

Многогранники и их основные свойства

Понятие о многогранниках.

Тело, ограниченное плоскими многоугольниками, называется **многогранником**

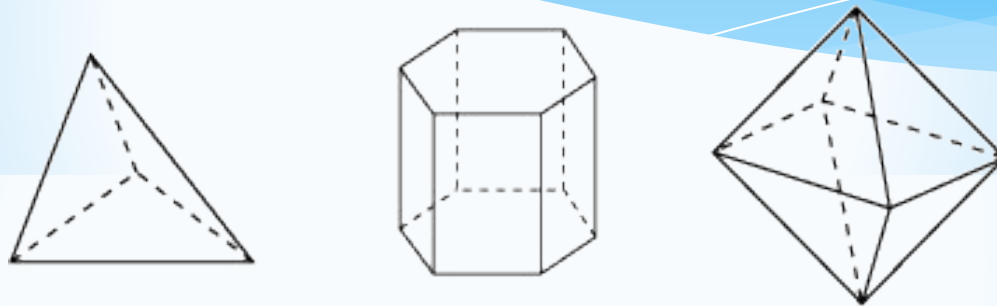
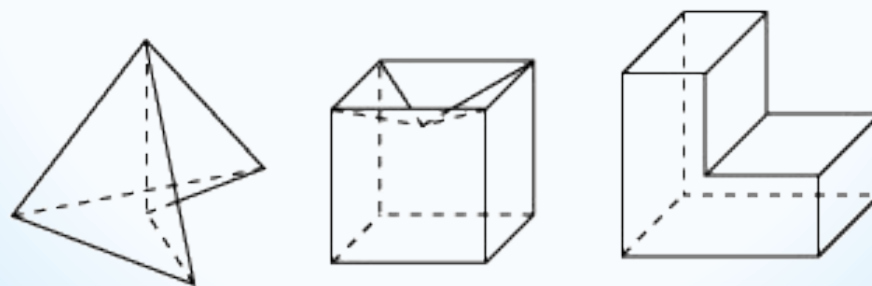


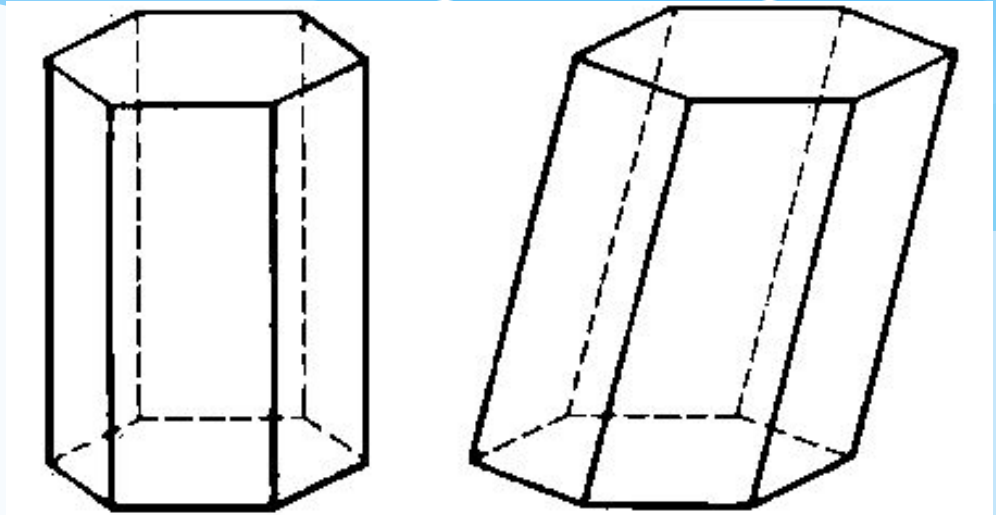
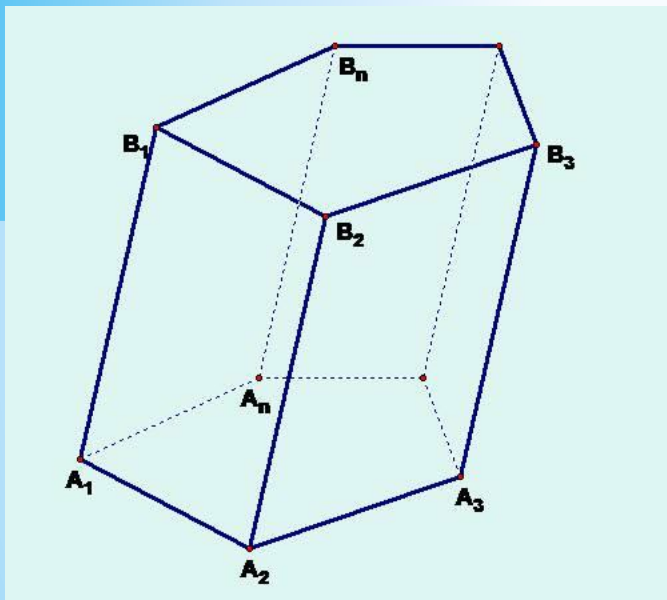
Рис. 1



