Математическая статистика

1-лекция

Постановка статистической задачи

1. Выборка. Статистическая структура (Модель)
2. Эмпирическое распределение. Вариационный ряд.
3. Выборочные моменты и другие характеристики.
4. Графическое изображение статистических данных

1. Выборка. Статистическая структура (Модель)

МС-прикладная дисциплина, родственная с ТВ, опирающаяся на понятия и факты (утверждения) ТВ, решает свои специфические задачи своими методами.

МС делает выводы на основе числовых данных полученных в результате случайных экспериментов.

(Ω, A, P)-вероятностная тройка, где (Ω, A)-измеримое пространство

$$\xi\text{-случайная величина} \Rightarrow \xi\colon (\Omega, A) \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{B})$$

$\mathcal{X}$-пространство (множество) всевозможных значений ξ.

$\mathcal{B} = \sigma(X)$-борелевская сигма-алгебра (сигма алгебра борелевских множеств).

1. Выборка. Статистическая структура (Модель)

$\{P^{\xi}(B) = P(\omega: \xi(\omega) \in B), B \in \mathcal{B}\}$ - вероятностное распределение, порожденное с.в. ξ.

$(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P^{\xi})$ - тройка порожденная с.в. ξ, вероятностное пространство.

Предполагаем, что P^{ξ} образует класс:

$$\{P^{\xi}\} = \mathcal{P}\text{-семейство вероятностных распределений с.в. } \xi.$$

Оказывается, мы должны работать в следующей тройке: $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathcal{P})$-семейство вероятностных пространств (случайный эксперимент).

1. Выборка. Статистическая структура (Модель)

В некотором эксперименте наблюдаем с.в. ξ:

$$\xi = x\text{-реализация с.в. } \xi.$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$-с.в. означающие реализации с.в. ξ в n независимых экспериментах. $x_i \sim P^{\xi}$ (имеют тоже самое распределение P^{ξ})

$X^{(n)} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$-случайный вектор со случайными координатами в n –мерном пространсве.

$\left(\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)}, \mathcal{P}^{(n)}\right)$-случайный эксперимент порожденный выборкой $X^{(n)}$, где $\mathcal{X}^{(n)} = \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \cdots \times \mathcal{X}$, $\mathcal{B}^{(n)} = \sigma\left(\mathcal{X}^{(n)}\right)$,

$\mathcal{P}^{(n)} = \left\{P^{X^{(n)}}\right\}$, $\mathcal{P}^{(n)}$-семейство, порожденное выборкой $X^{(n)}$.

1. Выборка. Статистическая структура (Модель)

$$P^{X^{(n)}}\left(B^{(n)}\right) = P(\omega\colon\ x_1 \in B_1, \dots, x_n \in B_n\ ) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} P(\omega\colon\ x_k \in B_k\ ) = \prod_{k=1}^{n} P^{\xi}(B_k)$$

где $B^{(n)} = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n,\ B_i \in \mathcal{B}\ \Rightarrow\ B^{(n)} \in \mathcal{B}^{(n)}$.

Тройка $\left(\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)}, \mathcal{P}\right)$- называется статистической структурой (модель).

2. Эмпирическое распределение. Вариационный ряд.

$$\mathcal{P} = \{P^{\xi}\} \Rightarrow \left(\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)}, \mathcal{P}\right)$$

P^{ξ}-неизвестное распределение;

$X^{(n)} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\quad P^{\xi}(B) = P(\xi \in B)$;

Соберем ср.ариф. индикаторов тех событий которые попали в $B \Rightarrow$ возможным приближением для $P^{\xi}(B)$ является след:

$$P_n^{\xi}(B) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_{X_k}(B)\,, \qquad (1)$$

где $I_{X_k}(B) = \begin{cases} 1, \text{если } x_k \in B \\ 0, \text{если } x_k \notin B \end{cases}$

2. Эмпирическое распределение. Вариационный ряд.

