

Матрицы и определители

-
- 1. Определение матрицы**
 - 2. Операции над матрицами**
 - 3. Определитель матрицы**
 - 4. Свойства определителей**
- 

Определение матрицы

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются *элементами* матрицы.

Например, матрица

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей (вектором)-строкой*, а из одного столбца — *матрицей (вектором)-столбцом*: $A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$ — матрица-строка;

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix} \text{ — матрица-столбец.}$$

Операции над матрицами

1. *Умножение матрицы на число.* Произведением матрицы A на число λ называется матрица $B = \lambda A$, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ для $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

Например, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, то $5A = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$.

С л е д с т в и е. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Например, $\begin{pmatrix} 20 & 12 & 6 \\ 52 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 26 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

В частности, произведение матрицы A на число 0 есть нулевая матрица, т.е. $0 \cdot A = \mathbf{0}$.

2. Сложение матриц. Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ (т.е. матрицы складываются поэлементно).

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix}.$$

В частном случае $A + \mathbf{0} = A$.

3. Вычитание матриц. Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A - B = A + (-1) \cdot B$.

4. Умножение матриц. Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй¹. Тогда *произведением матриц* $A \cdot B$ называется

такая матрица C , $m \times n$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме

произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^k a_{is}b_{sj}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

▷ **Пример 1.1.** Вычислить произведение матриц $A \cdot B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1. Найдем размер матрицы-произведения (если умножение матриц возможно): $A \cdot B = C$.

$2 \times 3 \quad 3 \times 3 \quad 2 \times 3$

2. Вычислим элементы матрицы-произведения C , умножая элементы каждой строки матрицы A на соответствующие элементы столбцов матрицы B следующим образом:

$$C = \begin{pmatrix} 1(-1) + 0 \cdot 5 + 2(-2) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \\ 3(-1) + 1 \cdot 5 + 0(-2) & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем $C = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. ►

Многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами (что следует из определений этих операций):

$$1) A + B = B + A.$$

$$2) (A + B) + C = A + (B + C).$$

$$3) (A + B) = \lambda A + \lambda B.$$

$$4) A(B + C) = AB + AC.$$

$$5) (A + B)C = AC + BC.$$

$$6) \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

$$7) A(BC) = (AB)C.$$

Однако имеются и специфические свойства матриц. Так, операция умножения матриц имеет некоторые отличия от умножения чисел:

а) Если произведение матриц AB существует, то после перестановки сомножителей местами произведения матриц BA может и не существовать. Действительно, в примере 1.1 получили произведение матриц $A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 3}$, а произведения $B_{3 \times 3} \cdot A_{2 \times 3}$ не существует, так как число столбцов первой матрицы не совпадает с числом строк второй матрицы.

б) Если даже произведения AB и BA существуют, то они могут быть матрицами разных размеров.

▷ **Пример 1.2.** Найти произведения матриц AB и BA :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

▷ **Пример 1.2.** Найти произведения матриц AB и BA :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. $A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2} = C_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 17 \end{pmatrix};$

$$B_{3 \times 2} \cdot A_{2 \times 3} = D_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 \\ 2 & 16 & 11 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } AB \neq BA. \blacktriangleright$$

в) В случае, когда оба произведения AB и BA существуют и — оба — матрицы одинакового размера (это возможно только при умножении квадратных матриц A и B одного порядка), *коммутативный (переместительный) закон умножения, вообще говоря, не выполняется, т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$.*

▷ **Пример 1.3.** Найти произведения матриц AB и BA , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. $AB = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 24 & 47 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 30 & 44 \end{pmatrix}$; т.е. $AB \neq BA$. ►

В частном случае коммутативным законом обладает произведение любой квадратной матрицы A n -го порядка на единичную матрицу E того же порядка, причем это произведение равно A :

$$AE = EA = A.$$

$$A_{n \times n} \cdot E_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = A.$$

$$E_{n \times n} \cdot A_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = A.$$

5. Возведение в степень. Целой положительной степенью A^m ($m > 1$) квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A , т.е.

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m \text{ раз}}$$

Заметим, что операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц.

