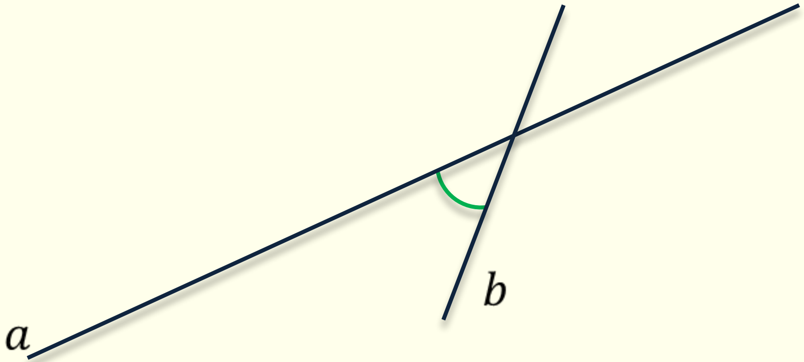
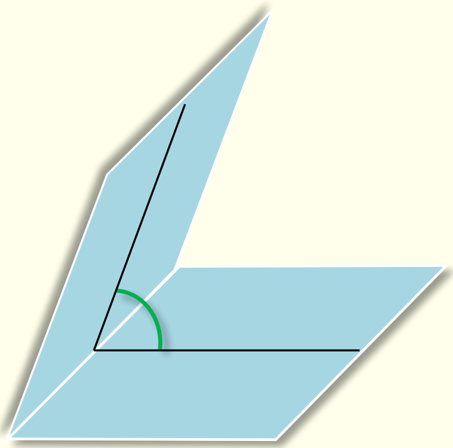
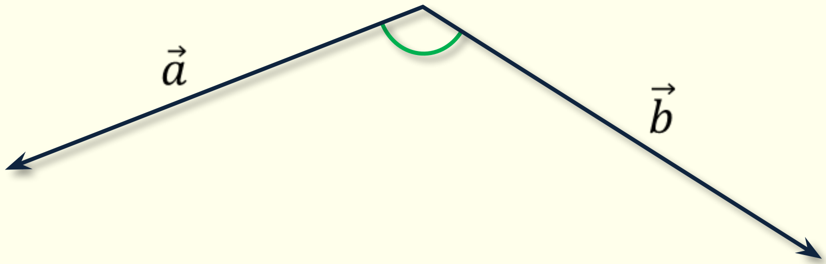
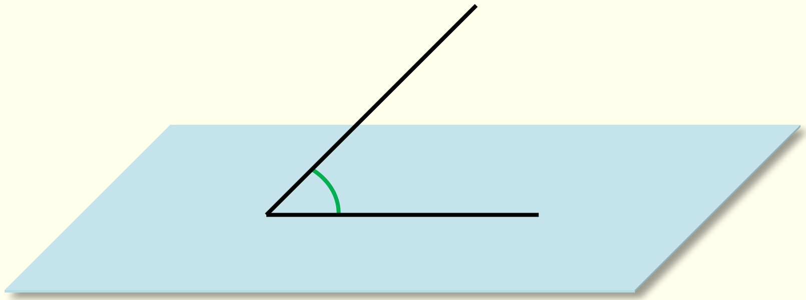
Вычисление углов между прямыми и плоскостями


