

TEMA:

*Funcții continue pe spații topologice. Mulțimi deschise. Mulțimi închise. Vecinătăți. Puncte interioare, exterioare, aderente, de frontieră.
Homeomorfism a spațiilor topologice.*

CHIȘINĂU 2021, UPSC

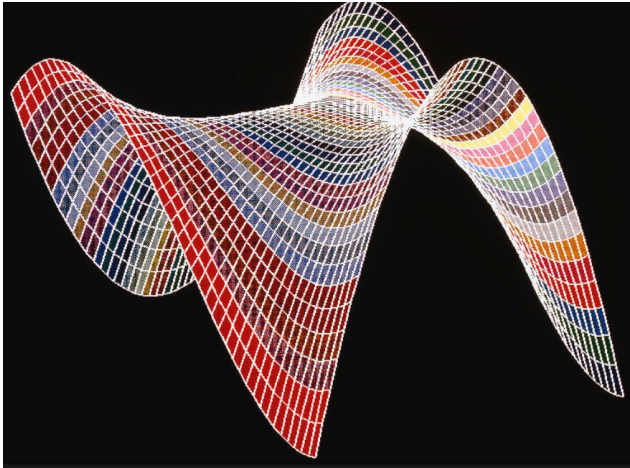
Funcții continue pe spații topologice

Fie X și Y două spații topologice, A o submulțime a lui X și fie $f : A \rightarrow Y$ o funcție. Fie a un punct de acumulare al lui A (adică un punct cu proprietatea că pentru orice U vecinătate a lui a , $A \cap (U \setminus \{a\}) \neq \emptyset$). Se spune că f are *limita* $b \in Y$ în punctul a și se scrie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ dacă pentru orice vecinătate V a lui b există o vecinătate U_V a lui a astfel încât $f(x) \in V$ pentru orice $x \in (U_V \setminus \{a\}) \cap A$.

Se spune că $f : A \rightarrow Y$ este *continuă într-un punct* $a \in A$ dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(a)$ există o vecinătate U_V a lui a astfel încât $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U_V \cap A$. Se observă că f este continuă în orice punct izolat (adică un punct $a \in A$ pentru care există o vecinătate U a lui a astfel încât $A \cap U = \{a\}$). Dacă $a \in A$ este punct de acumulare pentru A , atunci f este continuă în a dacă și numai dacă $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Dacă f este continuă în a și $(x_n)_n$ este un șir din X astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

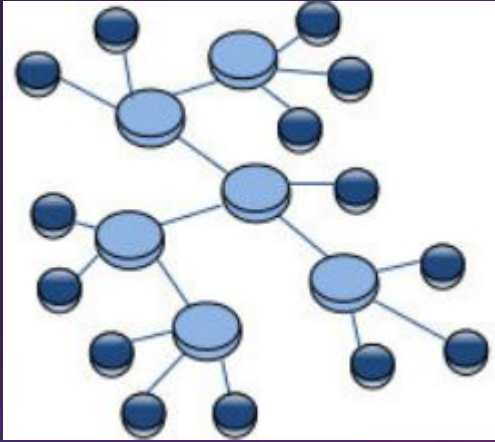
Se spune că $f : A \rightarrow Y$ este *continuă* pe A dacă f este continuă în orice punct $a \in A$.

Dacă X și Y sunt două spații topologice și $f:X \rightarrow Y$ este o funcție, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:



1. f continuă pe X
2. Pentru orice mulțime deschisă $G \subset Y$, $f^{-1}(G)$ este deschisă în X
3. Pentru orice mulțime închisă $F \subset Y$, $f^{-1}(F)$ este închisă în X
4. Pentru orice $A \subset X$ avem $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$
5. Pentru orice $B \subset Y$ avem $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Dacă X și Y sunt două spații topologice și $f:X \rightarrow Y$ este o funcție bijectivă, atunci f se numește homeomorfism dacă f și f^{-1} sunt continue.



Topologie

Fie X o mulțime. O familie τ de submulțimi ale lui X se numește topologie pe X dacă și numai dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

1. X și \emptyset sunt elemente ale lui τ
2. Dacă I este o familie oarecare de indici și dacă $G_i \in \tau$ pentru orice $i \in I$, atunci
$$\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$$
3. Dacă I este o familie finită de indici și dacă $G_i \in \tau$ pentru orice $i \in I$, atunci $\bigcap_{i \in I} G_i \in \tau$

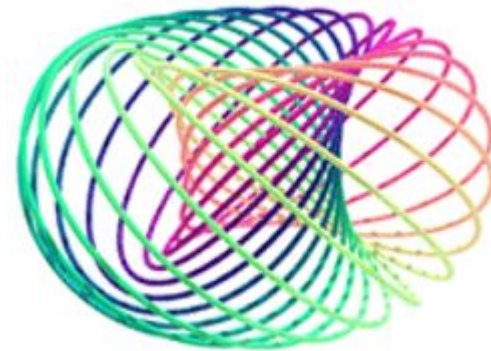
Mulțimi deschise/închise



Mulțimea X înzestrată cu o topologie τ se numește *spațiu topologic* și se notează (X, τ) . Dacă nu există posibilitatea unei confuzii, nu se mai precizează topologia τ . Elementele unui spațiu topologic se numesc *puncte*, iar elementele topologiei se numesc *mulțimi deschise* (cu alte cuvinte, $G \subset X$ se numește mulțime deschisă dacă și numai dacă $G \in \tau$). O submulțime F a spațiului topologic X se numește *închisă* dacă este complementara (în raport cu X) unei mulțimi deschise.

