# Кафедра вищої математики ім. проф. Можара В.І.

**ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА**

# ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

**План**

1. Різні рівняння площини
2. Кут між двома площинами
3. Відстань від точки до площини
4. Різні рівняння прямої лінії в просторі
5. Кут між двома прямими в просторі
6. Кут між прямою і площиною
7. Приклади розв’язання типових завдань
8. Запитання для самоконтролю

# ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

## 1. Різні рівняння площини

**Загальне рівняння площини**

Нехай *площина* проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{A, B, C\}$.

Цими умовами визначається єдина площина в просторі $Oxyz$.

Візьмемо в площині довільну точку $M(x, y, z)$.

Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0\}$ буде *перпендикулярним* вектору $\vec{N} = \{A; B; C\}$.

Значить, скалярний добуток цих векторів дорівнює нулеві, тобто $\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$

## ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

### 1. Різні рівняння площини

**Загальне рівняння площини**

Одержане рівняння запишемо в *координатній* формі:

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$

– рівняння площини, перпендикулярної заданому вектору нормалі $\vec{N}=\{A;B;C\}$ і проходить через задану точку $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$.

Рівняння площини, записане у вигляді

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0,} \qquad \text{де} \quad D=-Ax_0-By_0-Cz_0,$$

називається *загальним рівнянням площини.*

# ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

## 1. Різні рівняння площини

**Частинні випадки загального рівняння площини**

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0:}$$

**1.** Якщо $D = 0$, то загальне рівняння набуває вигляду $Ax + By + Cz = 0$. Цьому рівнянню задовольняє точка $\dot{O}(0,\ 0,\ 0)$. Тобто, рівняння визначає площину, яка проходить через початок координат.

**2.** Якщо $C = 0$, то маємо рівняння $Ax + By + D = 0$. Цьому рівнянню відповідає вектор $\vec{N} = (A,\ B,\ 0)$, який перпендикулярний до вісі $Oz$. Тобто, площина паралельна вісі $Oz$; якщо $B = 0$ – паралельна вісі $Oy$; якщо $A = 0$ – паралельна вісі $Ox$.

# ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

## 1. Різні рівняння площини

**Частинні випадки загального рівняння площини**

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0:}$$

**3.** Якщо дорівнюють нулеві коефіцієнти при двох із координатних змінних, то площина паралельна відповідній координатній площині.

**4.** Якщо дорівнює нулеві коефіцієнт при одній із координатних змінних і $D$=0, то площина проходить через відповідну координатну вісь.

**5.** Якщо дорівнюють нулеві коефіцієнти при двох координатних змінних і $D$=0, то площина співпадає з відповідною координатною площиною. Так, наприклад, площина задана рівнянням $5z$=0. Маємо рівняння координатної площини $Oxy$.

# ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

## 1. Різні рівняння площини

**Рівняння площини, яка проходить через три задані точки**

Нехай задано три точки

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій.

Візьмемо на площині довільну точку $M(x, y, z)$, яка лежить в одній площині точками $M_1, M_2, M_3$, і утворимо вектори

$$\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}, \quad \overline{M_2M} = \{x - x_2, y - y_2, z - z_2\},$$

$$\boxed{\overline{M_3M} = \{x - x_3, y - y_3, z - z_3\}.}$$

# ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

## 1. Різні рівняння площини

**Рівняння площини, яка проходить через три задані точки**

Ці три вектори лежать в одній площині, значить вони *компланарні і їх мішаний добуток дорівнює нулю*, тобто

$$\overrightarrow{M_1M}\ \overrightarrow{M_2M}\ \overrightarrow{M_3M} = 0 \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix} = 0$$

*– рівняння площини яка проходить через три задані точки.*

## ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

### 1. Різні рівняння площини

**Рівняння площини у відрізках на осях**

Нехай площина відтинає на осях координат *Ox*, *Oy*, *Oz* відповідно відрізки *a*, *в*, *c*, тобто проходить через точки

$$A(a,\ 0,\ 0), B(0,\ b,\ 0),\ C(0, 0,\ \ ).$$

Підставимо координати цих точок в рівняння площини, яка проходить через три задані точки , отримаємо

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.}$$

# ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

## 1. Різні рівняння площини

**Рівняння площини у відрізках на осях**

Розкривши визначник, отримаємо

$$bcx - abc + abz + acy = 0,$$

$$bcx + abz + acy = abc$$

або $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

*– рівняння площини у відрізках на осях.*

# ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА
## 2. Кут між двома площинами

Нехай $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ – рівняння площини $\alpha_1$;

$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ – рівняння площини $\alpha_2$.