b
a

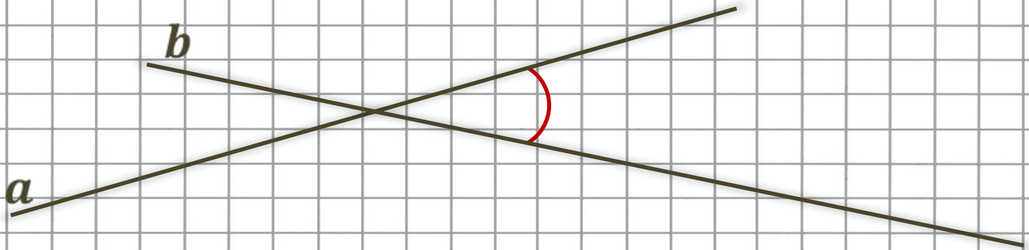



$\vec{a}$
$\vec{b}$

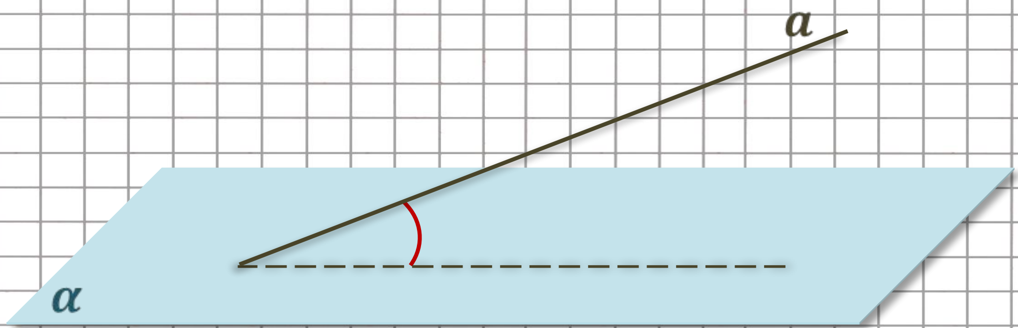


Сегодня на уроке:

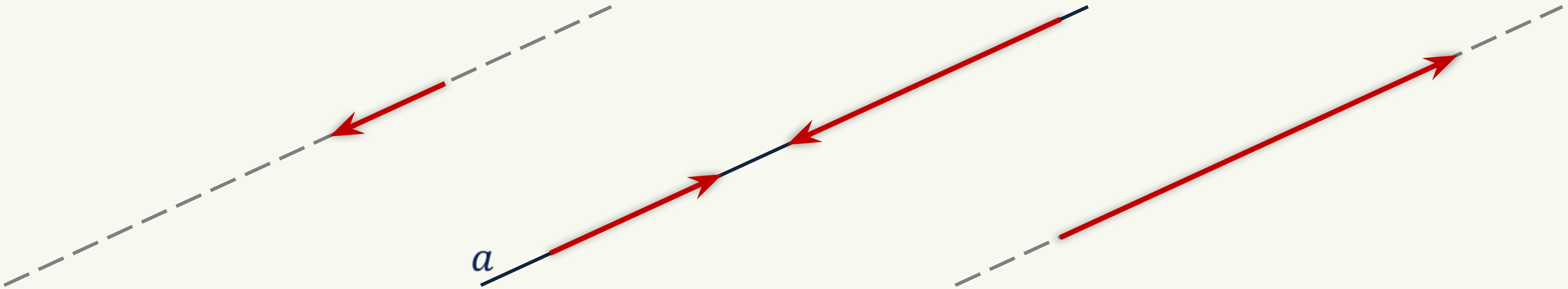
✔ Вычисление угла между прямыми.



✔ Вычисление угла между прямой и плоскостью.



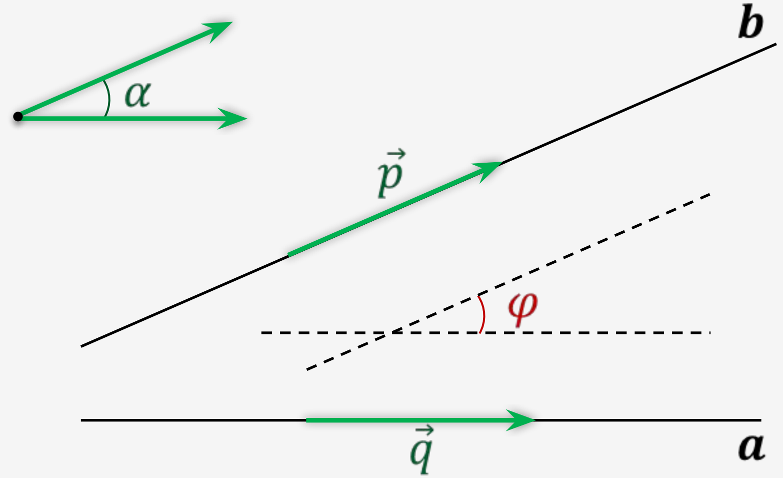
<u>Ненулевой</u> вектор называется **направляющим вектором прямой *a***,
если он лежит либо на прямой a, либо на прямой, параллельной прямой a.