Tipuri de topologii

O submulțime F a spațiului topologic X se numește *închisă* dacă este complementara (în raport cu X) unei mulțimi deschise. Topologia în care familia mulțimilor deschise este $\{\emptyset, X\}$ se numește *topologia indiscretă sau trivială* pe X . Topologia $\tau_d = 2^X$ se numește *topologia discretă* pe X . Familia reuniunilor de intervale deschise ale lui \mathbf{R} împreună cu \emptyset dă o topologie pe \mathbf{R} numită *topologia uzuală* (sau *topologia naturală*) pe \mathbf{R} .



Vecinătăți

O submulțime V a spațiului topologic X se numește **vecinătate** a punctului $x \in X$ dacă există o mulțime deschisă G astfel încât $x \in G \subset V$. Mai general, V este o vecinătate a mulțimii $A \subset X$ dacă există o mulțime deschisă G astfel încât $A \subset G \subset V$. Se poate arăta ușor că o submulțime $A \subset X$ este deschisă dacă și numai dacă este vecinătate pentru orice punct al său. O mulțime $U(x)$ de vecinătăți ale unui punct $x \in X$ se numește **sistem fundamental de vecinătăți** pentru punctul x dacă pentru orice V vecinătate a lui x există $U \in U(x)$ astfel încât $U \subset V$.

Dacă notăm cu $V(x)$ mulțimea tuturor vecinătăților lui x atunci sunt adevărate următoarele proprietăți:

- V1. Dacă $V \in V(x)$ atunci $x \in V$.
- V2. Dacă $V \in V(x)$ și $V \subset U$, atunci $U \in V(x)$.
- V3. Dacă $V, U \in V(x)$, atunci $V \cap U \in V(x)$.
- V4. Dacă $V \in V(x)$, atunci există $U \in V(x)$ astfel încât V este vecinătate pentru fiecare punct $y \in U$.

Puncte

▶ Interioare

- ▶ Se numește **interiorul mulțimii** A , și se notează cu $\text{int}(A)$ (sau $\overset{\circ}{A}$), reuniunea tuturor mulțimilor deschise incluse în A . $\text{int}(A)$ poate fi definit în mod echivalent ca fiind cea mai mare mulțime deschisă (relativ la relația de incluziune) conținută în A . Punctele mulțimii $\text{int}(A)$ se numesc **puncte interioare** ale lui A . În consecință, $x \in \text{int}(A)$ dacă și numai dacă există o mulțime deschisă G astfel încât $x \in G \subset A$. Mulțimea A este deschisă dacă și numai dacă $A = \text{int}(A)$.

▶ Aderente

- ▶ Se numește **închiderea mulțimii** A , și se notează cu \bar{A} , intersecția tuturor mulțimilor închise ce conțin pe A . \bar{A} poate fi definită în mod echivalent ca fiind cea mai mică mulțime închisă (relativ la relația de incluziune) care conține pe A . Punctele mulțimii \bar{A} se numesc **puncte aderente** ale lui A . Se observă imediat că $x \in \bar{A}$ dacă și numai dacă pentru orice vecinătate V a lui x , $V \cap A \neq \emptyset$. Mulțimea A este închisă dacă și numai dacă $A = \bar{A}$. Mulțimea A se numește

▶ Exterior

- ▶ Se numește **exteriorul mulțimii** A , și se notează cu $\text{exterior}(A)$, mulțimea $\text{int}(X - A)$. Un punct $x \in \text{exterior}(A)$ se numește **punct exterior** lui A . Rezultă imediat că $x \in \text{exterior}(A)$ dacă și numai dacă există o vecinătate V a lui x astfel încât $V \cap A = \emptyset$.

▶ Frontieră

- ▶ Se numește **frontiera mulțimii** A , și se notează cu $\text{Fr}(A)$ sau $\partial(A)$, mulțimea $\bar{A} \cap \overline{X - A}$. Elementele mulțimii $\text{Fr}(A)$ se numesc **puncte frontieră** ale lui A (puncte care nu aparțin nici interiorului nici exteriorului mulțimii A). Vom nota cu $\text{frn}(A) = \text{Fr}(A) - A = \bar{A} - A$ (mulțimea punctelor frontieră ale lui A care nu aparțin lui A).

Homeomorfism

Spunem că o aplicație $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ este homeomorfism (sau izomorfism topologic) dacă este bijectivă și bicontinuu (adică, f și f^{-1} sunt continue).

Definiție.

- (i) Două spații topologice se numesc homeomorfe dacă există un homeomorfism între ele;
- (ii) O proprietate se numește topologică dacă se conservă prin homeomorfisme.

Teoremă.

O aplicație bijectivă $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ este homeomorfism dacă și numai dacă $\forall A \subseteq X, f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.



**Mulțumesc pentru
atenție!**