Преобразование буквенных выражений

Пример 1. Упростим выражение $a + b + a - b$.

Данное выражение — сумма, состоящая из четырёх слагаемых: a, b, a и $-b$.

Поменяем местами слагаемые в этой сумме:

$$a + b + a - b = a + a + b + (-b).$$

Сгруппируем первые два и последние два слагаемых:

$$a + a + b + (-b) = (a + a) + (b + (-b)).$$

Ясно, что $a + a = 2a$. Кроме того, $b + (-b) = 0$ — это равенство является одним из законов алгебры. Значит,

$$(a + a) + (b + (-b)) = 2a + 0 = 2a.$$

На последнем шаге мы воспользовались ещё одним законом, согласно которому от прибавления нуля сумма не меняется.

Таким образом,

$$a + b + a - b = 2a.$$

Выполненные преобразования можно записать в виде цепочки:

$$a + b + a - b = a + a + b + (-b) = (a + a) + (b + (-b)) = 2a + 0 = 2a.$$

Мы привели здесь подробную запись, чтобы показать, как работают законы алгебры, а на практике промежуточные шаги часто выполняют устно — слагаемые переставляются и группируются не руками, а глазами. Например, можно было бы ограничиться такой цепочкой:

$$a + b + a - b = 2a + 0 = 2a.$$

3 Правило преобразования произведений следует из переместительного и сочетательного законов умножения.

В любом произведении множители можно как угодно переставлять и произвольным образом объединять в группы.

а) $b - a + b + a$;
б) $x - y - z + y$;
в) $c - 10 + 15 - c$;
г) $x + y + x + x - y$;
д) $x + x - 15 + 15$;
е) $a - 1 + a - 1 + a - 1$;
ж) $a - 3 + b + 3$;
з) $m + m + 1 + m - 20$.

Пример 2. Упростим произведение $5y \cdot (-4x)$.

Сгруппируем отдельно числовые и буквенные множители и запишем вначале произведение числовых множителей, а затем буквенных, расположив их в алфавитном порядке:

$$5y \cdot (-4x) = 5 \cdot (-4) \cdot xy = (-20)xy.$$

Скобки, окружающие отрицательный множитель, записанный на первом месте, обычно опускают. Поэтому

$$5y \cdot (-4x) = -20xy.$$

Если выражение является произведением, в котором первый множитель — число, а остальные множители — буквы, то это число называют *коэффициентом* этого произведения. Так, в выражении $-20xy$ числовой множитель -20 является коэффициентом.

Заметим, что коэффициент, равный 1, обычно не пишут: равенство $1 \cdot a = a$ является законом алгебры. А вместо коэффициента -1 просто ставят знак «−». Например, $(-1) \cdot ab = -ab$.

Упростите произведение и назовите коэффициент:

а) $2x \cdot 3y$;

б) $2a \cdot 0{,}5b$;

в) $10a \cdot \frac{1}{2}b \cdot 3c$;

г) $m \cdot 0{,}1n \cdot 10$;

д) $a \cdot (-3)d \cdot 4$;

е) $-8p \cdot 0{,}125k$;

ж) $-6z \cdot (-2x) \cdot y$;

з) $-a \cdot (-b) \cdot 4c$.

Пример 3. Упростим произведение $(-a)ca(-b)$.

На произведение буквенных множителей распространяется известное правило знаков «минус на минус даёт плюс»: $(-a)(-b) = ab$ — это закон алгебры. Поэтому

$$(-a)ca(-b) = +acab = acab.$$

Переставив множители и заменив произведение одинаковых множителей степенью, получим

$$acab = aabc = a^2bc.$$

Упростите выражение:

а) $-x \cdot (-y) \cdot (-z)$;

б) $-m \cdot (-n) \cdot p$;

в) $-a \cdot (-b) \cdot (-c) \cdot (-d)$;

г) $a \cdot (-b) \cdot (-c) \cdot (-d)$.