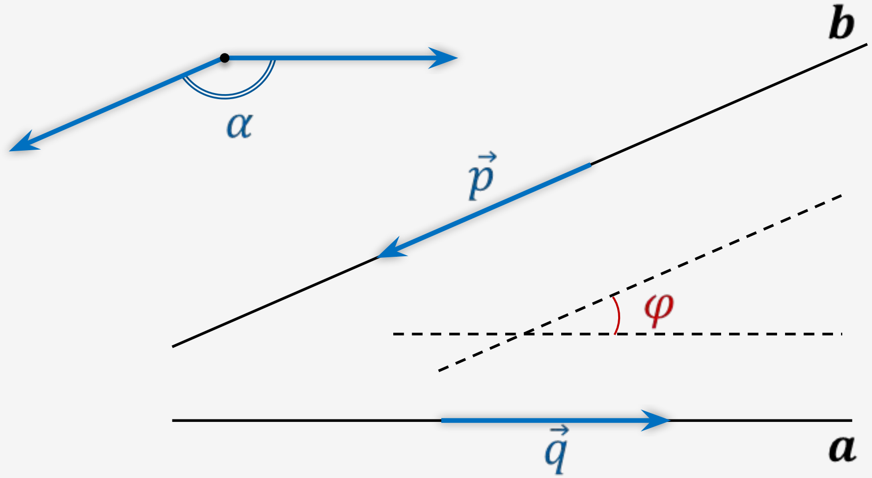


!!! Все <u>направляющие векторы</u> прямой **коллинеарны** друг другу.

✔ Вычисление угла между прямыми.

$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$





$\varphi = \alpha$

$$\cos\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

$= 180° - \alpha$

$\cos\varphi = \cos\alpha$

$\cos\varphi = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

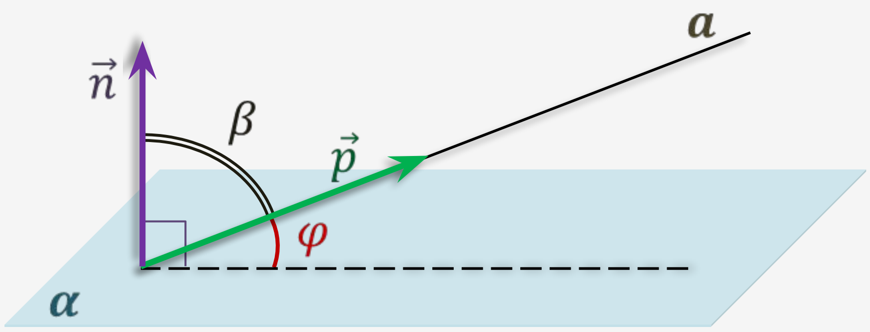
$$\cos\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

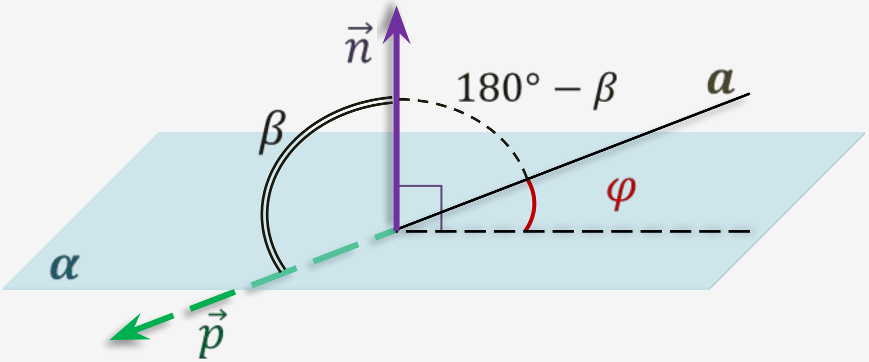
$$\cos\varphi = -\frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$

$\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$

✔ Вычисление угла между прямой и плоскостью.





$\varphi + \beta = 90°$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}}$$

$\varphi + (180° - \beta) = 90°$

$$\sin\varphi = \cos\beta$$

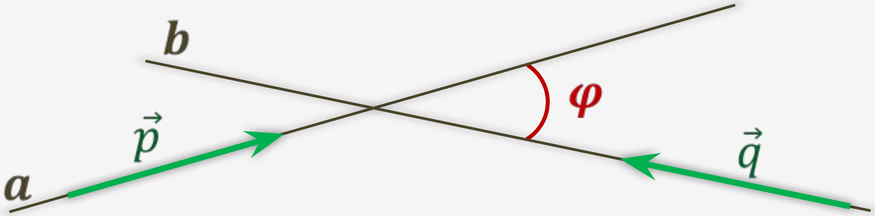
$$\sin\varphi = \cos(180° - \beta) = -\cos\beta$$

$$\sin\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

$$\sin\varphi = -\frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

✔ Вычисление угла между прямыми.