(1)-эмпирическое –дискретное распределение ξ (выборки):

- $P_n^{\xi}(\emptyset) = \frac{0}{n} = 0$
- $P_n^{\xi}(\overline{B}) = 1 - P_n^{\xi}(B)$
- $P_n^{\xi}(\mathcal{X}) = \frac{n}{n} = 1$, играет роль достовер.события
- $B_1 \subseteq B_2$: $P_n^{\xi}(B_1) \leq P_n^{\xi}(B_2)$

$$\sum I_{X_k}(B_1) \leq \sum I_{X_k}(B_2)$$

Если $B = (-\infty; x]$, $x \in R^1$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad P^{\xi}(B) = P(\xi \in (-\infty; x]) = P(\xi \leq x) = F(x), \qquad x \in R^1$$

2. Эмпирическое распределение. Вариационный ряд.

Тогда $P_n^{\xi}(B) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(x_k \le x) = F_n(x),\ x \in R^1$, где

$F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения.

Насколько $F_n(x)$ близко к $F(x)$?

Свойства эмпирической функции распределения

$$1.\ MF_n(x) = \frac{1}{n} n\ M\ I(x_k \le x) = 1 \cdot F(x) + 0\big(1 - F(x)\big) = F(x) \Rightarrow$$

$$M(F_n(x) - F(x)) = 0, x \in R^1 \qquad (2)$$

2. $$DF_n(x) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot DI(x_k \le x) = \frac{1}{n}(M\, I(x_k \le x) - F^2(x)) =$$

$$= \frac{1}{n} F(x)(1 - F(x)) \le \frac{1}{4n}$$ Место для уравнения.

$$max_{0 \le a \le 1}[a(1-a)] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

По неравенству Чебышева, $\varepsilon > 0$:

$$P(|F_n(x) - F(x)| \ge \varepsilon) \le \frac{DF_n(x)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma_F^2(x)}{\varepsilon^2} \le \frac{1}{4n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\Longrightarrow F_n\,(x) \xrightarrow{p} F(x)$$ по теореме Бернулли (3)

3. Выборочные моменты и другие характеристики.

Выборочные моменты - моменты, вычисляемые с помощью эмпирического распределения.

Моменты k- го порядка:

$$v_{nk} = \int x^k \, dF_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^k$$

$$v_{n1} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \text{сред. ариф.}$$

Центральный момент k- го порядка:

$$\mu_{nk} = \int (x - \bar{x})^k \, dF_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^k$$

$$\mu_{n2} = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \text{- дисперсия выборки}$$

$$S^2 = v_{n2} - v_{n1}^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 \geq 0$$

3. Выборочные моменты и другие характеристики.

Абсолютный момент k-го порядка:

$$\delta_{nk} = \int |x|^k dF_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} |x_i|^k$$

Абсолютный центральный момент k-го порядка:

$$d_{nk} = \int |x - \bar{x}|^k dF_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} |x_i - \bar{x}|^k$$

Медиана –середина вариационного ряда: $x_{\mathcal{M}e} = \mathcal{M}e$

$$\mathcal{M}e = \begin{cases} x_{(i)}, & \text{если } m - \text{нечет.} \\ \dfrac{x_{(i)} + x_{(i+1)}}{2}, & \text{если } m - \text{чет.} \end{cases}$$

3. Выборочные моменты и другие характеристики.

Мода – варианта x_i с максимальной частотой n_i $x_{\mathcal{M}_0} = \mathcal{M}_0$

Квантиль уровня p $(0 < p < 1)$

$$\zeta_{(p)n} = inf\{x: F_n(x) \geq p\}$$

$\zeta_{\left(\frac{1}{2}\right)n} =$ $\mathcal{M}e$-медиана, $\zeta_{\left(\frac{1}{4}\right)n}$ =квартиль

Вариация (изменчивость) - $V = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100\%$, где $S = \sqrt{S^2}$.

Чем ближе V к 0, тем хорошо.

Если вариация большая, то можно подозревать, что выборка неоднородная (специально подобранная)

4. Графическое изображение статистических данных.

Статистическое распределение изображается графически с помощью полигона и гистограммы.

