

**Здравствуйте!**

**Лекция №15**

## Интегралы Фруллани

Пусть

1. функция  $f(x)$  определена и непрерывна при  $x \geq 0$ ;
2. существует конечный  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty)$ ;
3.  $0 < a < b$ .

Тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(0) - f(+\infty)] \ln \frac{b}{a}$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx.$$

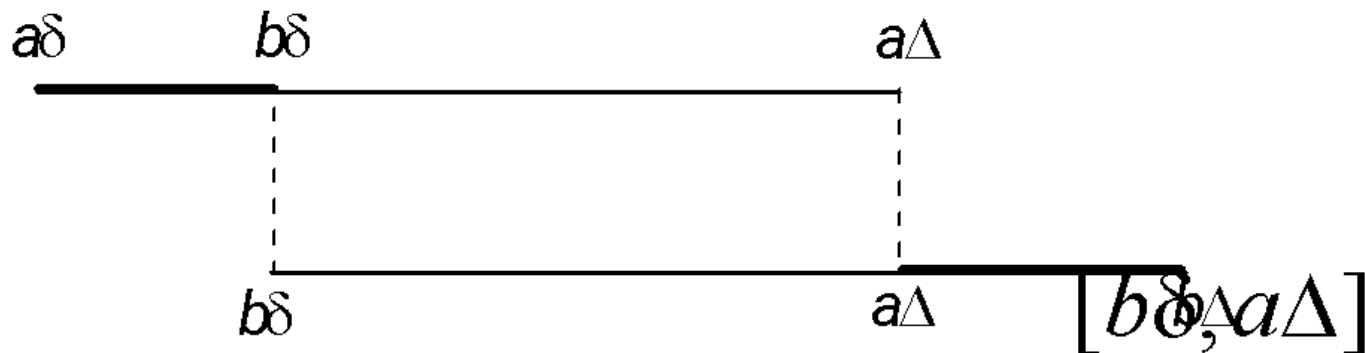
Имеем

$$\int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(bx)}{x} dx =$$

В первом интеграле сделаем замену переменных  $z = ax$ , во втором –  $z = bx$ : получаем

$$= \int_{a\delta}^{a\Delta} \frac{f(z)}{z} dz - \int_{b\delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z} dz =$$

И теперь – самое интересное. Посмотрите на области интегрирования первого и второго интегралов :



У них есть общая часть – отрезок  $[b\delta, a\Delta]$ . Подынтегральные функции одинаковы, интегралы вычитаются – следовательно, интегралы по этой области сокращаются. Остается

$$= \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z} dz - \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z} dz$$

А теперь срабатывает первая теорема о среднем

где  $\xi \in (a\delta, b\delta)$ ,  $\eta \in (a\Delta, b\Delta)$

$$= \frac{f(\xi)}{\xi} (b\delta - a\delta) - \frac{f(\eta)}{\eta} (b\Delta - a\Delta)$$

А теперь сделаем предельный переход при  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\Delta \rightarrow +\infty$ . Тогда  $\xi \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow +\infty$  и мы получаем

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0, \Delta \rightarrow +\infty} \int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(0) - f(+\infty)] \ln \frac{b}{a}.$$

Интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$  называется интегралом Фруллани.

Полученная формула позволяет легко вычислять их.

# Интегральные неравенства

## Неравенство Гёльдера.

Выведем одно из важнейших неравенств математического анализа – неравенство Гёльдера.

Пусть  $p$  и  $q$  – вещественные числа, такие, что

1.  $p \geq 1, q \geq 1$ :