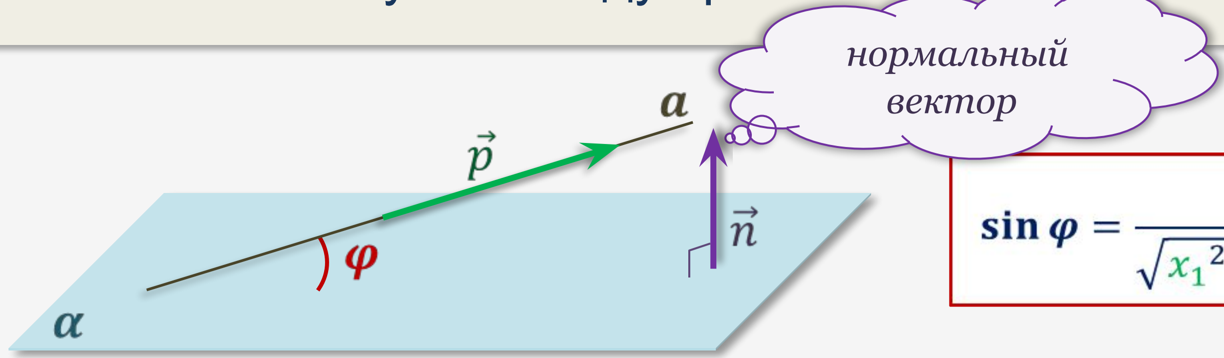
$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$



$$\cos\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

✔ Вычисление угла между прямой и плоскостью.

$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$
$\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$



$$\sin\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Задача. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, где $AB = BC = \frac{1}{2}AA_1$.
Найти $\angle(BD; CD_1)$ и $\angle(AC; AC_1)$.

Решение.

$$\cos\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2} \cdot \sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2}}$$

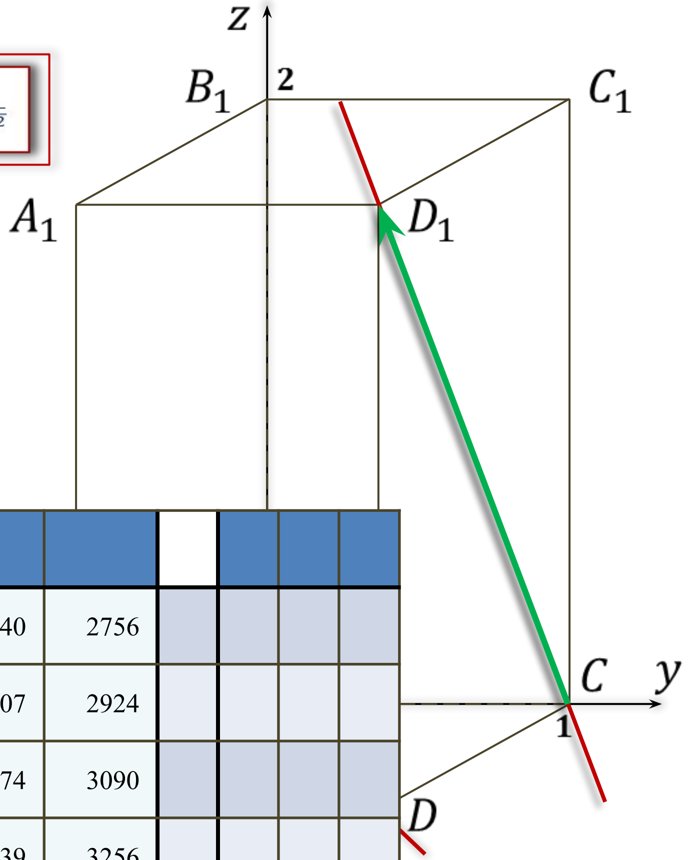
$B(0; 0; 0)$, $D(1; 1; 0)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{BD}\,\{1 - 0; 1 - 0; 0 - 0\}$

$C(0; 1; 0)$, $D_1\ (1; 1; 2)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{CD_1}\,\{1 - 0; 1 - 1; 2 - 0\}$

$$\cos\angle(BD; CD_1) = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}3162$$

$\angle(BD; CD_1) \approx 71°34'$

$$\cos\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2} \cdot \sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2}}$$



	0,2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756			
	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924			
	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090			
	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256			
	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	0,3420			

Задача. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, где $AB = BC = \frac{1}{2}AA_1$.

