

Элементы теории фредгольмовых отображений

<https://vk.com/fredholm>

5. Линейные операторы

Основные понятия. Пусть E и F – ЛНП, одновременно вещественные или комплексные. Оператор $y = A(x)$, определенный на пространстве E и принимающий значения в пространстве F , называется *линейным*, если этот оператор:

аддитивен, т. е. для всех x_1 и x_2 из E

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2); \quad (1)$$

однороден, т. е. для всех $x \in E$ и любых вещественных (если E вещественно) или комплексных (если E комплексно) чисел λ

$$A(\lambda x) = \lambda A(x). \quad (2)$$

Вместо $A(x)$ будем писать также Ax .

Примеры

① $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$; A задана матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad Ax = \mathcal{A}x = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk} x_k \end{pmatrix},$$

$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Оператор A является линейным в силу соответствующих свойств операции умножения матрицы на столбец.

② $A: C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$; $Ax = \dot{x}$ (оператор A переводит величину функцию $x \in C^1[a, b]$ в её производную $\dot{x}(t)$);

$A \stackrel{\text{обозн.}}{=} \frac{d}{dt}$. Нетрудно проверить выполнение свойств аддитивности и однородности оператора $\frac{d}{dt}$.

Оператор A называется *ограниченным*, если существует такая постоянная M , что $\|Ax\| \leq M\|x\|$ для любого $x \in E$.

Согласно этому определению, ограниченный оператор преобразует ограниченное множество элементов $\{x\} \subset E$ в ограниченное же множество элементов $\{Ax\} \subset F$.

Теорема. Для того чтобы аддитивный и однородный оператор A был непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы он был ограничен.

Пример. $A = \frac{d}{dt} : C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$ — оператор дифференцирования.

$$\|Ax\|_F = \|\dot{x}\|_F = \max_{a \leq t \leq b} |\dot{x}(t)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |\dot{x}(t)| = \|x\|_E,$$

след-но, A — огранич. оператор (здесь $C=1$).

Норма оператора. Пусть A — линейный ограниченный оператор. Наименьшая из постоянных M , удовлетворяющих условию $\|Ax\| \leq M\|x\|$ при всех $x \in E$ (а такие постоянные существуют в силу ограниченности A), называется *нормой оператора A* и обозначается $\|A\|$. Таким образом, по определению, число $\|A\|$ обладает следующими двумя свойствами:

для любого $x \in E$ справедливо неравенство

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|,$$

для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент x_ε , что

$$\|Ax_\varepsilon\| > (\|A\| - \varepsilon) \|x_\varepsilon\|.$$

Для нормы оператора A верны следующие равенства :

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|,$$

ИЛИ

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Пример 4

Норма оператора интегрирования.

$$A: C[0,1] \rightarrow C[0,1];$$

$$A: x(t) \mapsto y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau.$$

Найдем $\|A\|$.

$$\|Ax\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t x(\tau) d\tau \right| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^t \underbrace{|x(\tau)|}_{\|x\|} d\tau \leq \|x\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\|A\| \leq 1} \quad (1)$$

Рассмотрим функцию $\bar{x}(t) \equiv 1$; $\|A\bar{x}\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |t| = 1$;

$$\|\bar{x}\| = 1.$$

След-но, $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|A\bar{x}\| = 1 \Rightarrow \underline{\|A\| \geq 1} \quad (2)$

$$(1), (2) \Rightarrow \underline{\|A\| = 1}.$$

Пространство линейных ограниченных операторов

Пусть E, F – линейные нормированные пространства, причем оба вещественные или оба комплексные. Через $L(E, F)$ обозначим множество всех линейных ограниченных операторов $A : E \rightarrow F$. В случае $F = E$ вместо $L(E, E)$ пишут $L(E)$.

Определим на множестве $L(E, F)$ операции умножения на число и сложение. Считаем для числа λ и $A, B \in L(E, F)$ операторы λA и $A + B$ такие, что для $x \in E$

$$(\lambda A)x = \lambda(Ax), \quad (A + B)x = Ax + Bx.$$

Нетрудно видеть, что так определенные операторы λA и $A + B$ принадлежат $L(E, F)$. В качестве нуля $\Theta \in L(E, F)$ определим оператор Θ такой, что $\Theta x = \Theta \in F$ для всех $x \in E$. Легко проверить выполнение в $L(E, F)$ всех аксиом линейного пространства.

