Матрицы и определители

1. ***Определение матрицы***
2. ***Операции над матрицами***
3. ***Определитель матрицы***
4. ***Свойства определителей***

Определение матрицы

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются *элементами* матрицы.

Например, матрица

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей (вектором)-строкой*, а из одного столбца — *матрицей (вектором)-столбцом*: $A = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$ — матрица-строка;

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$ — матрица-столбец.

Операции над матрицами

1. *Умножение матрицы на число.* *Произведением матрицы A на число* λ называется матрица $B = \lambda A$, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ для $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$.

Например, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, то $5A = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$.

Следствие. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Например, $\begin{pmatrix} 20 & 12 & 6 \\ 52 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 26 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

В частности, произведение матрицы A на число 0 есть нулевая матрица, т.е. $0 \cdot A = \mathbf{0}$.

2. Сложение матриц. *Суммой двух матриц A и B* одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$ (т.е. матрицы складываются поэлементно).

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix}.$$

В частном случае $A + \mathbf{0} = A$.

3. Вычитание матриц. *Разность двух матриц* одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A - B = A + (-1) \cdot B$.

4. Умножение матриц. *Умножение матрицы A на матрицу B* определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй[1]. Тогда *произведением матриц* $\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

▷ **Пример 1.1.** Вычислить произведение матриц $A \cdot B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. 1. Найдем размер матрицы-произведения (если умножение матриц возможно): $\underset{2\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 3}{B} = \underset{2\times 3}{C}$.

2. Вычислим элементы матрицы-произведения C, умножая элементы каждой строки матрицы A на соответствующие элементы столбцов матрицы B следующим образом:

$$C = \begin{pmatrix} 1(-1)+0\cdot 5+2(-2) & 1\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot 4+2\cdot 1 \\ 3(-1)+1\cdot 5+0(-2) & 3\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 & 3\cdot 1+1\cdot 4+0\cdot 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем $C = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. ▶

Многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами (что следует из определений этих операций):

1) $A + B = B + A$.

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3) $(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

4) $A(B + C) = AB + AC$.

5) $(A + B)C = AC + BC$.

6) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

7) $A(BC) = (AB)C$.

Однако имеются и специфические свойства матриц. Так, операция умножения матриц имеет некоторые отличия от умножения чисел:

а) Если произведение матриц AB существует, то после перестановки сомножителей местами произведения матриц BA может и не существовать. Действительно, в примере **1.1** получили произведение матриц $A_{2\times3} \cdot B_{3\times3}$, а произведения $B_{3\times3} \cdot A_{2\times3}$ не существует, так как число столбцов первой матрицы не совпадает с числом строк второй матрицы.

б) Если даже произведения AB и BA существуют, то они могут быть матрицами разных размеров.

▷ **Пример 1.2.** Найти произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

▷ **Пример 1.2.** Найти произведения матриц AB и BA:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. $A_{2\times3} \cdot B_{3\times2} = C_{2\times2} = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}$;

$$B_{3\times2} \cdot A_{2\times3} = D_{3\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 \\ 2 & 16 & 11 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } AB \neq BA. \blacktriangleright$$

в) В случае, когда оба произведения AB и BA существуют и оба — матрицы одинакового размера (это возможно только при умножении квадратных матриц A и B одного порядка), *коммутативный (переместительный) закон умножения, вообще говоря, не выполняется,* т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

▷ **Пример 1.3.** Найти произведения матриц AB и BA, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. $AB = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 24 & 47 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 30 & 44 \end{pmatrix}$; т.е. $AB \neq BA$. ▶

В частном случае коммутативным законом обладает произведение любой квадратной матрицы A n-го порядка на единичную матрицу E того же порядка, причем это произведение равно A:

$$AE = EA = A.$$

$$A_{n\times n}\cdot E_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 9 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}=A.$$

$$E_{n\times n}\cdot A_{n\times n}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 9 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}=A.$$

5. Возведение в степень. Целой положительной степенью $A^m\,(m>1)$ квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A, т.е.

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots A}_{m \text{ раз}}.$$

Заметим, что операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц.