Многоугольники, ограничивающие многогранник, называются **гранями**, их стороны – **ребрами**, а вершины – **вершинами** многогранниками

Призма

Призмой называется многогранник, у которого две грани – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами (**основаниями** призмы), все остальные грани (**боковые**) **пересекаются** по параллельным прямым.



Ребра оснований называются **сторонами** оснований, общие ребра боковых граней – **боковыми** ребрами.

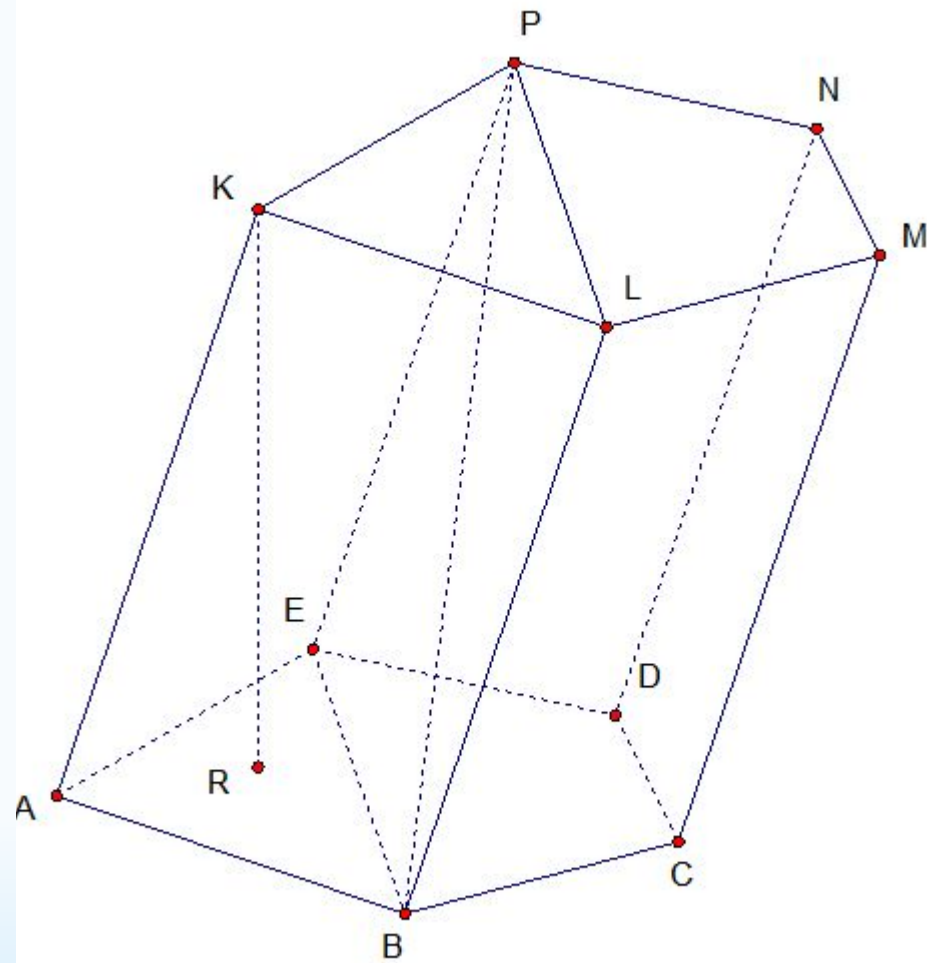
Боковые ребра призмы равны между собой, боковые грани являются **параллелограммами**.

Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не лежащие в одной грани, называются **диагональю** призмы (PB)

Перпендикуляр, опущенный из точки одного основания на плоскость другого основания называется **высотой** призмы (h -KR).

