

Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

Основные
тригонометрические
тождества



Основное тригонометрическое тождество.

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Зависимость между синусом и косинусом:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Синус, косинус, тангенс углов $(-\alpha)$ ^и α

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

Пример 1: Могут ли одновременно быть справедливы равенства:

$$a) \cos \alpha = \frac{1}{2} \text{ и } \sin \alpha = \frac{1}{2} ?$$

Решение: т.к. рассматриваются функции $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ одного и того же аргумента, то должно выполняться основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \text{ но } \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \neq 1$$

$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$ и $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ одновременно справедливы быть не могут.

Пример 1: Могут ли одновременно быть справедливы равенства:

$$\text{б) } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } \sin \alpha = \frac{1}{2}?$$

Решение: проверим выполнение

основного тригонометрического тождества:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

Основное тригонометрическое тождество выполняется. Значит одновременно справедливы.

Выполнить самостоятельно:

Могут ли одновременно быть справедливы равенства:

$$1) \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ и } \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$2) \cos \alpha = -\frac{3}{5} \text{ и } \sin \alpha = -\frac{4}{5};$$

$$3) \cos \alpha = -\frac{\sqrt{23}}{5} \text{ и } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{5};$$

$$4) \cos \alpha = 0,8 \text{ и } \sin \alpha = 0,2?$$

**Пример 2: Найти значения
тригонометрических функций числа α , зная,
что $\sin \alpha = 0,6$ и $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.**

Решение: т.к. $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, то $\alpha \in \text{II}$ Четвер, следовательно

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,6^2} = -0,8;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,6}{0,8} = -\frac{3}{4};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -1\frac{1}{3}.$$

Выполнить самостоятельно:

1) $\sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$;

2) $\cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{2}{5}$ и $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$;

3) $\sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$;

4) $\cos \alpha, \sin \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$ и $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$;

5) $\sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$, если $\cos \alpha = 0,8$ и $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$;

6) $\sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -3$ и $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$;

Пример 3: Упростить:

$$\begin{aligned} & \sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \\ & = \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha = \\ & = \sin^2 \alpha * 1 + \cos^2 \alpha = 1 \end{aligned}$$

Упростить выражение:

1) $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - 2 \sin \alpha$;

2) $\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$;

3) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}$;

4) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha}$.

Пример 3: докажете тождество:

$$\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 1}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 1}{\frac{\cos \alpha - \sin^2 \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha * \sin \alpha}{\cos \alpha (1 - \sin^2 \alpha)} = \\ &= \frac{2 \cos \alpha \sin^2 \alpha}{\cos \alpha \cos^2 \alpha} = 2 * \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \end{aligned}$$

Выполнить самостоятельно:

Доказать тождество:

$$1) (1 - \cos \alpha) (1 + \cos \alpha) = \sin^2 \alpha;$$

$$2) (1 - \sin \alpha) (1 + \sin \alpha) = \cos^2 \alpha;$$

$$3) \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha;$$

$$4) \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha;$$

$$5) \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \sin^2 \alpha = 1;$$

$$6) \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} + \cos^2 \alpha = 1.$$

Упростить выражение:

Практическое занятие

Вариант 1

1. Записать основное тригонометрическое тождество.....

2. Выразить из тригонометрического тождества функцию

..... $\sin \alpha = \dots$

3. Найти $\cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$, если известно, что

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Вариант 2

1. Записать основное тригонометрическое тождество.....

2. Выразить из тригонометрического тождества функцию

..... $\cos \alpha = \dots$

3. Найти $\sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$, если известно, что

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{4} \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$