По определению полагают $A^0 = E$, $A^1 = A$. Нетрудно показать, что $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$, $\left(A^m\right)^k = A^{mk}$.

▷ **Пример 1.4.** Найти A^2, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$.

Обращаем внимание на то, что из равенства $A^m = \mathbf{0}$ еще не следует, что матрица $A = \mathbf{0}$. ▶

6. Транспонирование матрицы — переход от матрицы A к матрице A', в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица A' называется *транспонированной* относительно матрицы A:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Из определения следует, что если матрица A имеет размер $m \times n$, то транспонированная матрица A' имеет размер $n \times m$.

Например, $A_{2\times3}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $A'_{3\times2}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Рассмотренные выше операции над матрицами позволяют упростить решения некоторых экономических задач.

► **Пример 1.5.** Предприятие выпускает продукцию трех видов: P_1, P_2, P_3 и использует сырье двух типов: S_1 и S_2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, где каждый элемент $a_{ij}\,(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2)$ показывает, сколько единиц сырья j-го типа расходуется на производство единицы продукции i-го вида. План выпуска продукции задан матрицей-строкой $C = (100\ \ 80\ 130)$, стоимость единицы каждого типа сырья (ден. ед.) — матрицей-столбцом $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Определить затраты сырья, необходимые для планового выпуска продукции, и общую стоимость сырья.

Р е ш е н и е. Затраты 1-го сырья составляют $S_1 = 2 \cdot 100 + 5 \cdot 80 + 1 \cdot 130 = 730$ ед. и 2-го — $S_2 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 80 + 4 \cdot 130 = 980$ ед., поэтому матрица-строка затрат сырья S может быть записана

как произведение $S = C \cdot A = (100 \quad 80 \quad 130) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (730 \quad 980).$

Тогда общая стоимость сырья $Q = 730 \cdot 30 + 980 \cdot 50 = 70900$ ден. ед. может быть записана в матричном виде $Q = S \cdot B = (CA)B = (70900)$. Общую стоимость сырья можно вычислить и в другом порядке: вначале вычислим матрицу стоимостей затрат сырья на единицу

продукции, т.е. матрицу $R = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix}$, а затем

общую стоимость сырья

$$Q = CR = C \cdot (AB) = (100 \quad 80 \quad 130) \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix} = (70900). \ \blacktriangleright$$

Определитель матрицы

Определителем матрицы первого порядка $A = (a_{11})$, или *определителем первого порядка*, называется элемент a_{11}:

$\Delta_1 = |A| = a_{11}$. Например, пусть $A = (3)$, тогда $\Delta_1 = |A| = 3$.

Определителем матрицы второго порядка $A = \left(a_{ij}\right)$, или *определителем второго порядка*, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Произведения $a_{11}a_{22}$ и $a_{12}a_{21}$ называются *членами определителя* второго порядка. Например, пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, тогда

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7.$$

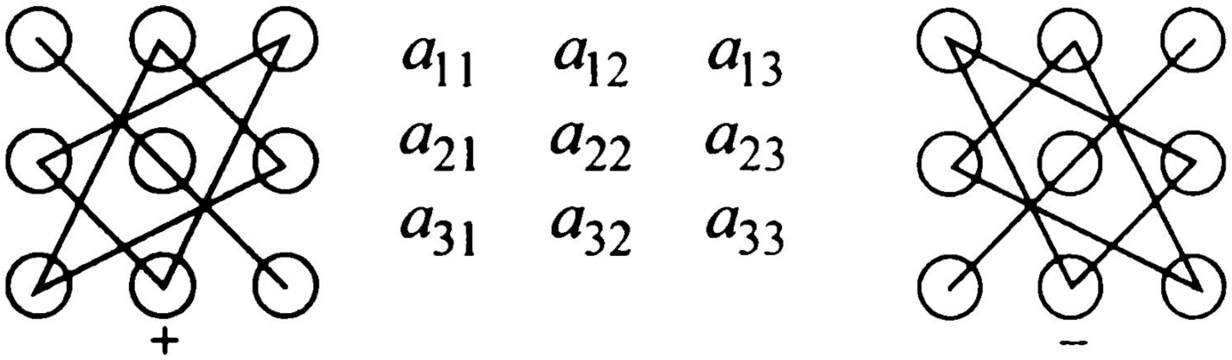
Пусть дана квадратная матрица третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем матрицы третьего порядка $A = (a_{ij})$, или ***определителем третьего порядка***, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_3 = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$
$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Это число представляет алгебраическую сумму, состоящую из 6 слагаемых, или 6 членов определителя. В каждое слагаемое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знаки, с которыми члены определителя входят в формулу (1.4), легко запомнить, пользуясь схемой (рис. 1.1), которая называется *правилом треугольников* или *правилом Саррюса*.



