TEMA:

Funcţii continue pe spaţii topologice. Mulţimi deschise. Mulţimiînchise. Vecinătăţi. Puncte interiore, exterioare, aderente, de frontieră. Homeomorfism a spațiilor topologice.

CHIȘINĂU 2021, UPSC

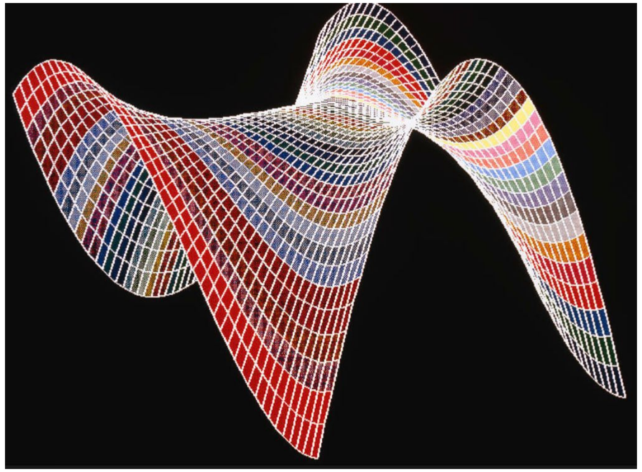
Funcții continue pe spații topologice

Fie X şi Y două spaţii topologice, A o submulţime a lui X şi fie f : A →Y o funcţie. Fie a un punct de acumulare al lui A (adică un punct cu proprietatea că pentru orice U vecinătate a lui a, A ∩ (U \ {a})≠∅). Se spune că f are ***limita*** b∈Y în punctul a şi se scrie $\lim_{x\to a} f(x)$ =b dacă pentru orice vecinătate V a lui b există o vecinătate U_V a lui a astfel încât f(x) ∈ V pentru orice x ∈ (U_V \ {a}) ∩A.

Se spune că f : A →Y este ***continuă într-un punct*** a ∈ A dacă pentru orice vecinătate V a lui f(a) există o vecinătate U_V a lui a astfel încât f(x) ∈ V pentru orice x ∈ U_V ∩A. Se observă că f este continuă în orice punct izolat (adică un punct a∈A pentru care există o vecinătate U a lui a astfel încât A ∩ U = {a}). Dacă a∈A este punct de acumulare pentru A, atunci f este continuă în a dacă şi numai dacă $\lim_{x\to a} f(x)$ = f(a). Dacă f este continuă în a şi $(x_n)_n$ este un şir din X astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n$=a, atunci $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$=f(a).

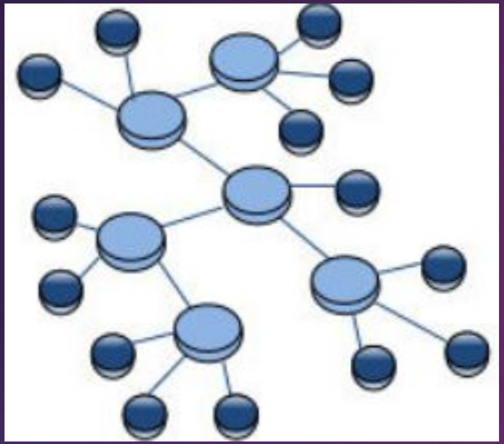
Se spune că f : A →Y este ***continuă*** pe A dacă f este continuă în orice punct a∈A.

Dacă X şi Y sunt două spaţii topologice şi f:X→Y este o funcție, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:



1. f continuă pe X
2. Pentru orice mulţime deschisă $G \subset Y$, $f^{-1}(G)$ este deschisă în X
3. Pentru orice mulţime închisă $F \subset Y$, $f^{-1}(F)$ este închisă în X
4. Pentru orice $A \subset X$ avem $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$
5. Pentru orice $B \subset Y$ avem $\overline{f^{-1}B} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Dacă X şi Y sunt două spaţii topologice şi f:X→Y este o funcţie bijectivă, atunci f se numeşte homeomorfism dacă f şi f^{-1} sunt continue.



Topologie

Fie X o mulţime. O familie τ de submulţimi ale lui X se numeşte topologie pe X dacă şi numai dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

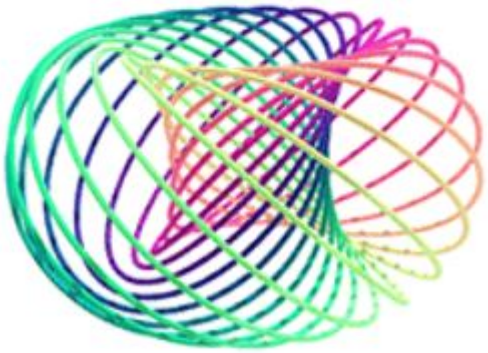
1. X şi ∅ sunt elemente ale lui τ
2. Dacă I este o familie oarecare de indici şi dacă $G_i \in \tau$ pentru orice $i \in I$, atunci $\bigcup_{i\in I} G_i \in \tau$
3. Dacă I este o familie finită de indici şi dacă $G_i \in \tau$ pentru orice $i \in I$, atunci $\bigcap_{i\in I} G_i \in \tau$

Mulțimi deschise/închise

Mulţimea X înzestrată cu o topologie τ se numeşte ***spaţiu topologic*** şi se notează (X,τ). Dacă nu există posibilitatea unei confuzii, nu se mai precizează topologia τ. Elementele unui spaţiu topologic se numesc ***puncte***, iar elementele topologiei se numesc ***mulţimi deschise*** (cu alte cuvinte, $G \subset X$ se numeşte mulţime deschisă dacă şi numai dacă $G \in \tau$). O submulţime F a spaţiului topologic X se numeşte ***închisă*** dacă este complementara (în raport cu X) unei mulţimi deschise.