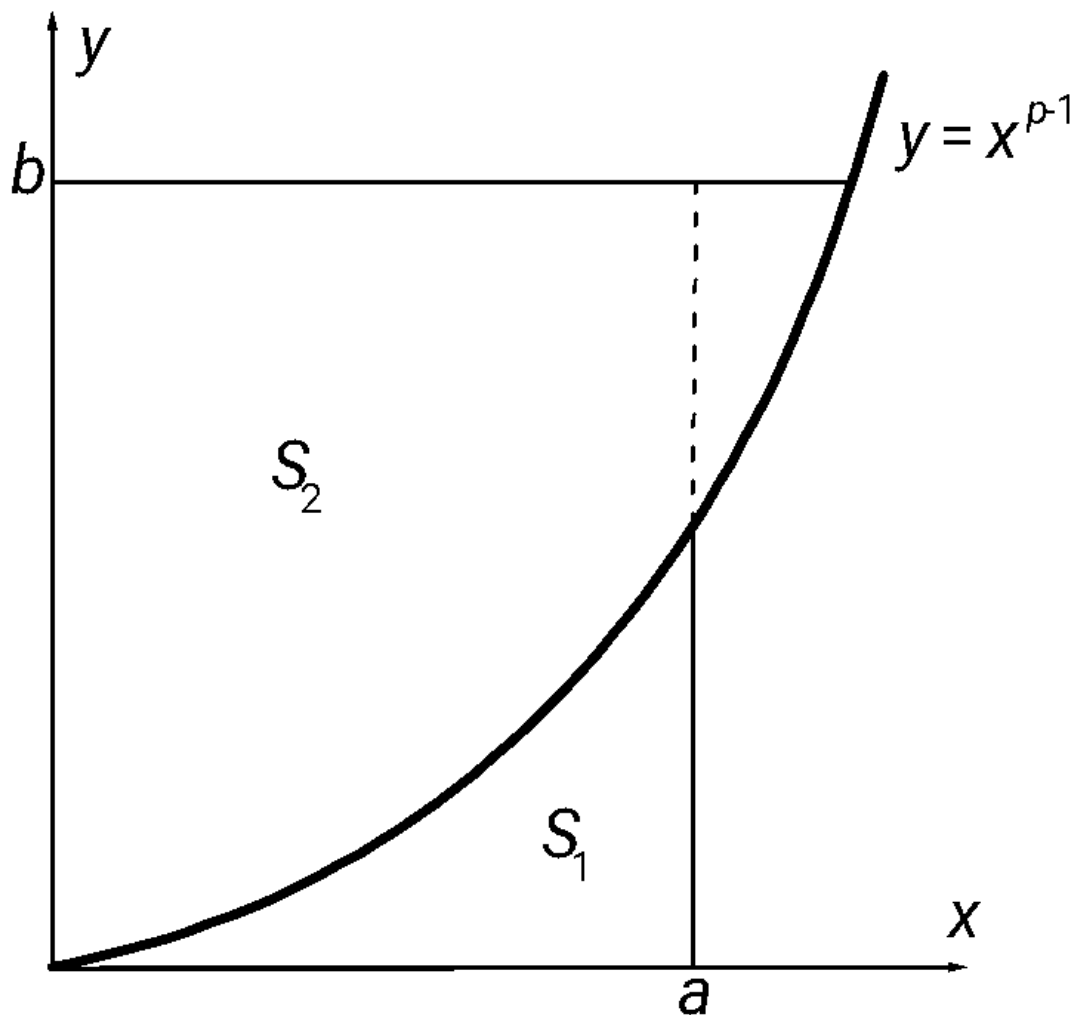
2. (самое главное)  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Прежде, чем выводить само неравенство, выведем некоторые промежуточные формулы, чтобы потом не отвлекаться. Имеем

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}; \quad (p-1)q = p; \quad q = \frac{p}{p-1}; \quad q-1 = \frac{p}{p-1} - 1 = \frac{1}{p-1}.$$

## Неравенство Гёльдера в простейшей форме

Рассмотрим график функции  $y = x^{p-1}$



Сосчитаем площади областей, указанных на рисунке. Имеем

$$S_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p}.$$

Из уравнения  $y = x^{p-1}$ , следует, что  $x = y^{1/(p-1)} = y^{q-1}$  (см. вспомогательные формулы) и поэтому

$$S_2 = \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{b^q}{q}.$$

Но, как видно из рисунка,  $S_1 + S_2 \geq ab$ , и поэтому

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

При выводе этой формулы неявно предполагалось, что  $a \geq 0$  и  $b \geq 0$ .

Для произвольных  $a$  и  $b$  это неравенство можно записать в виде

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

Это и есть знаменитое **неравенство Гёльдера**.



## Неравенство Гёльдера для сумм

Пусть даны два набора чисел –  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  и  $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$ .

Возьмем в неравенстве Гёльдера

$$a = \frac{|x_i|}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}} \text{ и } b = \frac{|y_i|}{\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}}.$$

Тогда неравенство Гёльдера даёт

$$\frac{|x_i y_i|}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}} \leq \frac{|x_i|^p}{p \sum_{i=1}^n |x_i|^p} + \frac{|y_i|^q}{q \sum_{i=1}^n |y_i|^q}.$$

Складывая все эти неравенства, получим

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

откуда

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q},$$

что и представляет собой неравенство Гёльдера для сумм.