▷ **Пример 1.6.** Вычислить определитель третьего порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

▷ **Пример 1.6.** Вычислить определитель третьего порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. $\Delta = +1\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot(-1)\cdot 2 -$

$-1\cdot 1\cdot 1 = 5$. ▶

Пусть дана квадратная матрица A n-го порядка.

Минором M_{ij} ***элемента*** a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Например, минором элемента a_{12} матрицы A третьего порядка будет:

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}.$$

Каждая матрица n-го порядка имеет n^2 миноров $(n-1)$-го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} *элемента* a_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца $(i+j)$ — четное число, и отличается от минора знаком, когда $(i+j)$ — нечетное число.

Например, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}; A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}$.

▷ **Пример 1.7.** Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы (из примера **1.6**):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

▷ **Пример 1.7.** Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы (из примера **1.6**):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \; A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \; A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \; A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \; A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \; A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \; A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$ ▶

Важное значение для вычисления определителей имеет следующая теорема.

Теорема Лапласа[1]**.** *Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:*

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}$$

(разложение по элементам i-й строки; $i = 1, 2, ..., n$);

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}$$

(разложение по элементам j-го столбца; $j = 1, 2, ... , n$).

□ Убедимся в справедливости теоремы Лапласа на примере определителя матрицы третьего порядка. Разложим его вначале по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

▷ **Пример 1.8.** Вычислить определитель треугольной матрицы[1]:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

▷ **Пример 1.8.** Вычислить определитель треугольной матрицы[1]:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Раскладывая по первому столбцу, получаем:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 =$$

$$= 5\cdot(-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 5\cdot(-1)\cdot 3\cdot 1 + 0 = -15.$$ ▶

Свойства определителей

1. *Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен 0.*

2. *Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число λ, то ее определитель умножится на это число λ.*

□ Пусть определитель исходной матрицы равен Δ. Для определенности первую строку матрицы умножим на λ, получим новый определитель Δ', который разложим по элементам первой строки:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix} = \lambda a_{11} A_{11} + \lambda a_{12} A_{12} + \dots + \lambda a_{1n} A_{1n} =$$

$$= \lambda(a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n}) = \lambda\Delta. \ \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. За знак определителя можно выносить общий множитель элементов любой строки или столбца в отличие от матрицы, за знак которой можно выносить общий множитель лишь всех ее элементов.

Например, $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} =$

$= 2\cdot 2\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, но

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. *При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется:* $|A'| = |A|$.

4. *При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.*

□ Предположим вначале, что переставлены две соседние строки матрицы: i и $i+1$. Разложим определитель исходной матрицы Δ по элементам i-й строки, а определитель новой матрицы (с переставленными строками) Δ' — по элементам $(i+1)$-й строки. Разложения будут отличаться только знаком, так как в формуле (1.9) для Δ' каждое алгебраическое дополнение будет иметь противоположный знак (множители $(-1)^{i+j}$ сменятся на множители $(-1)^{i+1+j}$, поэтому $\Delta' = -\Delta$.

Если переставить не соседние строки, а, скажем, i-ю и $(i + k)$-ю, то такую перестановку можно представить как последовательное смещение i-й строки на k строк вниз (при этом каждый раз знак определителя меняется), а $(i + k)$-й строки на $(k - 1)$ вверх, что тоже сопровождается $(k - 1)$ изменением знака, т.е. знак поменяется нечетное число $(2k - 1)$ раз: $\Delta' = -\Delta$.