Tipuri de topologii

O submulţime F a spaţiului topologic X se numeşte ***închisă*** dacă este complementara (în raport cu X) unei mulţimi deschise. Topologia în care familia mulţimilor deschise este $\{\emptyset, X\}$ se numeşte ***topologia indiscretă sau trivială*** pe X. Topologia $\tau_d = 2^X$ se numeşte ***topologia discretă*** pe X. Familia reuniunilor de intervale deschise ale lui **R** împreună cu $\emptyset$ dă o topologie pe R numită ***topologia uzuală*** (sau ***topologia naturală***) pe **R** .



Vecinătăți

O submulţime V a spaţiului topologic X se numeşte ***vecinătate*** a punctului $x \in X$ dacă există o mulţime deschisă G astfel încât $x \in G \subset V$. Mai general, V este o vecinătate a mulţimii $A \subset X$ dacă există o mulţime deschisă G astfel încât $A \subset G \subset V$. Se poate arăta uşor că o submulţime $A \subset X$ este deschisă dacă şi numai dacă este vecinătate pentru orice punct al său. O mulţime U(x) de vecinătăţi ale unui punct $x \in X$ se numeşte ***sistem fundamental de vecinătăţi*** pentru punctul x dacă pentru orice V vecinătate a lui x există $U \in U(x)$ astfel încât $U \subset V$.

Dacă notăm cu V(x) mulţimea tuturor vecinătăţilor lui x atunci sunt adevărate următoarele proprietăţi:

- V1. Dacă $V \in V(x)$ atunci $x \in V$.
- V2. Dacă $V \in V(x)$ şi $V \subset U$, atunci $U \in V(x)$.
- V3. Dacă $V, U \in V(x)$, atunci $V \cap U \in V(x)$.
- V4. Dacă $V \in V(x)$, atunci există $U \in V(x)$ astfel încât V este vecinătate pentru fiecare punct $y \in U$.

Puncte

Interioare

Se numeşte ***interiorul mulţimii*** A, şi se notează cu ***int(A)*** (sau $\dot{A}$), reuniunea tuturor mulţimilor deschise incluse în A. Int(A) poate fi definit în mod echivalent ca fiind cea mai mare mulţime deschisă (relativ la relaţia de incluziune) conţinută în A. Punctele mulţimii int(A) se numesc ***puncte interioare*** ale lui A. În consecinţă, $x \in int(A)$ dacă şi numai dacă există o mulţime deschisă G astfel încât $x \in G \subset A$. Mulţimea A este deschisă dacă şi numai dacă $A = int(A)$

Aderente

Se numeşte ***închiderea mulţimii*** A, şi se notează cu $\overline{A}$, intersecţia tuturor mulţimilor închise ce conţin pe A. $\overline{A}$ poate fi definită în mod echivalent ca fiind cea mai mică mulţime închisă (relativ la relaţia de incluziune) care conţine pe A. Punctele mulţimii $\overline{A}$ se numesc ***puncte aderente*** ale lui A. Se observă imediat că $x \in \overline{A}$ dacă şi numai dacă pentru orice vecinătate V a lui x, $V \cap A \neq \emptyset$. Mulţimea A este închisă dacă şi numai dacă $A = \overline{A}$. Mulţimea A se numeşte

Exterior

Se numeşte ***exteriorul mulţimii*** A, şi se notează cu ***exterior(A)***, mulţimea int(X-A). Un punct $x \in exterior(A)$ se numeşte ***punct exterior*** lui A. Rezultă imediat că $x \in exterior(A)$ dacă şi numai dacă există o vecinătate V a lui x astfel încât $V \cap A = \emptyset$.

Frontieră

Se numeşte ***frontiera mulţimii*** A, şi se notează cu ***Fr(A)*** sau ***∂(A)***, mulţimea $\overline{A} \cap \overline{X - A}$. Elementele mulţimii Fr(A) se numesc ***puncte frontieră*** ale lui A (puncte care nu aparţin nici interiorului nici exteriorului mulţimii A). Vom nota cu ***frn(A)***= Fr(A) – A $= \overline{A}$ -A (mulţimea punctelor frontieră ale lui A care nu aparţin lui A).

Homeomorfism

Spunem că o aplicație $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ este homeomorfism (sau izomorfism topologic) dacă este bijectivă și bicontinuă (adică, f și f^{-1} sunt continue).

Definiție.

(i) Două spații topologice se numesc homeomorfe dacă există un homeomorfism între ele;

(ii) O proprietate se numește topologică dacă se conservă prin homeomorfisme.

Teoremă.

O aplicație bijectivă $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ este homeomorfism dacă și numai dacă $\forall A \subseteq X$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Mulțumesc pentru atenție!