Плоскость, проходящая через два боковых ребра призмы, не лежащих в одной грани, называется **диагональной плоскостью**. (EPLB)

Пересечение призмы и плоскости, перпендикулярной её боковому ребру называется **перпендикулярное (ортогональное) сечение**



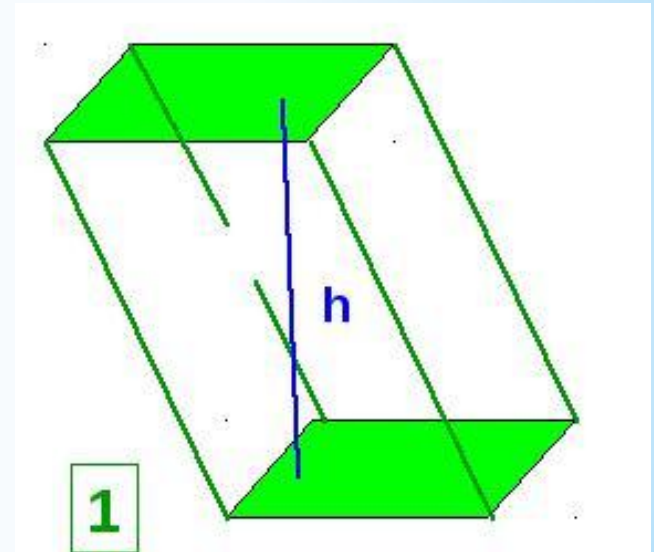
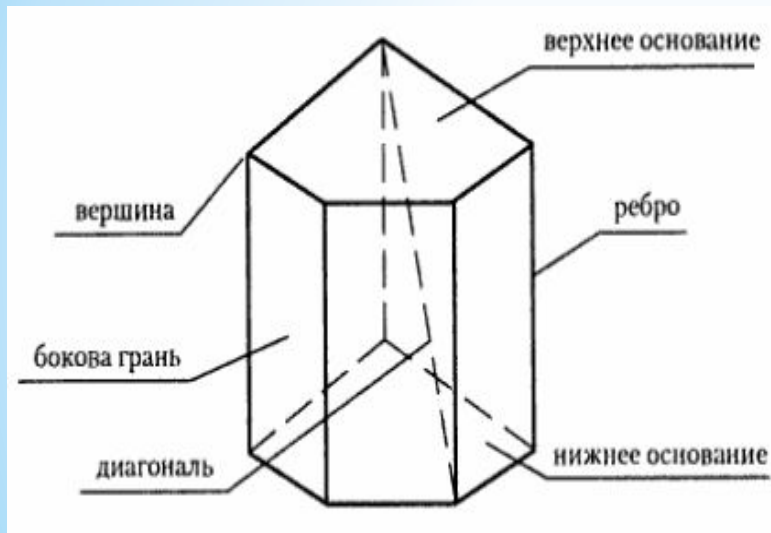
Свойства призмы

1. Боковые ребра призмы параллельны и равны.
2. Перпендикулярное сечение перпендикулярно ко всем боковым рёбрам призмы.
3. Углы перпендикулярного сечения — это линейные углы двугранных углов при соответствующих боковых рёбрах.
4. Перпендикулярное сечение перпендикулярно ко всем боковым граням

Призма

Прямая

Наклонная



Призму называют **прямой**, если плоскости боковых граней перпендикулярны к плоскостям оснований

Боковые грани прямой призмы - **прямоугольник**

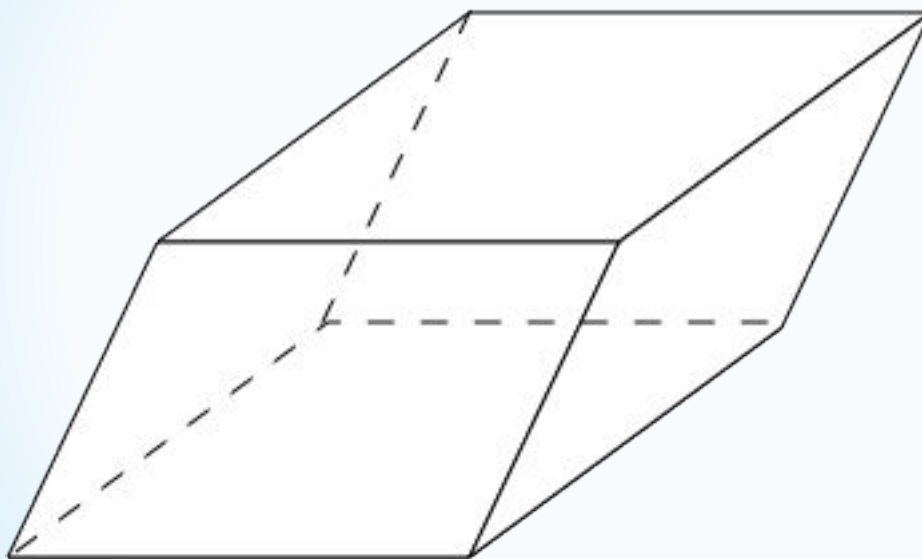
Непрямая призма называется **наклонной**



