02.02.21.

Тема:
Геометрический смысл производной. Решение примеров на геометрический смысл производной и составление касательной к графику функции.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала: https://iu.ru/video-lessons/3fdd2954-895b-4d08-8ea2-9170ac3e7dfa

Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

Геометрический смысл производной

Напомним, что графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая (рис. 109). Число $k = \operatorname{tg} \alpha$ называют *угловым коэффициентом* прямой, а угол α — *углом между этой прямой и осью Ox*.

Если $k > 0$, то $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис. 109, *а*); в этом случае функция возрастает.

Если $k < 0$, то $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ (рис. 109, *б*); в этом случае функция $y = kx + b$ убывает.

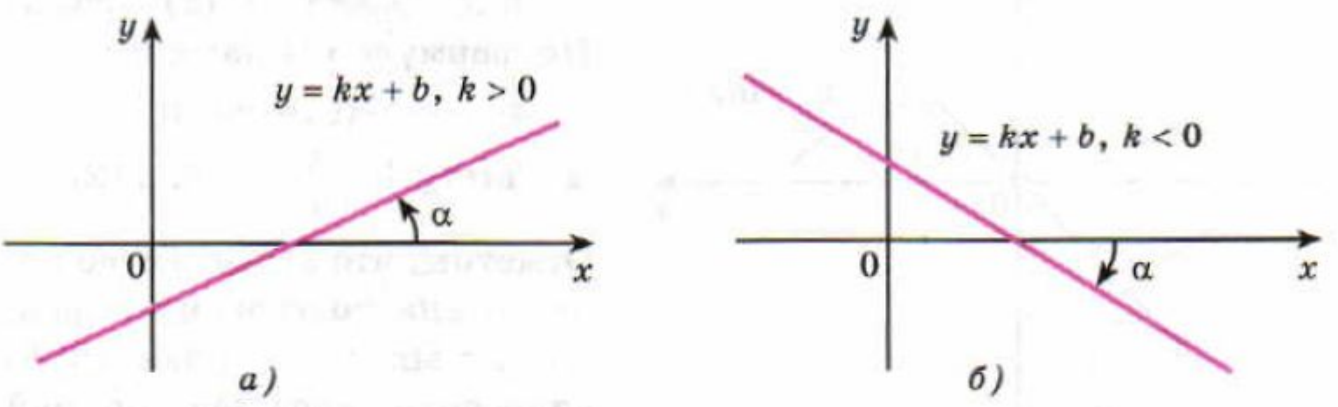

Рис. 109

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции $f(x)$ в точке x равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке $(x; f(x))$.

Задача 1 Найти угол между касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке $(0; 0)$ и осью Ox.

▶ Найдем угловой коэффициент касательной к кривой $y = \sin x$ в точке $(0; 0)$, т. е. значение производной этой функции при $x = 0$. Производная функции $f(x) = \sin x$ равна $f'(x) = \cos x$. По формуле (2) находим

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(0) = \cos 0 = 1,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \quad (\text{рис. } 112). \ \triangleleft$$

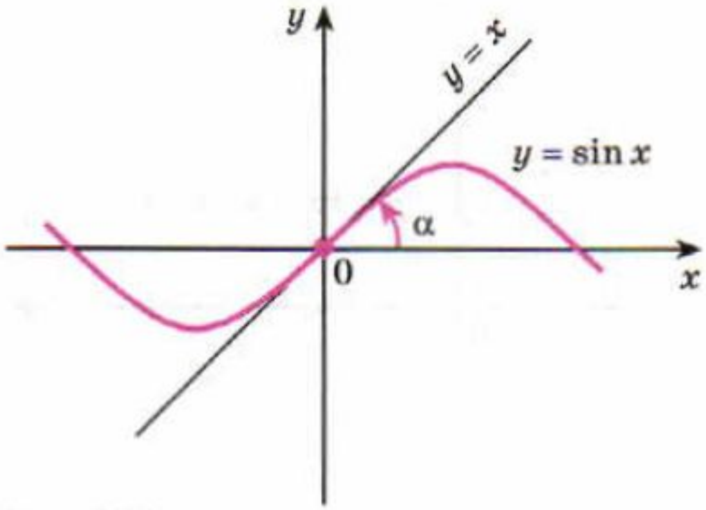

Рис. 112

Отметим, что это свойство полезно для построения графика $y = \sin x$: в точке $(0; 0)$ синусоида касается прямой $y = x$ (рис. 112).