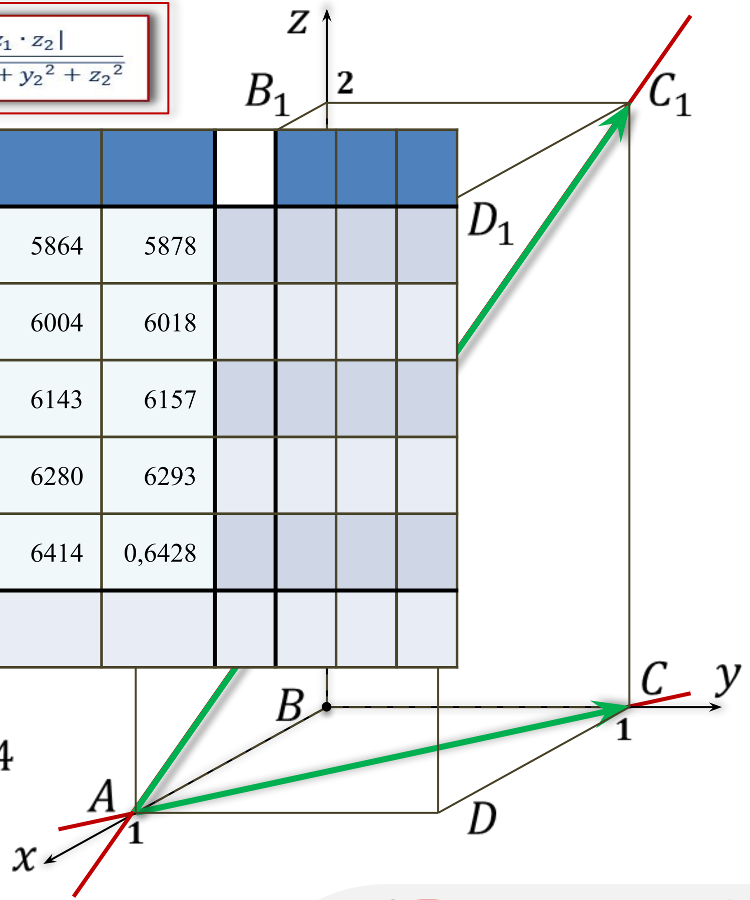
Найти $\angle(BD; CD_1)$ и $\angle(AC; AC_1)$.

$$\cos\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2} \cdot \sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2}}$$

Решение.

	0,5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878				
	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018				
	6018	6032	6040	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157				
	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293				
	6293	6307	6320	633[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]01	6414	0,6428				

$\overrightarrow{AC}\ \{0 - 1; 1 - 0; 0 - 0\}$



$$\cos\angle(AC; AC_1) = \frac{|-1\cdot(-1)+1\cdot 1+0\cdot 2|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,5774$$

$\angle(AC; AC_1) \approx 54°44'$

Задача. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, где $AB = BC = \frac{1}{2}AA_1$. Найти $\angle(BD; CD_1)$ и $\angle(AC; AC_1)$.

$$\cos\varphi = \frac{|x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2|}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}\cdot\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2}}$$

Решение.

$B(0;0;0),\ D(1;1;0) \ \Longrightarrow\ \overrightarrow{BD}\,\{1;1;0\}$

$C(0;1;0),\ D_1\ (1;1;2) \ \Longrightarrow\ \overrightarrow{CD_1}\,\{1;0;2\}$

$$\cos\angle(BD;CD_1) = \frac{|1\cdot1+1\cdot0+0\cdot2|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}3162$$