Прямую призму называют **правильной**, если основанием её служит правильный многоугольник

Параллелепипед.

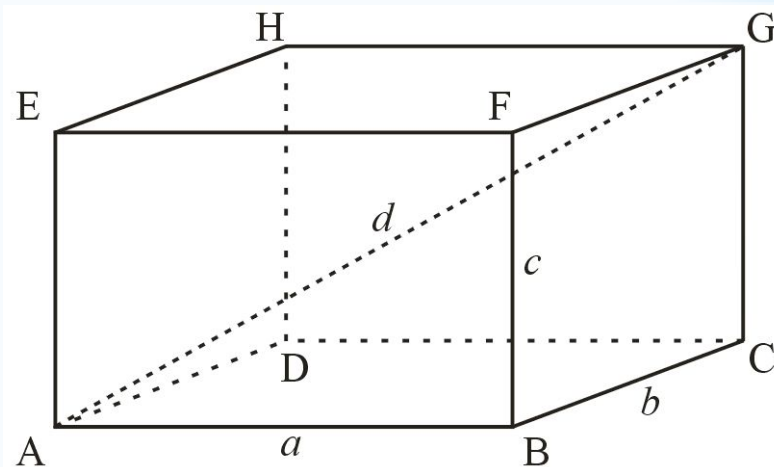
Призма, основанием которой является параллелограммы (их у него шесть), называется параллелепипедом .



Грани параллелепипеда, не имеющих общих вершин, называются **противолежащими**.

Типы параллелепипеда

Прямоугольный параллелепипед — объёмная фигура, у которой шесть граней, и каждая из них является прямоугольником.

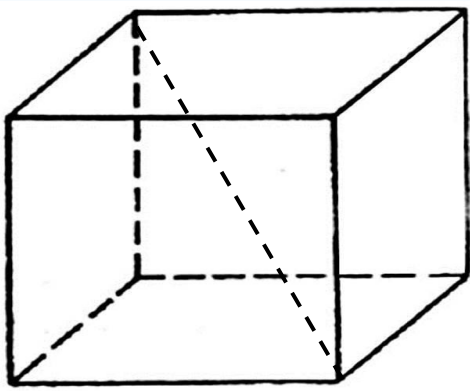


Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Куб

Прямоугольный параллелепипед с равными измерениями называется **кубом**. Все шесть граней куба — равные **квадраты**



Квадрат диагонали куба равен утроенному произведению квадратов его ребер

$$d^2 = 3a^2$$

Площади призмы

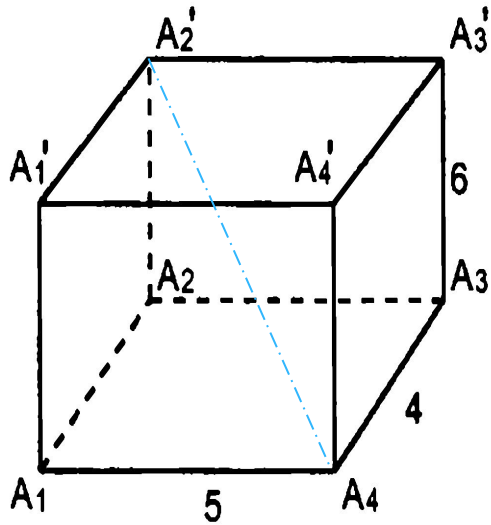
$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot l$$

где $P_{\text{осн}}$ - периметр основания,
 l - ребро призмы

$$S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$$

Правильная призма	Площадь боковой поверхности	Площадь основания	Площадь полной поверхности
Треугольная призма	$3ah$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = a\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + 3h\right)$
Четырехугольная призма	$4ah$	a^2	$2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2a(a + 2h)$
Шестиугольная призма	$6ah$	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 3a(a\sqrt{3} + 2h)$

