Элементы теории фредгольмовых отображений

https://vk.com/fredholm

5. Линейные операторы

Основные понятия. Пусть E и F – ЛНП, одновременно вещественные или комплексные. Оператор $y = A(x)$, определенный на пространстве E и принимающий значения в пространстве F, называется *линейным*, если этот оператор:

аддитивен, т. е. для всех x_1 и x_2 из E

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2); \tag{1}$$

однороден, т. е. для всех $x \in E$ и любых вещественных (если E вещественно) или комплексных (если E комплексно) чисел λ

$$A(\lambda x) = \lambda A(x). \tag{2}$$

Вместо $A(x)$ будем писать также Ax.

Примеры

(1) $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; A задан матрицей

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad Ax = \mathcal{A}x = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk} x_k \end{pmatrix},$$

$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Оператор A является линейным в силу соответствующих свойств операции умножения матрицы на столбец.

(2) $A: C^1[a, b] \to C[a, b]$; $Ax = \dot{x}$ (оператор A переводит всякую функцию $x \in C^1[a, b]$ в её производную $\dot{x}(t)$);

$A \overset{\text{обозн.}}{=} \dfrac{d}{dt}$. Нетрудно проверить выполнение свойств аддитивности и однородности оператора $\dfrac{d}{dt}$.

Оператор A называется *ограниченным*, если существует такая постоянная M, что $\|Ax\| \leqslant M\|x\|$ для любого $x \in E$.

Согласно этому определению, ограниченный оператор преобразует ограниченное множество элементов $\{x\} \subset E$ в ограниченное же множество элементов $\{Ax\} \subset F$.

Теорема. *Для того чтобы аддитивный и однородный оператор A был непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы он был ограничен.*

Пример. $A = \dfrac{d}{dt} : C^1[a,b] \to C[a,b]$ — оператор дифференцирования.

$$\|Ax\|_F = \|\dot{x}\|_F = \max_{a \le t \le b} |\dot{x}(t)| \le \max_{a \le t \le b} |x(t)| + \max_{a \le t \le b} |\dot{x}(t)| = \|x\|_E,$$

след-но, A — огранич. оператор (здесь $C = 1$).

Норма оператора. Пусть A — линейный ограниченный оператор. Наименьшая из постоянных M, удовлетворяющих условию $\|Ax\| \leqslant M\|x\|$ при всех $x \in E$ (а такие постоянные существуют в силу ограниченности A), называется *нормой оператора* A и обозначается $\|A\|$. Таким образом, по определению, число $\|A\|$ обладает следующими двумя свойствами:

для любого $x \in E$ справедливо неравенство

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|,$$

для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент x_ε, что

$$\|Ax_\varepsilon\| > (\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|.$$

Для нормы оператора A верны следующие равенства :

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|,$$

или

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Пример 4

<u>Норма оператора интегрирования.</u>

$$A : C[0,1] \longrightarrow C[0,1];$$

$$A : x(t) \longmapsto y(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau.$$

Найдём $\|A\|$.

$$\|Ax\| = \max_{0\le t\le 1} \left| \int_0^t x(\tau)\,d\tau \right| \le \max_{0\le t\le 1} \int_0^t \underbrace{|x(\tau)|}_{\le \|x\|}\,d\tau \le \|x\| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underline{\|A\| \le 1} \quad (1)$$

Рассм-м функцию $\bar{x}(t) \equiv 1$; $\|A\bar{x}\| = \max_{0\le t\le 1} |t| = 1$;

$\|\bar{x}\| = 1$.

След-но, $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \ge \|A\bar{x}\| = 1 \Longrightarrow \underline{\|A\| \ge 1 \ (2)}$

$(1), (2) \Longrightarrow \underline{\|A\| = 1}.$

Пространство линейных ограниченных операторов

Пусть E, F – линейные нормированные пространства, причем оба вещественные или оба комплексные. Через $L(E,F)$ обозначим множество всех линейных ограниченных операторов $A : E \to F$. В случае $F = E$ вместо $L(E,E)$ пишут $L(E)$.

