cos\alpha-\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha*\sin\alpha}{\cos\alpha(1-\sin^2\alpha)}=$$

$$=\frac{2\cos\alpha\sin^2\alpha}{\cos\alpha\cos^2\alpha}=2*\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2tg^2\alpha$$

Выполнить самостоятельно:

Доказать тождество:

1) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) = \sin^2\alpha;$

2) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha) = \cos^2\alpha;$

3) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha;$

4) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha;$

5) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} + \sin^2\alpha = 1;$

6) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} + \cos^2\alpha = 1.$

Упростить выражени

Практическое занятие

Вариант 1	Вариант 2
1. Записать основное тригонометрическое тождество……………………………	1. Записать основное тригонометрическое тождество…………………………………
2. Выразить из тригонометрического тождества функцию $\sin\alpha =$ ………………………………………………	2. Выразить из тригонометрического тождества функцию $\cos\alpha =$ …………………..
3. Найти $\cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$, если известно, что $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	3. Найти $\sin\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$ $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$