Определение. *Полигоном частот* называют ломаную, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_i, n_i); *полигоном отн.частот* – с координатами (x_i, p_i^*), где $p_i^* = \frac{n_i}{n}$, $i = \overline{1,m}$.

Полигон служит для изображения дискретного статистического ряда. Полигон отн.частот является аналогом многоугольника распределения дискретной случайной величины в теории вероятностей.

Определение. *Гистограммой частот* называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основания которых расположены на оси Ox и длины их равны длинам частичных интервалов (h), а высоты равны отношению:

$\frac{n_i}{h}$ - для гистограммы частот; $\frac{n_i}{n \cdot h}$ - для гистограммы отн.частот.

4. Графическое изображение статистических данных.

Пример 1. Дана выборка значений случайной величины X объема 20:

12, 14, 19, 15, 14, 18, 13, 16, 17, 12

18, 17, 15, 13, 17, 14, 14, 13, 14, 16

Требуется: - построить дискретный вариационный ряд;

- найти размах варьирования R, моду M_0, медиану M_e;
- построить полигон отн.частот.

1) Ранжируем выборку : 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14,
15, 15, 16, 16, 17, 17, 17, 18, 18, 19.

2) Находим частоты вариантов и строим дискретный вариационный ряд (табл.1)

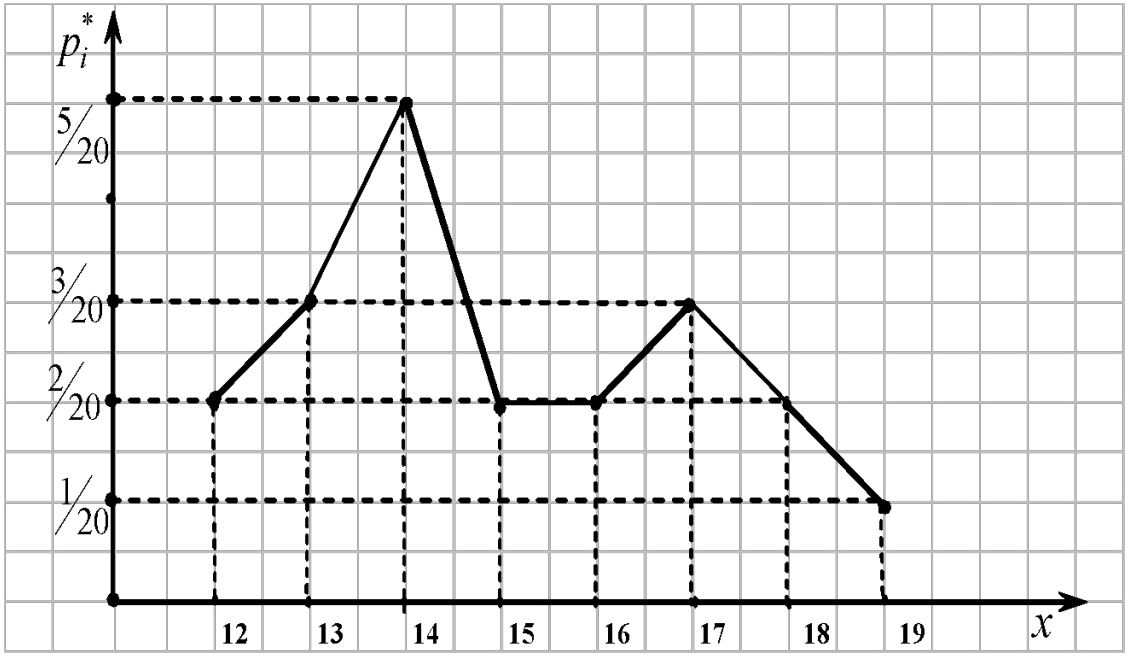
4. Графическое изображение статистических данных.

Значения вариантов	12	13	14	15	16	17	18	19
Частоты	2	3	5	2	2	3	2	1
Отн. частоты	2/20	3/20	5/20	2/20	2/20	3/20	2/20	1/20

3) По результатам таблицы находим:

R=19-12, M_0=14, Me=(14+15)/2

4) Строим полигон отн.частот.