Определим на множестве $L(E,F)$ операции умножения на число и сложение. Считаем для числа λ и $A, B \in L(E,F)$ операторы λA и $A + B$ такие, что для $x \in E$

$$(\lambda A)x = \lambda(Ax), \quad (A+B)x = Ax + Bx\,.$$

Нетрудно видеть, что так определенные операторы λA и $A+B$ принадлежат $L(E,F)$. В качестве нуля $\Theta \in L(E,F)$ определим оператор Θ такой, что $\Theta x = \Theta \in F$ для всех $x \in E$. Легко проверить выполнение в $L(E,F)$ всех аксиом линейного пространства.

В полученном линейном пространстве $L(E, F)$ определим *норму*. Для $A \in L(E, F)$ положим

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq \Theta}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}\,.$$

6. Вполне непрерывные операторы

Пусть E, F – линейные нормированные пространства, и задан оператор $A \in L(E, F)$. Оператор A называется *вполне непрерывным*, если всякое ограниченное множество $M \subset E$ он переводит в относительно компактное множество $A[M] \subset F$.

Заметим, что не всякий оператор из $L(E, F)$ является вполне непрерывным. Пусть, например, $\dim E = \infty$. Рассмотрим тождественный оператор $I \in L(E)$. Как известно, замкнутый шар с центром в нуле радиуса единица $B[\Theta, 1] = M$ в бесконечномерном пространстве не является относительно компактным множеством. Тогда образ $I[M] = M$ не будет относительно компактным множеством. Значит, оператор $I \in L(E)$ не является вполне непрерывным.

Множество всех вполне непрерывных операторов из $L(E, F)$ будем обозначать $\sigma(E, F)$.

Теорема 6.1. *Пусть* E, F *– линейные нормированные пространства. Множество вполне непрерывных операторов* $\sigma(E, F)$ *является линейным многообразием в пространстве* $L(E, F)$. *Если пространство* F *банахово, то множество* $\sigma(E, F)$ *замкнуто, то есть является подпространством* $L(E, F)$.

Теорема 6.2. *Пусть* E, F *– линейные нормированные пространства, и хотя бы одно из этих пространств конечномерно. Тогда множество вполне непрерывных операторов* $\sigma(E, F) = L(E, F)$.

Пример вполне непрерывного оператора

Оператор Фредгольма

Рассмотрим оператор

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds\,, \tag{1}$$

где функция $K(t,s)$ непрерывна по совокупности переменных $a \le t, s \le b$.

Нетрудно установить, что оператор $A \in L(C[a,b])$. Покажем, что этот оператор является вполне непрерывным в $C[a,b]$, то есть $A \in \sigma(C[a,b])$.

Пусть $M \subset C[a,b]$ – ограниченное множество, то есть

$$(\exists P > 0)(\forall\, x \in M)[\, \|x\|_C = \max_{a\le t\le b} |x(t)| \le P\,]\,.$$

Покажем, что множество непрерывных функций $A[M]$ в $C[a,b]$ является относительно компактным, то есть согласно теореме Арцела ограниченным и равностепенно непрерывным.

Если функция $y \in A[M]$, то $y = Ax$, где $x \in M$. Тогда

$$\|y\|_C = \|Ax\|_C \le \|A\| \, \|x\|_C \le \|A\| \, P \,,$$

то есть множество $A[M]$ ограничено в $C[a,b]$.

Далее, для функции $y(t) = Ax(t)$, где $x \in M$, и $t_1, t_2 \in [a,b]$ получим

$$|y(t_1) - y(t_2)| = \left| \int_a^b [K(t_1,s) - K(t_2,s)] x(s) \, ds \right| \le$$

$$\le \int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)| \, |x(s)| \, ds \le P \int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)| \, ds \,. \qquad (2)$$

Непрерывная в квадрате $a \le t, s \le b$ функция $K(t,s)$ равномерно непрерывна. Тогда

$$(\forall \, \varepsilon > 0)(\exists \, \delta > 0)(\forall \, t_1, t_2, s \in [a,b])$$

$$\left[(|t_1 - t_2| < \delta) \to \left(|K(t_1,s) - K(t_2,s)| < \frac{\varepsilon}{P(b-a)} \right) \right] . \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что множество функций $A[M]$ равностепенно непрерывно.

Таким образом, множество $A[M] \subset C[a,b]$ относительно компактно, а оператор $A \in \sigma(C[a,b])$.

Литература

1. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа

2. Смагин В.В. Линейные операторы и функционалы. Учебное пособие

https://vk.com/fredholm