Кафедра вищої математики ім. проф. Можара В.І.

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

План

1. Різні рівняння площини
2. Кут між двома площинами
3. Відстань від точки до площини
4. Різні рівняння прямої лінії в просторі
5. Кут між двома прямими в просторі
6. Кут між прямою і площиною
7. Приклади розв’язання типових завдань
8. Запитання для самоконтролю

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

1. Різні рівняння площини

Загальне рівняння площини

Нехай *площина* проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{A, B, C\}$.

Цими умовами визначається єдина площина в просторі *Oxyz*.

Візьмемо в площині довільну точку $M(x, y, z)$.

Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0\}$ буде *перпендикулярним* вектору $\vec{N} = \{A; B; C\}$.

Значить, скалярний добуток цих векторів дорівнює нулеві, тобто $\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

1. Різні рівняння площини

Загальне рівняння площини

Одержане рівняння запишемо в *координатній* формі:

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$

– рівняння площини, перпендикулярної заданому вектору нормалі $\vec{N}=\{A;B;C\}$ і проходить через задану точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

Рівняння площини, записане у вигляді

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0,} \qquad \text{де} \quad D=-Ax_0-By_0-Cz_0,$$

називається *загальним рівнянням площини.*

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

1. Різні рівняння площини

Частинні випадки загального рівняння площини

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0:}$$

1. Якщо $D = 0$, то загальне рівняння набуває вигляду $Ax + By + Cz = 0$. Цьому рівнянню задовольняє точка $\dot{O}(0,\ 0,\ 0)$. Тобто, рівняння визначає площину, яка проходить через початок координат.

2. Якщо $C = 0$, то маємо рівняння $Ax + By + D = 0$. Цьому рівнянню відповідає вектор $\vec{N} = (A,\ B,\ 0)$, який перпендикулярний до вісі Oz. Тобто, площина паралельна вісі Oz; якщо $B = 0$ – паралельна вісі Oy; якщо $A = 0$ – паралельна вісі Ox.

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

1. Різні рівняння площини

Частинні випадки загального рівняння площини

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0:}$$

3. Якщо дорівнюють нулеві коефіцієнти при двох із координатних змінних, то площина паралельна відповідній координатній площині.

4. Якщо дорівнює нулеві коефіцієнт при одній із координатних змінних і D=0, то площина проходить через відповідну координатну вісь.

5. Якщо дорівнюють нулеві коефіцієнти при двох координатних змінних і D=0, то площина співпадає з відповідною координатною площиною. Так, наприклад, площина задана рівнянням $5z$=0. Маємо рівняння координатної площини Oxy.

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

1. Різні рівняння площини

Рівняння площини, яка проходить через три задані точки

Нехай задано три точки

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій.

Візьмемо на площині довільну точку $M(x, y, z)$, яка лежить в одній площині точками M_1, M_2, M_3, і утворимо вектори

$$\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}, \quad \overline{M_2M} = \{x - x_2, y - y_2, z - z_2\},$$

$$\boxed{\overline{M_3M} = \{x - x_3, y - y_3, z - z_3\}.}$$

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

1. Різні рівняння площини

Рівняння площини, яка проходить через три задані точки

Ці три вектори лежать в одній площині, значить вони *компланарні і їх мішаний добуток дорівнює нулю*, тобто

$$\overrightarrow{M_1M}\ \overrightarrow{M_2M}\ \overrightarrow{M_3M}=0 \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix}=0$$

– рівняння площини яка проходить через три задані точки.

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

1. Різні рівняння площини

Рівняння площини у відрізках на осях

Нехай площина відтинає на осях координат *Ox*, *Oy*, *Oz* відповідно відрізки *a*, *в*, *c*, тобто проходить через точки

$$A(a,\ 0,\ 0), B(0,\ b,\ 0),\ C(0, 0,\ \ ).$$

Підставимо координати цих точок в рівняння площини, яка проходить через три задані точки , отримаємо

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.}$$

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

1. Різні рівняння площини

Рівняння площини у відрізках на осях

Розкривши визначник, отримаємо

$$bcx - abc + abz + acy = 0,$$

$$bcx + abz + acy = abc$$

або $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

– рівняння площини у відрізках на осях.