4. Графическое изображение статистических данных.

Пример 2. Результаты измерений отклонений от нормы диаметров 50 подшипников дали численные значения, приведенные в табл.

-0,158	1,701	0,634	0,720	0,490
1,531	-0,433	1,409	1,740	-0,266
-0,058	0,248	-0,095	-1,488	-0,361
0,415	-1,382	0,129	-0,361	-0,087
-0,329	0,086	0,130	-0,244	-0,882
0,318	-1,087	0,899	1,028	-1,304
0,349	-0,293	0,105	-0,056	0,757
-0,059	-0,539	-0,078	0,229	0,194
0,123	0,318	0,367	-0,992	0,529

Для данной выборки: - построить интервальный вариационный ряд;
- построить гистограмму и полигон отн.частот.

1. Строим интервальный ряд.

По данным таблицы 4 определяем: $x_{min} = -1.76$; $x_{max} = 1.74$

Для определения длины интервала h используем формулу Стерджеса:

$$h=(x_{max}-x_{min})/(1+3.322\lg n).$$

Число интервалов $m=1+3.322 \lg 50$ (имеются также и формулы: $m=5\lg n$ или $m=\mathrm{Ent}(\sqrt{n})$).

4. Графическое изображение статистических данных.

Примем h=0,6 , m=7. За начало первого интервала примем величину