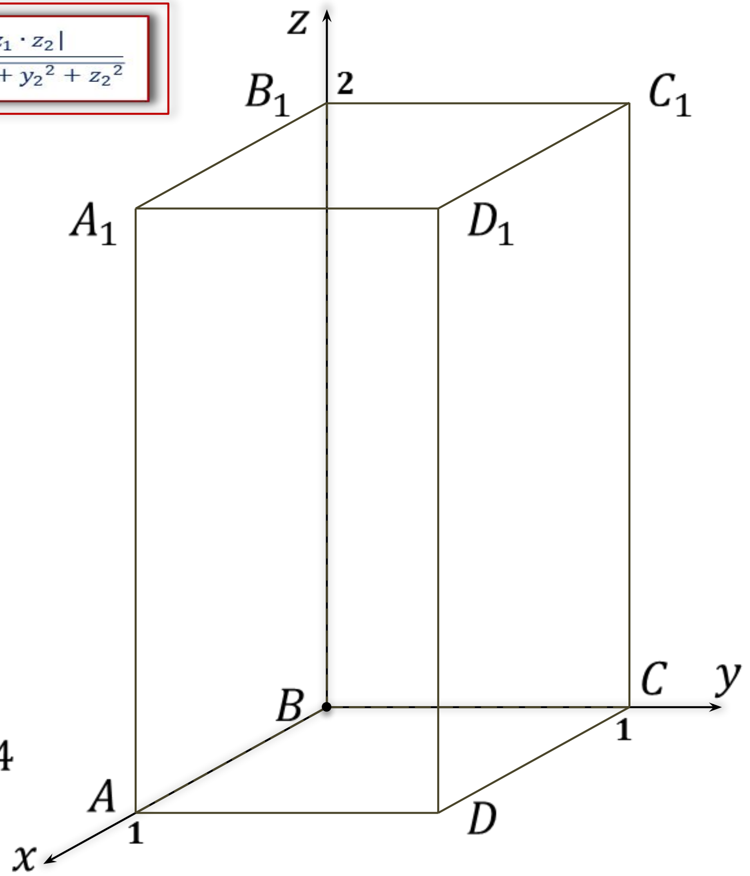
$\angle(BD;CD_1) \approx 71°34'$

$A(1;0;0),\ C(0;1;0) \ \Longrightarrow\ \overrightarrow{AC}\,\{-1;1;0\}$

$A(1;0;0),\ C_1\ (0;1;2) \ \Longrightarrow\ \overrightarrow{AC_1}\,\{-1;1;2\}$

$$\cos\angle(AC;AC_1) = \frac{|-1\cdot(-1)+1\cdot1+0\cdot2|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}5774$$

$\angle(AC;AC_1) \approx 54°44'$



Задача. $ABCD$ – тетраэдр.
$\angle ABD = \angle ABC = \angle DBC = 90°$. $AB = BD = 2$, а $BC = 1$.
Вычислить синус угла между прямой, проходящей через середины рёбер AD и BC
а) ABD; б) DBC; в) ABC.

$$\sin\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

Решение.

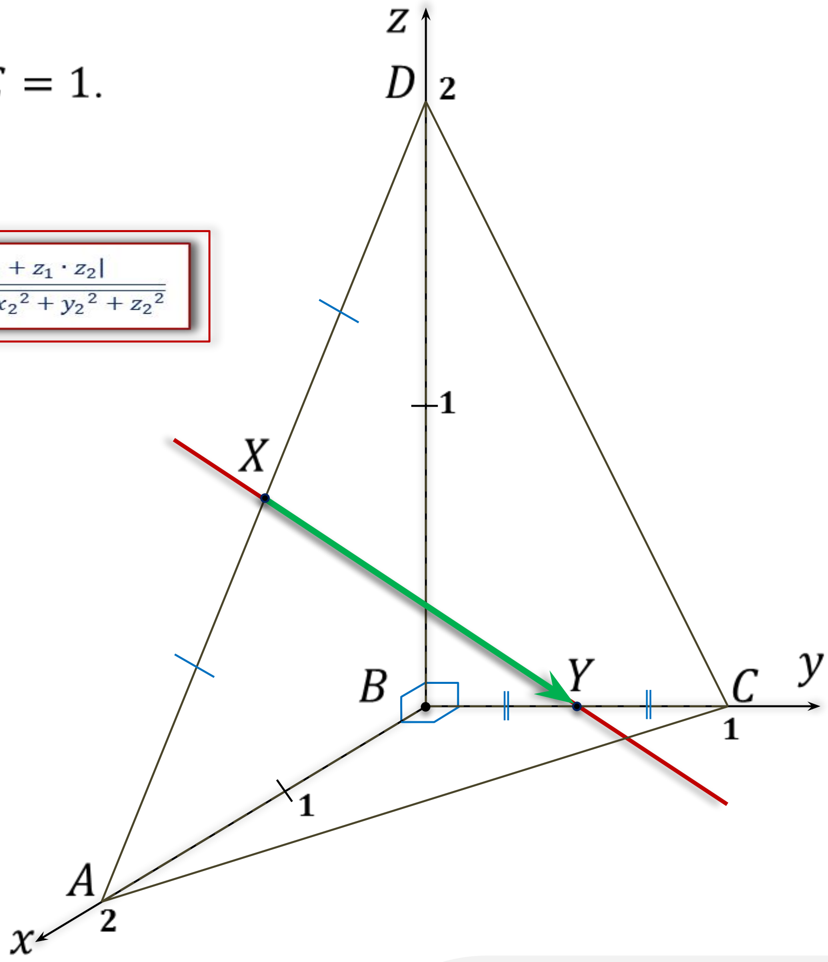
$\overrightarrow{XY}$ – направляющий вектор прямой XY