В полученном линейном пространстве $L(E, F)$ определим *норму*. Для $A \in L(E, F)$ положим

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq \Theta}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}.$$

6. Вполне непрерывные операторы

Пусть E, F – линейные нормированные пространства, и задан оператор $A \in L(E, F)$. Оператор A называется *вполне непрерывным*, если всякое ограниченное множество $M \subset E$ он переводит в относительно компактное множество $A[M] \subset F$.

Заметим, что не всякий оператор из $L(E, F)$ является вполне непрерывным. Пусть, например, $\dim E = \infty$. Рассмотрим тождественный оператор $I \in L(E)$. Как известно, замкнутый шар с центром в нуле радиуса единица $B[0, 1] = M$ в бесконечномерном пространстве не является относительно компактным множеством. Тогда образ $I[M] = M$ не будет относительно компактным множеством. Значит, оператор $I \in L(E)$ не является вполне непрерывным.

Множество всех вполне непрерывных операторов из $L(E, F)$ будем обозначать $\sigma(E, F)$.

Теорема 6.1. Пусть E, F – линейные нормированные пространства. Множество вполне непрерывных операторов $\sigma(E, F)$ является линейным многообразием в пространстве $L(E, F)$. Если пространство F банахово, то множество $\sigma(E, F)$ замкнуто, то есть является подпространством $L(E, F)$.

Теорема 6.2. Пусть E, F – линейные нормированные пространства, и хотя бы одно из этих пространств конечномерно. Тогда множество вполне непрерывных операторов $\sigma(E, F) = L(E, F)$.

Пример вполне непрерывного оператора

Оператор Фредгольма

Рассмотрим оператор

$$Ax(t) = \int_a^b K(t, s)x(s) ds, \quad (1)$$

где функция $K(t, s)$ непрерывна по совокупности переменных $a \leq t, s \leq b$.

Нетрудно установить, что оператор $A \in L(C[a, b])$. Покажем, что этот оператор является вполне непрерывным в $C[a, b]$, то есть $A \in \sigma(C[a, b])$.

Пусть $M \subset C[a, b]$ – ограниченное множество, то есть

$$(\exists P > 0)(\forall x \in M)[\|x\|_C = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| \leq P].$$

Покажем, что множество непрерывных функций $A[M]$ в $C[a, b]$ является относительно компактным, то есть согласно теореме Арцела ограниченным и равномерно непрерывным.

Если функция $y \in A[M]$, то $y = Ax$, где $x \in M$. Тогда

$$\|y\|_C = \|Ax\|_C \leq \|A\| \|x\|_C \leq \|A\| P,$$

то есть множество $A[M]$ ограничено в $C[a, b]$.

Далее, для функции $y(t) = Ax(t)$, где $x \in M$, и $t_1, t_2 \in [a, b]$ получим

$$\begin{aligned} |y(t_1) - y(t_2)| &= \left| \int_a^b [K(t_1, s) - K(t_2, s)]x(s) ds \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)| |x(s)| ds \leq P \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)| ds. \end{aligned} \quad (2)$$

Непрерывная в квадрате $a \leq t, s \leq b$ функция $K(t, s)$ равномерно непрерывна. Тогда

$$\begin{aligned} &(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t_1, t_2, s \in [a, b]) \\ &\left[(|t_1 - t_2| < \delta) \rightarrow \left(|K(t_1, s) - K(t_2, s)| < \frac{\varepsilon}{P(b-a)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что множество функций $A[M]$ равностепенно непрерывно.

Таким образом, множество $A[M] \subset C[a, b]$ относительно компактно, а оператор $A \in \sigma(C[a, b])$.

Литература

1. Люстерник Л.А., Соболев В.И.
Краткий курс функционального
анализа
2. Смагин В.В. Линейные операторы
и функционалы. Учебное пособие

<https://vk.com/fredholm>