

# Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

Основные  
тригонометрические  
тождества



## Основное тригонометрическое тождество.

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

*Зависимость между синусом и косинусом:*

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

*Синус, косинус, тангенс углов  $(-\alpha)$  и  $\alpha$*

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

**Пример 1: Могут ли одновременно быть справедливы равенства:**

$$a) \cos \alpha = \frac{1}{2} \text{ и } \sin \alpha = \frac{1}{2}?$$

Решение: т.к. рассматриваются функции  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  одного и того же аргумента, то должно выполняться основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \text{ но } \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \neq 1$$

$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$  и  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$  одновременно справедливы быть не могут.

***Пример 1: Могут ли одновременно быть справедливы равенства:***

$$\text{б) } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } \sin \alpha = \frac{1}{2}?$$

*Решение: проверим выполнение*

*основного тригонометрического тождества:*

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

Основное тригонометрическое тождество выполняется. Значит одновременно справедливы.

***Выполнить самостоятельно:***

***Могут ли одновременно быть справедливы равенства:***

$$1) \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ и } \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$2) \cos \alpha = -\frac{3}{5} \text{ и } \sin \alpha = -\frac{4}{5};$$

$$3) \cos \alpha = -\frac{\sqrt{23}}{5} \text{ и } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{5};$$

$$4) \cos \alpha = 0,8 \text{ и } \sin \alpha = 0,2?$$

**Пример 2: Найти значения  
тригонометрических функций числа  $\alpha$ , зная,  
что  $\sin \alpha = 0,6$  и  $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ .**

Решение: т.к.  $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ , то  $\alpha \in \text{II}$  Четвер, следовательно

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,6^2} = -0,8;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,6}{0,8} = -\frac{3}{4};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -1\frac{1}{3}.$$

## ***Выполнить самостоятельно:***

1)  $\sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$  и  $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ ;

2)  $\cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = -\frac{2}{5}$  и  $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$ ;

3)  $\sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$  и  $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$ ;

4)  $\cos \alpha, \sin \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$  и  $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$ ;

5)  $\sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\cos \alpha = 0,8$  и  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ;

6)  $\sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \cos \alpha$ , если  $\operatorname{ctg} \alpha = -3$  и  $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$ ;

### Пример 3: Упростить:

$$\begin{aligned} & \sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \\ & = \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha = \\ & = \sin^2 \alpha * 1 + \cos^2 \alpha = 1 \end{aligned}$$

Упростить выражение:

1)  $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - 2 \sin \alpha$ ;

2)  $\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ ;

3)  $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}$ ;

4)  $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha}$ .



### Пример 3: докажете тождество:

$$\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 1}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 1}{\frac{\cos \alpha - \sin^2 \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha * \sin \alpha}{\cos \alpha (1 - \sin^2 \alpha)} = \\ &= \frac{2 \cos \alpha \sin^2 \alpha}{\cos \alpha \cos^2 \alpha} = 2 * \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \end{aligned}$$

## *Выполнить самостоятельно:*

Доказать тождество:

$$1) (1 - \cos \alpha) (1 + \cos \alpha) = \sin^2 \alpha;$$

$$2) (1 - \sin \alpha) (1 + \sin \alpha) = \cos^2 \alpha;$$

$$3) \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha;$$

$$4) \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha;$$

$$5) \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \sin^2 \alpha = 1;$$

$$6) \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} + \cos^2 \alpha = 1.$$

Упростить выражение:

# Практическое занятие

## Вариант 1

1. Записать основное тригонометрическое тождество.....

2. Выразить из тригонометрического тождества функцию

.....  $\sin \alpha = \dots$

3. Найти  $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$ , если известно, что

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

## Вариант 2

1. Записать основное тригонометрическое тождество.....

2. Выразить из тригонометрического тождества функцию

.....  $\cos \alpha = \dots$

3. Найти  $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$ , если известно, что

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{4} \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$