*Решение задач по теме:
«Призма и его виды»*



Дано: $A_1A_2A_3A_4$ -прямоугольник

$$A_1A_4=5, \quad A_3A_4=4, \quad A_3'A_3=6$$

Найти: $A_2'A_4$

Решение:

По свойству имеем:

$$(A_2'A_4)^2 = (A_1A_4)^2 + (A_3A_4)^2 + (A_3'A_3)^2$$

$$(A_2'A_4)^2 = (5)^2 + (4)^2 + (6)^2$$

$$(A_2'A_4)^2 = 25 + 16 + 36$$

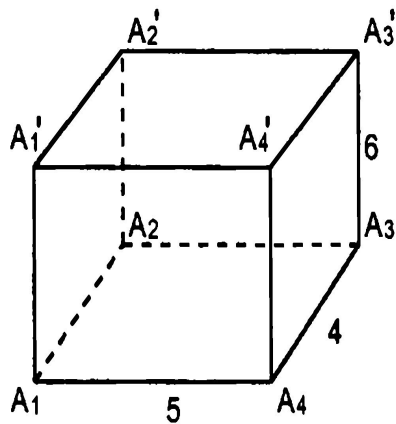
$$(A_2'A_4)^2 = 77$$

$$A_2'A_4 = \sqrt{77}$$

1. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны: 1,1,2

2. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны: 8,9,12

3. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны: 12,16,21



Дано: $A_1A_2A_3A_4$ -прямоугольник

$$A_1A_4=5, \quad A_3A_4=4, \quad A'_3A_3=6$$

Найти: $S_{\text{бок}}$, $S_{\text{полн.}}$

Решение:

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot l \quad P_{\text{осн}} = 2(A_1A_4 + A_4A_3)$$

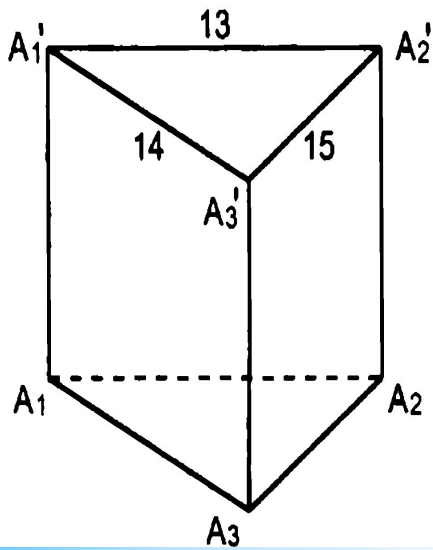
$$P_{\text{осн}} = 2(5 + 4) = 2 \cdot 9 = 18$$

$$S_{\text{бок}} = 18 \cdot 6 = 108$$

$$S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} \quad S_{\text{осн}} = A_1A_4 \cdot A_4A_3$$

$$S_{\text{осн}} = 5 \cdot 4 = 20$$

$$S_{\text{полн}} = 2 \cdot 20 + 108 = 40 + 108 = 148$$



Дано: $A_1A_2A_3$ –призма, $A_1A_2=13$,
 $A_1A_3=14$, $S_{\text{полн}}=378$ $A_3A_2=15$,

Найти: A'_1A_1

Решение:

$$S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$$

$$2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 378$$

$$S_{\text{осн}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} \quad p = \frac{15+14+13}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

$$S_{\text{осн}} = \sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)}$$

$$S_{осн} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$$

$$S_{осн} = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 = 84$$

$$S_{бок} = P_{осн} \cdot l$$

$$P_{осн} = 13 + 14 + 15 = 42$$

$$2 \cdot 84 + 42 \cdot A_1' A_1 = 378$$

$$168 + 42 \cdot A_1' A_1 = 378$$

$$42 \cdot A_1' A_1 = 378 - 168$$

$$42 \cdot A_1' A_1 = 210$$

$$A_1' A_1 = 210 : 42$$

$$A_1' A_1 = 5$$

4. Найдите площади полной и боковой поверхности призмы, если дана правильная треугольная призма, с основанием 10 и боковым ребром 15.
($50\sqrt{3} + 450$)

5. Найдите площади полной и боковой поверхности призмы, если дана правильная четырехугольная призма, с основанием 12 и высотой 8