$A(2;0;0)$, $D(0;0;2)$ $\Rightarrow$ $X(1;0;1)$

$B(0;0;0)$, $C(0;1;0)$ $\Rightarrow$ $Y(0;0{,}5;0)$

$\overrightarrow{XY}\ \{0-1; 0{,}5-0; 0-1\}$

$\overrightarrow{XY}\ \{-1; 0{,}5; -1\}$



Задача. $ABCD$ – тетраэдр.
$\angle ABD = \angle ABC = \angle DBC = 90°$. $AB = BD = 2$, а $BC = 1$.
Вычислить синус угла между прямой,
проходящей через середины рёбер AD и BC, и плоскостью:
а) ABD; б) DBC; в) ABC.

$$\sin\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

Решение.

$\overrightarrow{XY}\ \{-1; 0{,}5; -1\}$

а) $\vec{j}\ \{0; 1; 0\} \perp ABD$

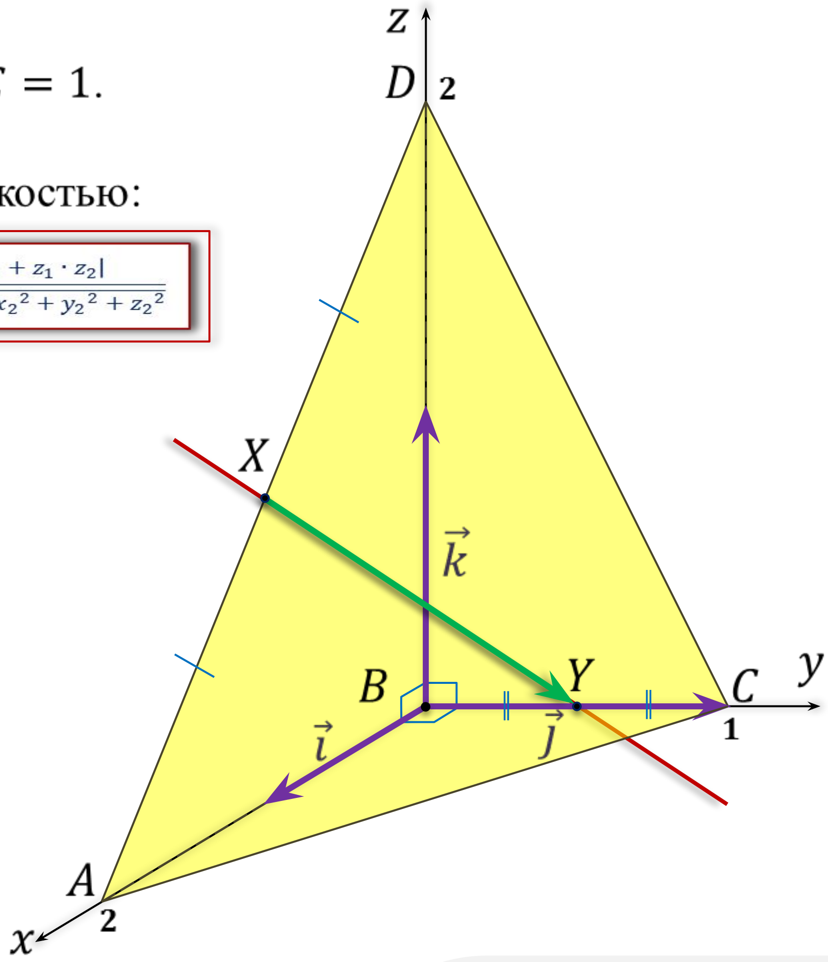
$\sin\angle(XY; ABD)$

б) $\vec{i}\ \{1; 0; 0\} \perp DBC$

$\sin\angle(XY; DBC)$

в) $\vec{k}\ \{0; 0; 1\} \perp ABC$

$\sin\angle(XY; ABC)$



Задача. Доказать, что угол между скрещивающимися прямыми, одна из которых содержит диагональ куба, а другая — диагональ грани куба, равен 90°.