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

2. Кут між двома площинами

Нехай $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ – рівняння площини α_1;

$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ – рівняння площини α_2.

Нормальним вектором площини α_1 буде вектор $\vec{N} = \{A_1, B_1, C_1\}$,

а α_2 – вектор $\vec{N} = \{A_2, B_2, C_2\}$.

Косинус кута між цими векторами, а значить і між площинами, обчислюється за відомою формулою (скалярний добуток):

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

2. Кут між двома площинами

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.}$$

Умова *перпендикулярності* двох площин співпадає з умовою перпендикулярності векторів $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$, і має вигляд:

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.}$$

Умова *паралельності* двох площин співпадає з умовою колініарності векторів ($\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$):

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.}$$

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

3. Відстань від точки до площини

Аналогічно з формулою знаходження відстані від точки до прямої на площині можна записати формулу знаходження відстані від точки $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$

до площини $Ax + By + Cz + D = 0.$

Вона має вигляд:

$$\boxed{d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.}$$

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

4. Різні рівняння прямої лінії в просторі

Канонічне рівняння прямої в просторі

Пряму L в просторі можна визначити точкою $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, яка належить цій прямій, і направляючим вектором $\vec{q}=\{l,\ m,\ n\}$ цієї прямої ($\vec{q}\ ||\ L$).

Побудуємо вектор

$$\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}, \qquad M(x;\ y;\ z)\in L\ .$$

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

4. Різні рівняння прямої лінії в просторі

Канонічне рівняння прямої в просторі

Вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\vec{q}$ - *колінеарні,* а тому їх відповідні координати пропорційні:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}.}$$

Рівняння називають *канонічним* рівнянням прямої в просторі.

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

4. Різні рівняння прямої лінії в просторі

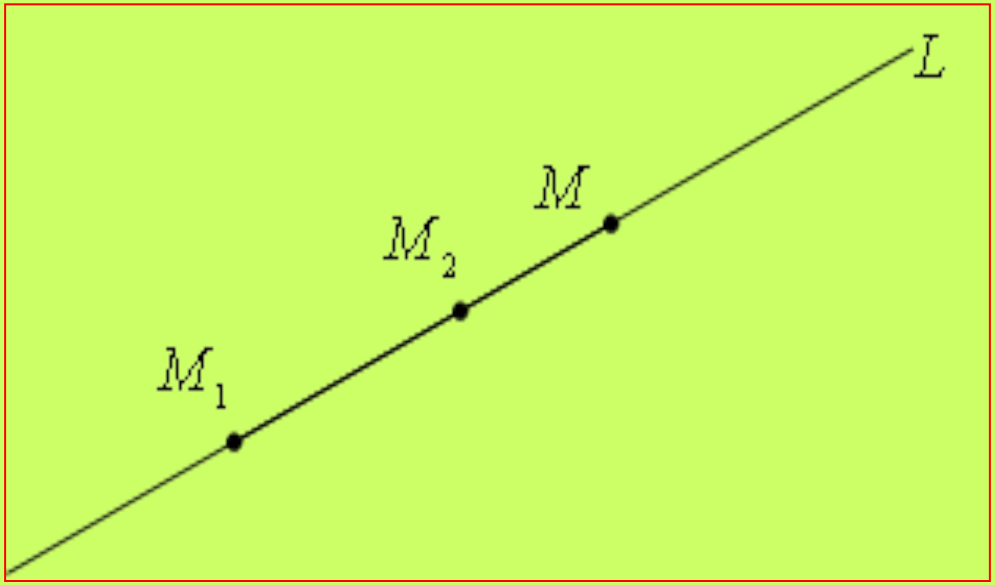
Рівняння прямої, яка проходить через дві точки

Нехай пряма L в просторі проходить через задані точки

$M_1(x_1; y_1; z_1)$

і $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

Точка $M(x; y; z)$ – довільна точка прямої.



ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

4. Різні рівняння прямої лінії в просторі

Рівняння прямої, яка проходить через дві точки

Побудуємо вектори $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$,

$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, $\quad M(x; y; z) \in L$.

Вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$ *– колінеарні,* а тому їх відповідні координати пропорційні:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$

– рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки.

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

4. Різні рівняння прямої лінії в просторі

Параметричне рівняння прямої

Позначимо значення відношень параметром $t \in R$:

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=t, \quad \begin{cases} \dfrac{x-x_1}{l}=t, \\ \dfrac{y-y_1}{m}=t, \\ \dfrac{z-z_1}{n}=t, \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} x=x_1+lt, \\ y=y_1+mt, \\ z=z_1+nt. \end{cases}}$$

Останню систему називають *параметричним рівнянням прямої.*

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

4. Різні рівняння прямої лінії в просторі

Рівняння прямої, як лінія перетину двох площин

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (\alpha_1), \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (\alpha_2). \end{cases} \qquad (1)$$

Кожне з цих рівнянь визначає площину, а лінією їх перетину є пряма L.

Рівняння (1) називають *загальними* рівняннями прямої.

Від рівнянь (1) можна перейти до *канонічного* рівняння прямої.

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

4. Різні рівняння прямої лінії в просторі

Рівняння прямої, як лінія перетину двох площин

Для цього необхідно знати координати *направляючого* вектора

$\vec{q} = \{l; m; n\}$, координати точки $M_1(x_1; y_1; z_1) \in L.$

Точку M_1 беруть, як *перетин* даної прямої із однією із координатних площин:

якщо з площиною Oxy, то в системі (1) покладають $z = 0;$

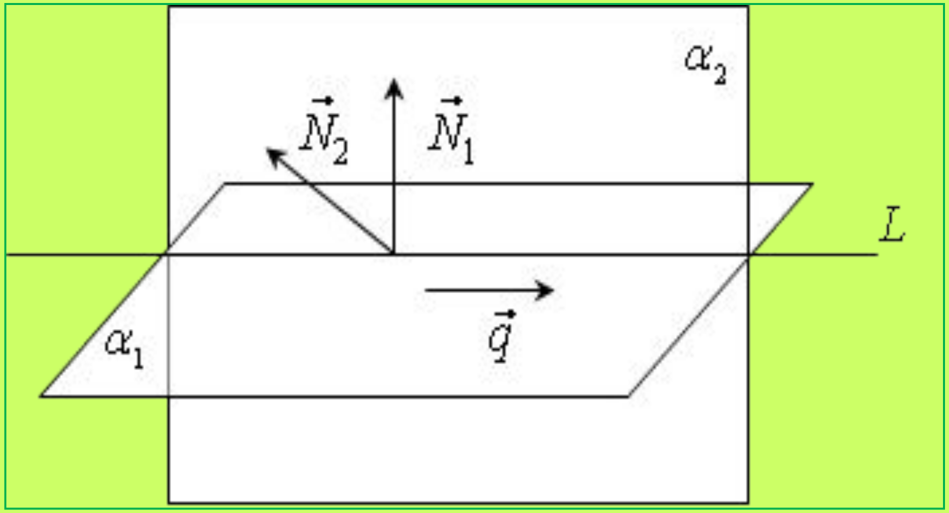
якщо з площиною Oxz, то $y = 0;$

якщо з площиною Oyz, то $x = 0.$

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

4. Різні рівняння прямої лінії в просторі

Рівняння прямої, як лінія перетину двох площин



$$\vec{q} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

де $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ і $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ *нормальні* вектори площин α_1 і α_2.

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

5. Кут між двома прямими в просторі

Нехай прямі L_1 і L_2 задані *канонічними* рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}, \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Під кутом φ між цими прямими розуміють кут між направляючими векторами $\vec{q}_1=\{l_1,m_1,n_1\}$ і $\vec{q}_2=\{l_2,m_2,n_2\}$ цих прямих.