*Нормальним* вектором площини $\alpha_1$ буде вектор $\vec{N} = \{A_1, B_1, C_1\}$,

а $\alpha_2$ – вектор $\vec{N} = \{A_2, B_2, C_2\}$.

*Косинус* кута між цими векторами, а значить і між площинами, обчислюється за відомою формулою (скалярний добуток):

## ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

### 2. Кут між двома площинами

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.}$$

Умова *перпендикулярності* двох площин співпадає з умовою перпендикулярності векторів $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$, і має вигляд:

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.}$$

Умова *паралельності* двох площин співпадає з умовою колініарності векторів ($\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$):

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.}$$

## ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

### 3. Відстань від точки до площини

Аналогічно з формулою знаходження відстані від точки до прямої на площині можна записати формулу знаходження відстані від точки $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$

до площини $Ax + By + Cz + D = 0.$

Вона має вигляд:

$$\boxed{d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.}$$

# ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

## 4. Різні рівняння прямої лінії в просторі

**Канонічне рівняння прямої в просторі**

Пряму $L$ в просторі можна визначити точкою $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, яка належить цій прямій, і направляючим вектором $\vec{q}=\{l,m,n\}$ цієї прямої ($\vec{q} \parallel L$).

Побудуємо вектор

$$\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}, \qquad M(x;\ y;\ z)\in L\ .$$

# ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

## 4. Різні рівняння прямої лінії в просторі

### Канонічне рівняння прямої в просторі

Вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\vec{q}$ - *колінеарні,* а тому їх відповідні координати пропорційні:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}.}$$

Рівняння називають *канонічним* рівнянням прямої в просторі.

# ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

## 4. Різні рівняння прямої лінії в просторі

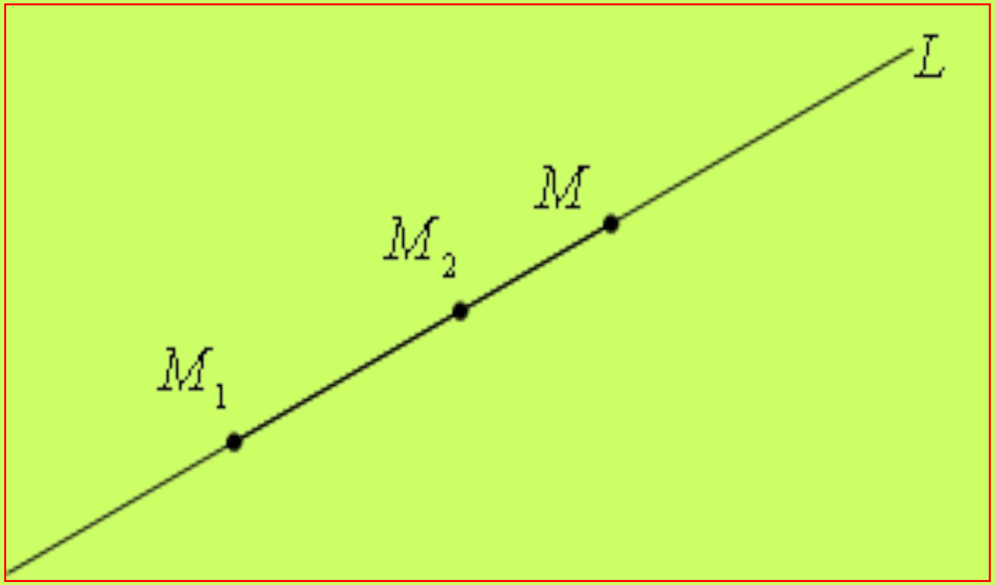
**Рівняння прямої, яка проходить через дві точки**

Нехай пряма $L$ в просторі проходить через задані точки

$M_1\left(x_1; y_1; z_1\right)$

і $M_2\left(x_2; y_2; z_2\right)$.

Точка $M\left(x; y; z\right)$ – довільна точка прямої.



# ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

## 4. Різні рівняння прямої лінії в просторі

**Рівняння прямої, яка проходить через дві точки**

Побудуємо вектори $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$,

$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, $M(x; y; z) \in L$ .

Вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$ – *колінеарні,* а тому їх відповідні координати пропорційні:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$

– *рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки.*

# ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

## 4. Різні рівняння прямої лінії в просторі

**Параметричне рівняння прямої**

Позначимо значення відношень параметром $t \in R$:

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=t, \quad \begin{cases} \dfrac{x-x_1}{l}=t, \\ \dfrac{y-y_1}{m}=t, \\ \dfrac{z-z_1}{n}=t, \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} x=x_1+lt, \\ y=y_1+mt, \\ z=z_1+nt. \end{cases}}$$

Останню систему називають *параметричним рівнянням прямої.*

# ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

## 4. Різні рівняння прямої лінії в просторі

**Рівняння прямої, як лінія перетину двох площин**

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (\alpha_1), \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (\alpha_2). \end{cases} \qquad (1)$$

Кожне з цих рівнянь визначає площину, а лінією їх перетину є пряма $L$.

Рівняння (1) називають *загальними* рівняннями прямої.

Від рівнянь (1) можна перейти до *канонічного* рівняння прямої.

# ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

## 4. Різні рівняння прямої лінії в просторі

**Рівняння прямої, як лінія перетину двох площин**

Для цього необхідно знати координати *направляючого* вектора

$$\vec{q} = \{l;m;n\}$$, координати точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1) \in L.$

Точку $M_1$ беруть, як *перетин* даної прямої із однією із координатних площин:

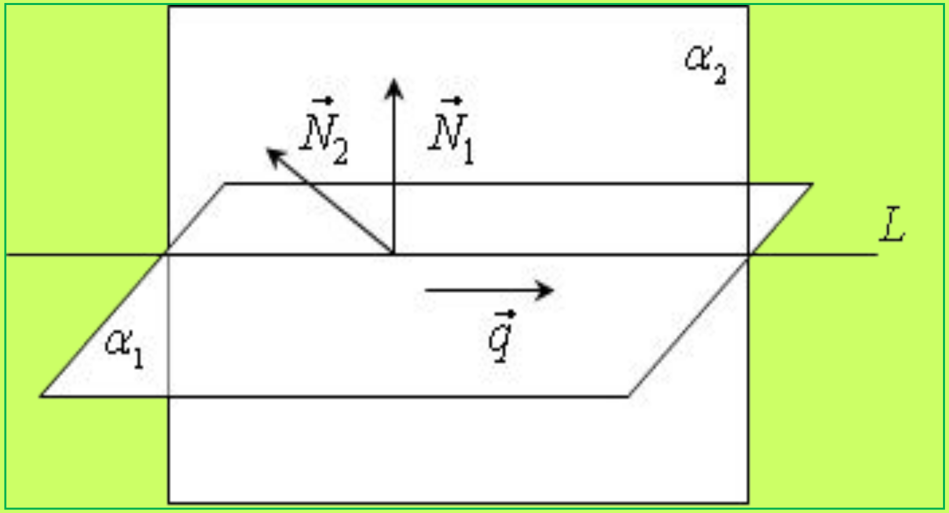
якщо з площиною $Oxy$, то в системі (1) покладають $z = 0;$

якщо з площиною $Oxz$, то $y = 0;$

якщо з площиною $Oyz$, то $x = 0.$

## **ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА**
### 4. Різні рівняння прямої лінії в просторі

**Рівняння прямої, як лінія перетину двох площин**




$$\vec{q} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

де $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ і $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ *нормальні* вектори площин $\alpha_1$ і $\alpha_2$.

# ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

## 5. Кут між двома прямими в просторі

Нехай прямі $L_1$ і $L_2$ задані *канонічними* рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},\quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

*Під кутом* $\varphi$ між цими прямими розуміють кут між направляючими векторами $\vec{q}_1=\{l_1,m_1,n_1\}$ і $\vec{q}_2=\{l_2,m_2,n_2\}$ цих прямих.