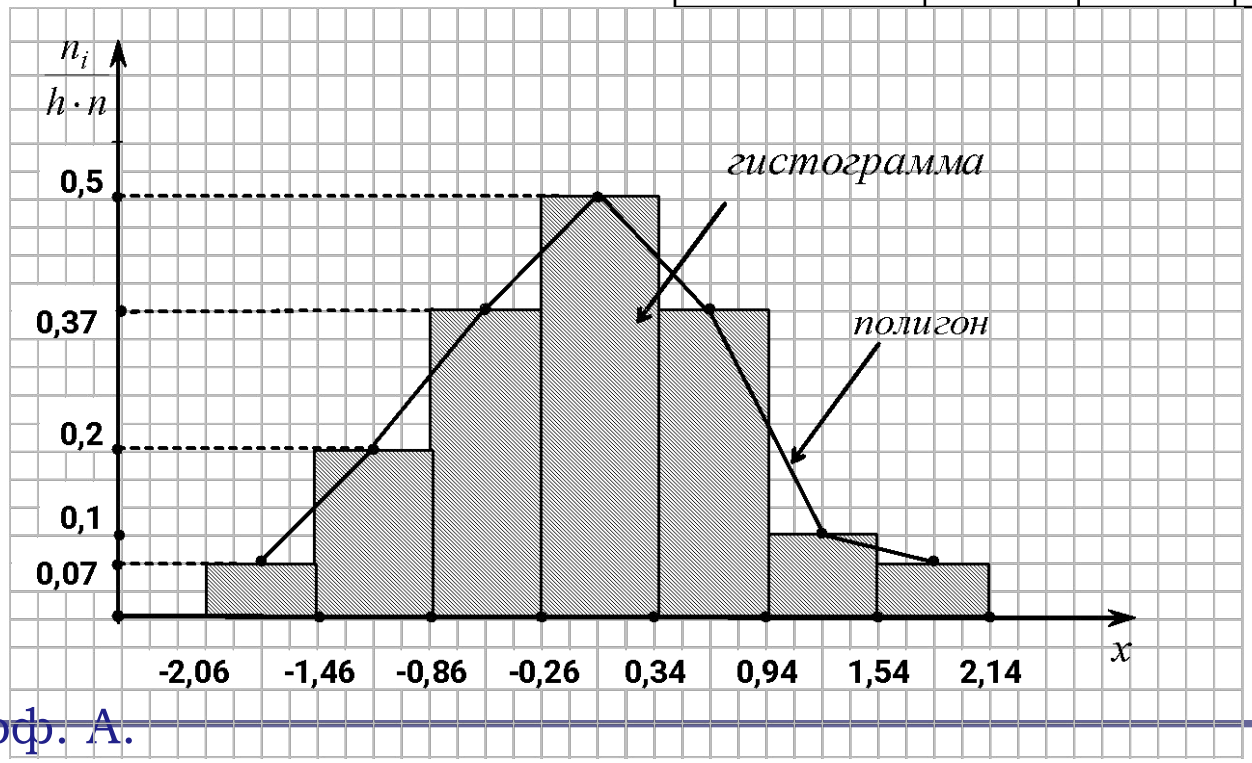
$$x_{нач} = x_{min} - h/2 = -2.06.$$

Конец последнего интервала должен удовлетворять условию: $x_{кон} - h \le x_{max} < x_{кон}$.

Действительно, $2.14 - 0.6 \le 1.17 < 2.14$;

Строим интервальный ряд

Частоты	2	6	11	15	11	3	2
Отн.частоты	2/50	6/50	11/50	15/50	11/50	3/50	2/50



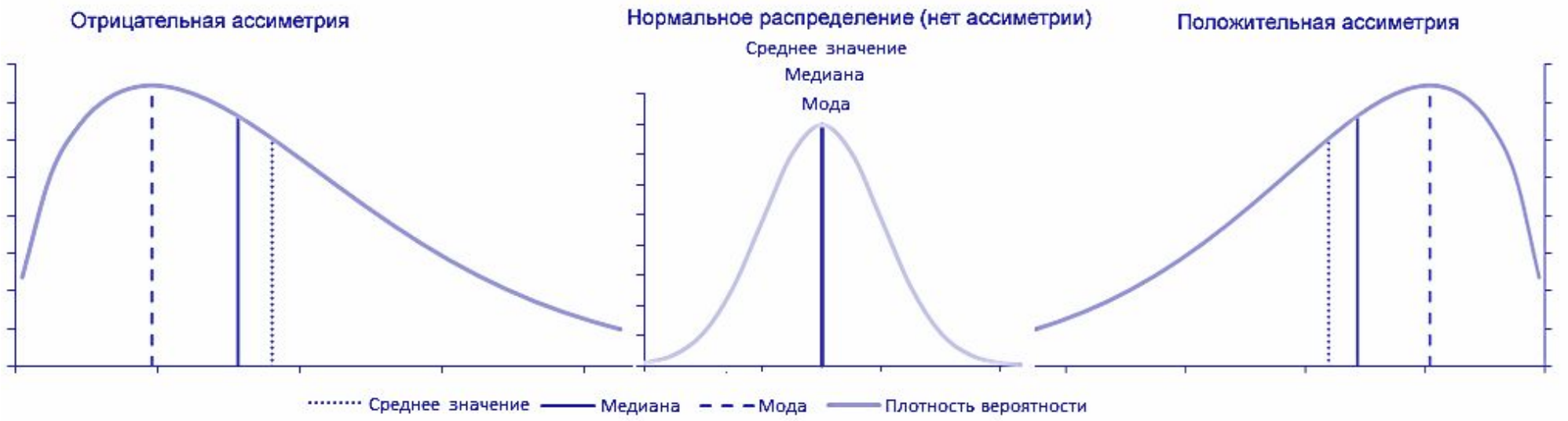
Вершинами полигона являются середины верхних оснований прямоугольников гистограммы.

4. Графическое изображение статистических данных.

Асимметрия – $A_s = \frac{\mu_{3n}}{S^3}$ $\mu_{3n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3$

S^3 –желательно (рекомендовано) вычислять так : $S^3 = S^2 \cdot S$.

Идеальная симметрическая плотность- нормальная.



4. Графическое изображение статистических данных.

Эксцесс - $E = \frac{\mu_{4n}}{S^4} - 3 \quad \mu_{4n} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4, S^4 = S^2 \cdot S^2$

$E < 0$ – плосковершинный график

$E = 0$ – нормальный (стандартный) график

$E > 0$ – узковершинный график