По определению полагают $A^0 = E$, $A^1 = A$. Нетрудно показать, что $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$, $(A^m)^k = A^{mk}$.

▷ **Пример 1.4.** Найти A^2 , где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$.

Обращаем внимание на то, что из равенства $A^m = \mathbf{0}$ еще не следует, что матрица $A = \mathbf{0}$. ►

6. Транспонирование матрицы — переход от матрицы A к матрице A' , в которой строки и столбцы поменялись местами с

— сохранением порядка. Матрица A' называется *транспонированной* относительно матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Из определения следует, что если матрица A имеет размер $m \times n$, то транспонированная матрица A' имеет размер $n \times m$.

Например, $A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad A'_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$

Рассмотренные выше операции над матрицами позволяют упростить решения некоторых экономических задач.

► **Пример 1.5.** Предприятие выпускает продукцию трех видов: P_1 , P_2 , P_3 и использует сырье двух типов: S_1 и S_2 . Нормы

расхода сырья характеризуются матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, где каждый

элемент a_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2$) показывает, сколько единиц сырья j -го типа расходуется на производство единицы продукции i -го вида. План выпуска продукции задан матрицей-строкой $C = (100 \ 80 \ 130)$, стоимость единицы каждого типа сырья (ден. ед.) —

матрицей-столбцом $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Определить затраты сырья, необходимые для планового выпуска продукции, и общую стоимость сырья.

Р е ш е н и е. Затраты 1-го сырья составляют $S_1 = 2 \cdot 100 + 5 \cdot 80 + 1 \cdot 130 = 730$ ед. и 2-го — $S_2 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 80 + 4 \cdot 130 = 980$ ед., поэтому матрица-строка затрат сырья S может быть записана

как произведение $S = C \cdot A = (100 \ 80 \ 130) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (730 \ 980)$.

Тогда общая стоимость сырья $Q = 730 \cdot 30 + 980 \cdot 50 = 70900$ ден. ед. может быть записана в матричном виде $Q = S \cdot B = (CA)B = (70900)$.

Общую стоимость сырья можно вычислить и в другом порядке: вначале вычислим матрицу стоимостей затрат сырья на единицу

продукции, т.е. матрицу $R = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix}$, а затем

общую стоимость сырья

$$Q = CR = C \cdot (AB) = (100 \ 80 \ 130) \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix} = (70900). \blacktriangleright$$

Определитель матрицы

Определителем матрицы первого порядка $A = (a_{11})$, или определителем первого порядка, называется элемент a_{11} :

$$\Delta_1 = |A| = a_{11}. \text{ Например, пусть } A = (3), \text{ тогда } \Delta_1 = |A| = 3.$$

Определителем матрицы второго порядка $A = (a_{ij})$, или определителем второго порядка, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Произведения $a_{11}a_{22}$ и $a_{12}a_{21}$ называются *членами определителя* второго порядка. Например, пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, тогда

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7.$$

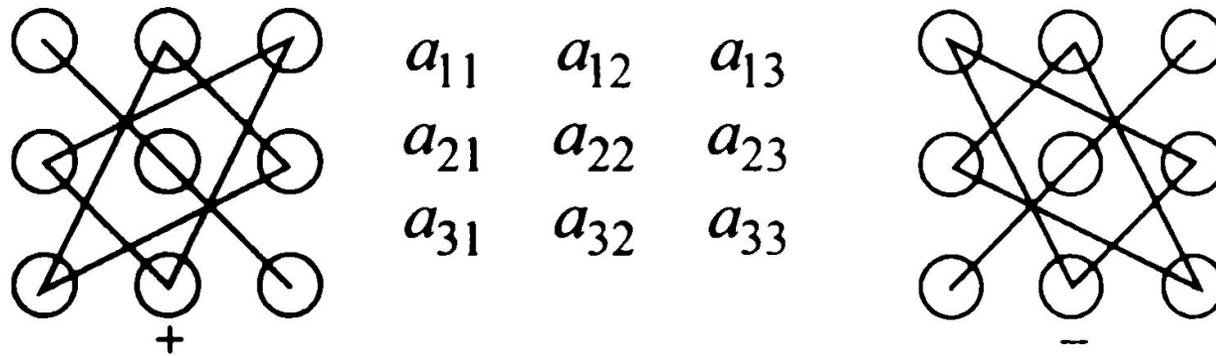
Пусть дана квадратная матрица третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем матрицы третьего порядка $A = (a_{ij})$, или определителем третьего порядка, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_3 = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Это число представляет алгебраическую сумму, состоящую из 6 слагаемых, или 6 членов определителя. В каждое слагаемое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знаки, с которыми члены определителя входят в формулу (1.4), легко запомнить, пользуясь схемой (рис. 1.1), которая называется *правилом треугольников* или *правилом Сарруса*.