Задача 2 Найти угол между касательной к параболе $y = x^2$ в точке $(1; 1)$ и осью Ox и написать уравнение этой касательной.

▶ Производная функции $f(x) = x^2$ равна $f'(x) = 2x$. По формуле (2) находим $\operatorname{tg} \alpha = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg} 2$ (рис. 113).

Найдём теперь уравнение касательной AB к параболе $y = x^2$ в точке $A(1; 1)$ (см. рис. 113). Если $y = kx + b$ — уравнение прямой AB, то $k = \operatorname{tg} \alpha = 2$, т. е. уравнение касательной имеет вид $y = 2x + b$. Подставляя в это уравнение координаты точки $(1; 1)$, получаем $1 = 2 \cdot 1 + b$, откуда $b = -1$. Следовательно, $y = 2x - 1$ — уравнение искомой касательной. $\triangleleft$

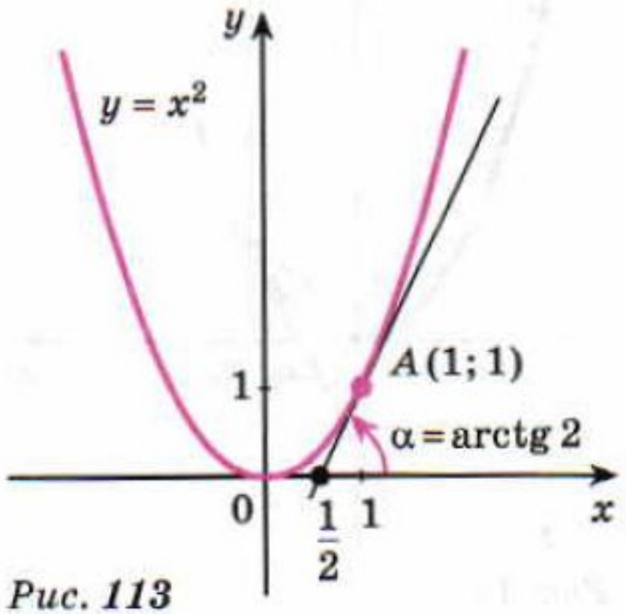

Рис. 113

уравнение касательной

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad \circ \qquad (3)$$

Задача 3 Найти уравнение касательной к графику функции $y = \cos x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

▶ Найдём значения функции $f(x) = \cos x$ и её производной в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$:

$$f(x_0) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f'(x_0) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

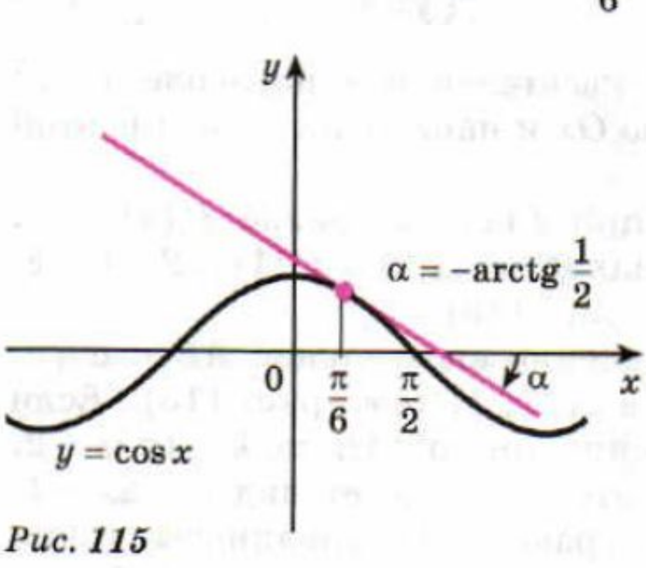

Рис. 115

Используя формулу (3), найдём искомое уравнение касательной: $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$,

или $y = -\frac{1}{2}x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$. ◁

Касательная к графику функции $y = \cos x$ в точке $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ изображена на рисунке 115.

Практическая часть.

858 Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

3) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$;

859 Найти угол между касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью Ox:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x_0 = 3$; 4) $f(x) = \frac{18}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 3$;

860 Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^2 + x + 1$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = x - 3x^2$, $x_0 = 2$;