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.}$$

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

5. Кут між двома прямими в просторі

Якщо $L_1 \perp L_2$, то $\cos\varphi = 0 \quad \Longrightarrow \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0;$

якщо $L_1 \,||\, L_2$, то координати цих векторів *пропорційні:*

паралельні і їхні направляючі вектори, тобто

$$\boxed{\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.}$$

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

6. Кут між прямою і площиною

Нехай пряму задано *канонічним* рівнянням

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n},$$

площину – рівнянням *загального* виду $Ax+By+Cz+D=0.$

Кутом φ *між прямою і площиною* називається любий із двох суміжних кутів, які утворені прямою і її проекцією на цю площину, який обчислюється за формулою

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.}$$

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

7. Приклади розв'язання типових завдань

Приклад. Знайти рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(1;\, 2;\, -1),\ M_2(-1;\, 0;\, 4),\ M_3(-2;\, -1;\, 1).$

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 11(x-1) - 11(y-2) + 0(z+1) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{x - y + 1 = 0.}$$

Це рівняння визначає площину, яка паралельна вісі Oz.

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

7. Приклади розв'язання типових завдань

Приклад. Обчислити косинус кута між двома площинами

$$3x - y + 2z - 4 = 0,$$

$$x - 4y - z + 5 = 0.$$

Розв'язання.

По формулі $$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

якщо врахувати, що $A_1 = 3;\ B_1 = -1;\ C_1 = 2,\ A_2 = 1;\ B_2 = -4;\ C_2 = -1,$

одержимо:

$$\cos\varphi = \frac{3 + 4 - 2}{\sqrt{14}\sqrt{18}} = \frac{5}{6\sqrt{7}}.$$

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

7. Приклади розв’язання типових завдань

Приклад. Обчислити відстань від точки $A(2;\ 3;\ -1)$ до площини $7x-6y-6z+42=0$.

Розв’язання.

Відстань від точки до площини обчислюємо за формулою

$$\boxed{d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.}$$

в якій $A=7;\ B=-6;\ C=-6;\ D=42,\quad x_0=2,\ y_0=3,\ z_0=-1.$

Підставляючи ці значення у формулу одержимо

$$d=4.$$

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

7. Приклади розв’язання типових завдань

Приклад. Привести рівняння прямої $\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 2x-y-3z+5=0 \end{cases}$ до канонічного вигляду.

Розв’язання.

Направляючий вектор цієї прямої обчислимо за формулою

$$\vec{q}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=-4\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}.$$

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

7. Приклади розв'язання типових завдань

Покладемо z=0 і знайдемо розв'язок системи

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ 2x-y+5=0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, маємо $x=-2,\ y=1.$

Отже, точка M_1 буде мати координати: $M_1(-2;\ 1;\ 0)$

і *канонічне* рівняння прямої запишеться у вигляді:

$$\boxed{\frac{x+2}{-4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-3}.}$$

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

8. Запитання для самоконтролю

1.Записати загальне рівняння площини і дати геометричне пояснення коефіцієнтів при змінних в цьому рівнянні.
2. Записати рівняння площини у відрізках і дати геометричне пояснення коефіцієнтів в цьому рівнянні.
3. Записати рівняння площини, що проходить через три дані точки.
4. Записати нормальне рівняння площини і дати геометричне пояснення коефіцієнтів при змінних і вільному члену в цьому рівнянні.
5. Що називається відстанню від точки до площини і за яким правилом вона обчислюється?

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

8. Запитання для самоконтролю

6. Записати формулу косинуса кута між двома площинами. За допомогою яких міркувань із цієї формули одержуються умови паралельності, перпендикулярності двох площин?
7. Запишіть канонічне рівняння прямої в просторі. Який геометричний зміст мають сталі, що входять в це рівняння?
8. Записати рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки.
9. Записати формулу косинуса кута між двома прямими. За допомогою яких міркувань із цієї формули одержуються умови паралельності, перпендикулярності двох прямих?

ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

8. Запитання для самоконтролю

10. Записати необхідну і достатню умову перетину двох прямих.
11. Дайте визначення кута між прямою і площиною.
12. Рівняння прямої, як лінії перетину двох площин. Перехід від рівняння прямої, як лінії перетину двох площин до канонічного рівняння.