▷ **Пример 1.6.** Вычислить определитель третьего порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

▷ **Пример 1.6.** Вычислить определитель третьего порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. $\Delta = +1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 -$
 $-1 \cdot 1 \cdot 1 = 5.$ ►

Пусть дана квадратная матрица A n -го порядка.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n -го порядка называется определитель матрицы $(n - 1)$ -го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i -й строки и j -го столбца.

Например, минором элемента a_{12} матрицы A третьего порядка будет:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}.$$

Каждая матрица n -го порядка имеет n^2 миноров $(n - 1)$ -го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n -го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца $(i + j)$ — четное число, и отличается от минора знаком, когда $(i + j)$ — нечетное число.

Например, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$; $A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}$.

▷ **Пример 1.7.** Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы (из примера 1.6):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

▷ **Пример 1.7.** Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы (из примера 1.6):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3. \blacktriangleright$$

Важное значение для вычисления определителей имеет следующая теорема.

Теорема Лапласа¹. *Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:*

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^n a_{is}A_{is}$$

(разложение по элементам i -й строки; $i = 1, 2, \dots, n$);

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^n a_{sj}A_{sj}$$

(разложение по элементам j -го столбца; $j = 1, 2, \dots, n$).

□ Убедимся в справедливости теоремы Лапласа на примере определителя матрицы третьего порядка. Разложим его вначале по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

▷ **Пример 1.8.** Вычислить определитель треугольной матрицы¹:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

▷ **Пример 1.8.** Вычислить определитель треугольной матрицы¹:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Раскладывая по первому столбцу, получаем:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 =$$
$$= 5 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 5 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 1 + 0 = -15. \blacktriangleright$$

Свойства определителей

- 1. Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен 0.*
- 2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число λ , то ее определитель умножится на это число λ .*

□ Пусть определитель исходной матрицы равен Δ . Для определенности первую строку матрицы умножим на λ , получим новый определитель Δ' , который разложим по элементам первой строки:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix} = \lambda a_{11} A_{11} + \lambda a_{12} A_{12} + \dots + \lambda a_{1n} A_{1n} =$$
$$= \lambda(a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n}) = \lambda \Delta. \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. За знак определителя можно выносить общий множитель элементов любой строки или столбца в отличие от матрицы, за знак которой можно выносить общий множитель лишь всех ее элементов.

$$\begin{aligned}
 & \text{Например, } \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \\
 & = 2 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \text{ но} \\
 & \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

3. При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется: $|A'| = |A|$.

4. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.

□ Предположим вначале, что переставлены две соседние строки матрицы: i и $i+1$. Разложим определитель исходной матрицы Δ по элементам i -й строки, а определитель новой матрицы (с переставленными строками) Δ' — по элементам $(i+1)$ -й строки. Разложения будут отличаться только знаком, так как в формуле (1.9) для Δ' каждое алгебраическое дополнение будет иметь противоположный знак (множители $(-1)^{i+j}$ сменятся на множители $(-1)^{i+1+j}$, поэтому $\Delta' = -\Delta$.

Если переставить не соседние строки, а, скажем, i -ю и $(i + k)$ -ю, то такую перестановку можно представить как последовательное смещение i -й строки на k строк вниз (при этом каждый раз знак определителя меняется), а $(i + k)$ -й строки на $(k - 1)$ вверх, что тоже сопровождается $(k - 1)$ изменением знака, т.е. знак поменяется нечетное число $(2k - 1)$ раз: $\Delta' = -\Delta$.