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.}$$

# ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

## 5. Кут між двома прямими в просторі

Якщо $L_1 \perp L_2$, то $\cos\varphi = 0 \quad \Longrightarrow \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0;$

якщо $L_1 \,|\,|\, L_2$, то координати цих векторів *пропорційні:*

паралельні і їхні направляючі вектори, тобто

$$\boxed{\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.}$$

## ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

### 6. Кут між прямою і площиною

Нехай пряму задано *канонічним* рівнянням

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n},$$

площину – рівнянням *загального* виду $Ax+By+Cz+D=0.$

*Кутом* $\varphi$ *між прямою і площиною* називається любий із двох суміжних кутів, які утворені прямою і її проекцією на цю площину, який обчислюється за формулою

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.}$$

# ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

## 7. Приклади розв'язання типових завдань

**Приклад.** Знайти рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(1;\,2;\,-1),\ M_2(-1;\,0;\,4),\ M_3(-2;\,-1;\,1).$

***Розв'язання.***

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 11(x-1)-11(y-2)+0(z+1)=0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{x-y+1=0.}$$

*Це рівняння визначає площину, яка паралельна вісі $Oz$.*

## ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА
### 7. Приклади розв’язання типових завдань

**Приклад.** Обчислити косинус кута між двома площинами

$$3x - y + 2z - 4 = 0,$$
$$x - 4y - z + 5 = 0.$$

***Розв’язання.***

По формулі $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$,

якщо врахувати, що $A_1 = 3;\ B_1 = -1;\ C_1 = 2,\ A_2 = 1;\ B_2 = -4;\ C_2 = -1$, одержимо:

$$\cos\varphi = \frac{3 + 4 - 2}{\sqrt{14}\sqrt{18}} = \frac{5}{6\sqrt{7}}.$$

## ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

### 7. Приклади розв’язання типових завдань

**Приклад.** Обчислити відстань від точки $A(2;\ 3;\ -1)$ до площини $7x-6y-6z+42=0$.

***Розв’язання.***

Відстань від точки до площини обчислюємо за формулою

$$\boxed{d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.}$$

в якій $A=7;\ B=-6;\ C=-6;\ D=42,\quad x_0=2,\ y_0=3,\ z_0=-1.$

Підставляючи ці значення у формулу одержимо

$$d=4.$$

## ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА
### 7. Приклади розв'язання типових завдань

**Приклад.** Привести рівняння прямої $\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 2x-y-3z+5=0 \end{cases}$ до канонічного вигляду.

***Розв'язання.***

*Направляючий* вектор цієї прямої обчислимо за формулою

$$\vec{q}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=-4\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}.$$

# ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

## 7. Приклади розв'язання типових завдань

Покладемо $z$=0 і знайдемо розв'язок системи

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ 2x - y + 5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, маємо $x = -2,\ y = 1.$

Отже, точка $M_1$ буде мати координати: $M_1(-2;\ 1;\ 0)$

і *канонічне* рівняння прямої запишеться у вигляді:

$$\boxed{\frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-3}.}$$

# ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

## 8. Запитання для самоконтролю

1.Записати загальне рівняння площини і дати геометричне пояснення коефіцієнтів при змінних в цьому рівнянні.

2. Записати рівняння площини у відрізках і дати геометричне пояснення коефіцієнтів в цьому рівнянні.

3. Записати рівняння площини, що проходить через три дані точки.

4. Записати нормальне рівняння площини і дати геометричне пояснення коефіцієнтів при змінних і вільному члену в цьому рівнянні.

5. Що називається відстанню від точки до площини і за яким правилом вона обчислюється?

# ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

## 8. Запитання для самоконтролю

6. Записати формулу косинуса кута між двома площинами. За допомогою яких міркувань із цієї формули одержуються умови паралельності, перпендикулярності двох площин?
7. Запишіть канонічне рівняння прямої в просторі. Який геометричний зміст мають сталі, що входять в це рівняння?
8. Записати рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки.
9. Записати формулу косинуса кута між двома прямими. За допомогою яких міркувань із цієї формули одержуються умови паралельності, перпендикулярності двох прямих?

## ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПЛОЩИНА

### 8. Запитання для самоконтролю

10. Записати необхідну і достатню умову перетину двох прямих.
11. Дайте визначення кута між прямою і площиною.
12. Рівняння прямої, як лінії перетину двох площин. Перехід від рівняння прямої, як лінії перетину двох площин до канонічного рівняння.