В случае  $p = 2$  также и  $q = 2$  неравенство Гёльдера принимает вид

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

## Неравенство Гёльдера для интегралов

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  – две функции, интегрируемые на  $[a,b]$ . Возьмем в неравенстве Гёльдера

$$a = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}} \text{ и } b = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}}.$$

Тогда неравенство Гёльдера даёт

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{|g(x)|^q}{q \int_a^b |g(x)|^q dx}.$$

Интегрируя это неравенство, получим

$$\frac{\int_a^b |f(x)g(x)| dx}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

откуда получаем

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}$$

что и представляет собой неравенство Гёльдера для интегралов.

В случае  $p = 2$  также и  $q = 2$  и неравенство Гёльдера принимает вид

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx}.$$

Это неравенство называется неравенством Буняковского–Коши–Шварца.

## Неравенство Минковского

### Неравенство Минковского для сумм.

Пусть даны два набора чисел –  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  и  $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$ .

Тогда имеем

$$\begin{aligned} (|x_i| + |y_i|)^p &= (|x_i| + |y_i|) \cdot (|x_i| + |y_i|)^{p-1} = \\ &= |x_i| \cdot (|x_i| + |y_i|)^{p-1} + |y_i| \cdot (|x_i| + |y_i|)^{p-1}. \end{aligned}$$

Просуммируем эти выражения и к каждой сумме в правой части применим неравенство Гёльдера. Тогда получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p &\leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \\ &+ \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)q} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Но (см. вспомогательные формулы)  $(p-1)q = p$ , и мы получаем

$$\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \leq \left[ \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} \right] \left( \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \right)^{1/q}$$

Деля обе части неравенства на  $\left( \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \right)^{1/q}$  и учитывая, что

$1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ , получим неравенство

$$\left[ \sum_{i=1}^n (|x_i + y_i|)^p \right]^{1/p} \leq \left[ \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \right]^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}$$

которое и носит название **неравенства Минковского**. В частном случае  $p = 2$  оно принимает вид

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2},$$

которое Вы знаете еще со школы (длина стороны треугольника меньше суммы длин двух других сторон).

## Неравенство Минковского для интегралов.

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  – две функции, интегрируемые на  $[a, b]$ .  
Имеем, аналогично предыдущему,

$$(|f(x)| + |g(x)|)^p = |f(x)| \cdot (|f(x)| + |g(x)|)^{p-1} + |g(x)| \cdot (|f(x)| + |g(x)|)^{p-1}$$

Интегрируя и применяя к каждому интегралу в правой части неравенство Гёльдера для интегралов, получаем

$$\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p dx \leq \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \cdot \left( \int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} + \\ + \left( \int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \cdot \left( \int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^{(p-1)q} dx \right)^{1/q}.$$

Принимая снова во внимание, что  $(p-1)q = p$  будем иметь

$$\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p dx \leq \left[ \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left( \int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \right] \cdot \left( \int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p dx \right)^{1/q}$$

Деля на  $\left( \int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p dx \right)^{1/q}$  и снова учитывая, что  $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ ,

получим неравенство

$$\begin{aligned} \left[ \int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right]^{1/p} &\leq \left[ \int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p dx \right]^{1/p} \leq \\ &\leq \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left( \int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

которое также носит название **неравенства Минковского**.



В частном случае  $p = 2$  оно принимает вид

$$\sqrt{\int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}.$$

## Неравенство Иенсена

Это неравенство мы выведем не очень строго.

Пусть

1.  $f(x)$  есть выпуклая на  $[a, b]$  функция:
2.  $p(x) \geq 0$  и  $\int_a^b p(x)dx = 1$ ;
3.  $f(x)$  непрерывная функция.

Вспомним теперь неравенство Йенсена

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

и сделаем в нем следующие замены:

$\lambda_i = p(x_i)\Delta x_i$ , а  $x_i$  заменим на  $\varphi(x_i)$ . Тогда неравенство Йенсена примет вид

$$f\left(\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) p(x_i) \Delta x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n p(x_i) \Delta x_i f(\varphi(x_i)).$$

Сделаем теперь в этом неравенстве предельный переход  $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$ .

Тогда суммы перейдут в интегралы, и мы получим неравенство

$$f\left(\int_a^b \varphi(x) p(x) dx\right) \leq \int_a^b f(\varphi(x)) p(x) dx.$$

Это неравенство и называется неравенством Йенсена в интегральной форме.

Конец третьей части