Доказательство для столбцов аналогично. ■

5. Если квадратная матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен 0.

□ Действительно, переставим эти строки (столбцы). С одной стороны, определитель не изменится, но, с другой стороны, по свойству 4 поменяет знак, т.е. $\Delta = -\Delta$, откуда $\Delta = 0$. ■

6. Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен 0.

□ Пусть для определенности пропорциональны первая и вторая строки. Тогда, вынося коэффициент пропорциональности λ , получаем по свойству 2: $\Delta' = \lambda \cdot \Delta$, где Δ имеет две одинаковые строки и по свойству 5 равен 0. ■

7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна 0, т.е.

$$\sum_{s=1}^n a_{is} A_{js} = 0, \text{ при } i \neq j.$$

□ Рассмотрим квадратную матрицу A и вспомогательную матрицу \bar{A} , полученную из матрицы A заменой j -й строки на i -ю:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

т.е. матрица \bar{A} имеет две одинаковые строки, поэтому согласно свойству 5 ее определитель равен 0. Вычисляя его разложением по элементам j -й строки, получаем:

$$|\bar{A}| = \sum_{S=1}^n a_{is} A_{js} = 0 \quad (i \neq j). \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. Объединяя результат теоремы Лапласа и свойство 7, получаем:

$$\sum_{S=1}^n a_{is} A_{js} = \begin{cases} |A| & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

8. *Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.*

□ Пусть для определенности к элементам i -й строки матрицы прибавим элементы j -й строки, умноженные на λ ($i \neq j$). Тогда первая строка матрицы имеет вид: $[(a_{i1} + \lambda a_{j1})(a_{i2} + \lambda a_{j2}) \dots (a_{in} + \lambda a_{jn})]$. Определитель полученной матрицы вычислим разложением по элементам i -й строки:

$$\Delta' = (a_{i1} + \lambda a_{j1})A_{i1} + (a_{i2} + \lambda a_{j2})A_{i2} + \dots + (a_{in} + \lambda a_{jn})A_{in},$$

где A_{is} — алгебраические дополнения элементов i -й строки исходной матрицы ($s = 1, 2, \dots, n; i \neq j$). Раскроем скобки и получим после преобразования:

$$\Delta' = \sum_{s=1}^n a_{is} A_{is} + \lambda \sum_{s=1}^n a_{js} A_{is}. \quad (i \neq j).$$

Используя формулу получаем, что первая сумма равна

определителю исходной матрицы, а вторая — 0, т.е. $\Delta' = \Delta$. ■

9. Сумма произведений произвольных чисел b_1, b_2, \dots, b_n на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной из данной заменой элементов этой строки (столбца) на числа b_1, b_2, \dots, b_n .

Свойство вытекает непосредственно из теоремы Лапласа.

10. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей: $|C| = |A| \cdot |B|$, где $C = A \cdot B$; A и B — матрицы n -го порядка.

З а м е ч а н и е. Из свойства 10 следует, что даже если $AB \neq BA$, то $|AB| = |BA|$.

▷ **Пример 1.9.** Вычислить определитель четвертого порядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение. Преобразуем матрицу так, чтобы в 3-й строке все элементы, кроме одного, обращались в 0. Для этого умножим, например, элементы 3-го столбца на (-4) и на 2 и прибавим их соответственно к элементам 1-го и 2-го столбцов. Раскладывая полученный определитель по элементам третьей строки, найдем

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -2 & 4 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 12 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или с помощью теоремы Лапласа, однако можно продолжить упрощение матрицы. «Обнулим» в матрице третьего порядка элементы 2-й строки (кроме одного). Для этого элементы 3-го столбца матрицы, предварительно умножив на (-13) и на 4 , сложим с элементами 1-го и 2-го столбцов соответственно:

$$|A| = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 36 & 6 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая по элементам второй строки и вынося общие множители, получаем:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -40 & 18 \\ -88 & 36 \end{vmatrix} = (-1)(-8) \cdot 18 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -144. \quad \blacktriangleright$$