Решение.

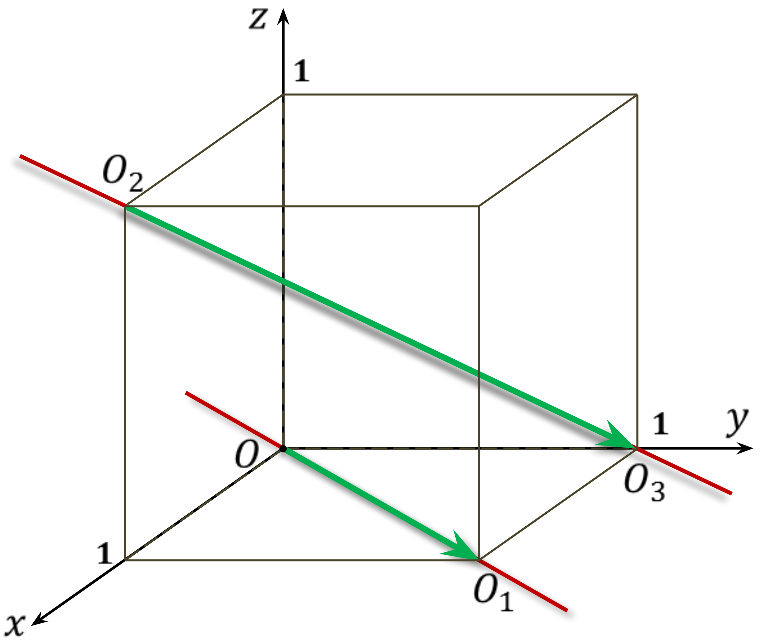
$O(0;0;0)$, $O_1(1;1;0)$

$O_2(1;0;1)$, $O_3(0;1;0)$

$$\cos\varphi=\frac{|x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2|}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}\cdot\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2}}$$

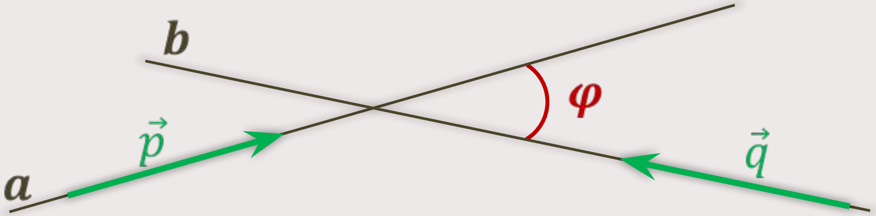
$$\cos\angle(OO_1;O_2O_3)=\frac{|1\cdot(-1)+1\cdot 1+0\cdot(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}}$$

$$\Rightarrow\quad \angle(OO_1;O_2O_3)=90°$$



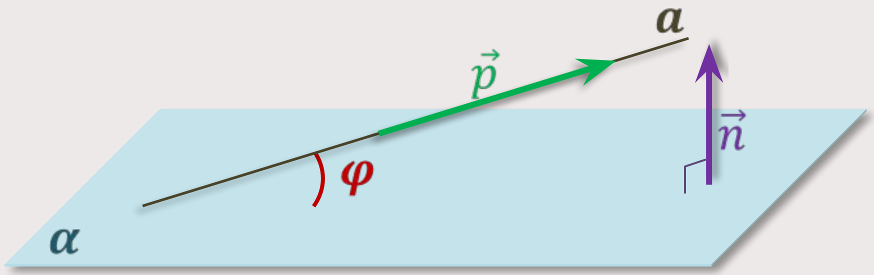
Что и требовалось доказать.

Вычисление углов между прямыми и плоскостями



$\vec{p}\,\{x_1; y_1; z_1\}$ $\quad$ $\vec{q}\,\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\cos\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2} \cdot \sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2}}$$



$\vec{p}\,\{x_1; y_1; z_1\}$ $\quad$ $\vec{n}\,\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\sin\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2} \cdot \sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2}}$$