Доказательство для столбцов аналогично. ■

5. *Если квадратная матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен 0.*

□ Действительно, переставим эти строки (столбцы). С одной стороны, определитель не изменится, но, с другой стороны, по свойству 4 поменяет знак, т.е. $\Delta = -\Delta$, откуда $\Delta = 0$. ■

6. *Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен 0.*

□ Пусть для определенности пропорциональны первая и вторая строки. Тогда, вынося коэффициент пропорциональности λ, получаем по свойству 2: $\Delta' = \lambda \cdot \Delta$, где Δ имеет две одинаковые строки и по свойству 5 равен 0. ■

7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна 0, т.е.

$$\sum_{S=1}^{n} a_{is} A_{js} = 0\ , \ \textit{при}\ \ i \neq j\ .$$

□ Рассмотрим квадратную матрицу A и вспомогательную матрицу $\overline{A}$, полученную из матрицы A заменой j-й строки на i-ю:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

т.е. матрица $\overline{A}$ имеет две одинаковые строки, поэтому согласно свойству 5 ее определитель равен 0. Вычисляя его разложением по элементам j-й строки, получаем:

$$|\overline{A}| = \sum_{S=1}^{n} a_{is} A_{js} = 0 \quad (i \neq j). \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. Объединяя результат теоремы Лапласа и свойство 7, получаем:

$$\sum_{S=1}^{n} a_{is} A_{js} = \begin{cases} |A| & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases}$$

8. ***Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.***

□ Пусть для определенности к элементам i-й строки матрицы прибавим элементы j-й строки, умноженные на λ $(i \neq j)$. Тогда первая строка матрицы имеет вид: $[(a_{i1}+\lambda a_{j1})(a_{i2}+\lambda a_{j2})\ldots(a_{in}+\lambda a_{jn})]$. Определитель полученной матрицы вычислим разложением по элементам i-й строки:

$$\Delta' = (a_{i1}+\lambda a_{j1})A_{i1} + (a_{i2}+\lambda a_{j2})\,A_{i2} + \ldots + (a_{in}+\lambda a_{jn})A_{in},$$

где A_{is} — алгебраические дополнения элементов i-й строки исходной матрицы $(s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ \ i \neq j)$. Раскроем скобки и получим после преобразования:

$$\Delta' = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is} + \lambda\sum_{s=1}^{n} a_{js}A_{is}.\ \ (i \neq j).$$

Используя формулу получаем, что первая сумма равна

определителю исходной матрицы, а вторая — 0, т.е. $\Delta' = \Delta$. ■

9. *Сумма произведений произвольных чисел* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной из данной заменой элементов этой строки (столбца) на числа* $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Свойство вытекает непосредственно из теоремы Лапласа.

10. *Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей:* $|C| = |A| \cdot |B|$, где $C = A \cdot B$; A и B — матрицы n-го порядка.

Замечание. Из свойства 10 следует, что даже если $AB \neq BA$, то $|AB| = |BA|$.

▷ **Пример 1.9.** Вычислить определитель четвертого порядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем матрицу так, чтобы в 3-й строке все элементы, кроме одного, обращались в 0. Для этого умножим, например, элементы 3-го столбца на (−4) и на 2 и прибавим их соответственно к элементам 1-го и 2-го столбцов. Раскладывая полученный определитель по элементам третьей строки, найдем

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -2 & 4 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 12 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или с помощью теоремы Лапласа, однако можно продолжить упрощение матрицы. «Обнулим» в матрице третьего порядка элементы 2-й строки (кроме одного). Для этого элементы 3-го столбца матрицы, предварительно умножив на (−13) и на 4, сложим с элементами 1-го и 2-го столбцов соответственно:

$$|A| = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 36 & 6 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая по элементам второй строки и вынося общие множители, получаем:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -40 & 18 \\ -88 & 36 \end{vmatrix} = (-1)(-8) \cdot 18 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -144. \quad \blacktriangleright$$