

Решение уравнения

Евтушенко Ирина Ивановна

Доклад на РМО математиков

2009 год

Г. Дальнегорск

Приморский край

*Равенство вида $f(x)=g(x)$,
уравнение с одним
неизвестным.*

*Число a называется
корнем уравнения если
обе части уравнения
определены при $x=a$
равенство $f(a)=g(a)$
является верным.*

*Решить уравнение –
значит найти все его
корни или доказать, что
корней нет.*

В процессе решения часто приходится преобразовывать уравнение, заменяя его более простым. *Нельзя выполнять преобразования, которые приводят к потере корня.*

Определение.

Уравнения $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ называются равносильными, если совпадают множества их корней.

Теоремы о равносильности уравнений

Теорема 1. Если какой-нибудь член уравнения перенести из одной части уравнения в другую со знаком минус, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части уравнения возвести в одну нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 3. Уравнение $af(x) = ag(x)$ ($a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Теорема 4. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ умножить на выражение $h(x)$, которое имеет смысл всюду в ОДЗ уравнения $f(x) = g(x)$ и нигде в этой области не обращается в 0, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 5. Если обе части уравнения неотрицательны в области определения уравнения, то при возведении обеих частей уравнения в четную степень получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 6. Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($a > 0, a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

*Общие приемы
решения уравнений*

Метод разложения на множители

Этот метод заключается в том, что уравнение $f(x)g(x)h(x) = 0$ можно заменить совокупностью уравнений $f(x) = 0$; $g(x) = 0$; $h(x) = 0$.

Решив уравнения совокупности нужно взять только те решения, которые принадлежат области определения исходного уравнения, а остальные корни отбросить.

Метод замены переменной

Этот метод заключается в том, что если уравнение $f(x) = 0$ сводится к уравнению $h(g(x)) = 0$, то нужно ввести новую переменную $u = g(x)$, затем решить уравнение $h(u) = 0$, а в конце решить совокупность уравнений $g(x) = u_1$; $g(x) = u_2$; ...; $g(x) = u_n$, где u_1, \dots, u_n — корни уравнения $h(u) = 0$.

Использование свойств функций

Пусть у нас имеется уравнение $f(x) = g(x)$.

Если одна из функций возрастает, а другая убывает, то исходное уравнение либо не имеет корней, либо имеет единственный корень, который иногда легко угадывается

Использование графиков

Суть метода использования графиков для решения уравнения $f(x) = g(x)$ проста: нужно построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и найти все точки их пересечения, абсциссы которых и будут являться корнями нашего исходного уравнения.

Показательные уравнение

Основным методом решения показательных уравнений является сведение уравнения с помощью различных преобразований правой и левой частей к простейшему показательному уравнению — к уравнению вида $ax = b$.

Это уравнение решается по стандартной схеме в зависимости от знака правой части, а именно:

- 1) Если $b < 0$, то уравнение не имеет решений в силу того, что показательная функция $y = ax$ принимает только неотрицательные значения.
- 2) Если $b > 0$, то уравнение имеет единственное решение — $x = \log_a b$.

Уравнение с иррациональностью

Основным методом решения уравнения с иррациональностью является приведение уравнения с помощью различных преобразований правой и левой частей уравнения к простейшему иррациональному уравнению, то есть к уравнению вида

$$f(x)=g(x).$$

Это уравнение эквивалентно системе вида

$$\begin{aligned}g(x) &\geq 0, \\ f(x) &\geq g(x)^2\end{aligned}$$

**По результатам ЕГЭ 2008 года
выявились недочеты при выполнении
работы.**

Оказалось что выпускники, получившие оценку «3»:

не научились решать иррациональные и тригонометрические уравнения

$$\sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{7x^2 - 24} = -x$$

Проиллюстрируем конкретными примерами, какие недочеты выявились у «хорошистов» при выполнении заданий повышенного уровня сложности. Они успешно справляются с решением уравнений (показательных, логарифмических и иррациональных) методом замены (см. примеры 1-2).

Пример 1. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите их произведение.) 41%

Пример 2. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.) 31%

$$2^x - 4 \cdot (\sqrt{2})^x - 32 = 0$$

$$\log_3 x + 8 \cdot \sqrt{\log_3 x} - 20 = 0.$$

Более низкие результаты показаны этими учащимися при выполнении «похожего» уравнения (см. пример 3).

Пример 3. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите их сумму.) 19%

$$\sqrt[3]{17x + 13} + (17x + 13)^{\frac{1}{6}} - 6 = 0$$

Это наблюдение подтверждается и при анализе результатов выполнения заданий повышенного уровня с развернутым ответом (С1-С2).

Как и в 2007 году, выпускники 2008 года, показавшие отличный уровень подготовки, справляются со всеми заданиями базового уровня сложности, а также со всеми заданиями повышенного уровня сложности. Из них от 80% до 97% выполняют верно задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и от 78% до 92% – правильно решают задания повышенного уровня сложности с развернутым ответом. Выборочная перепроверка работ выявила ошибки и недочеты, которые допускают выпускники, приступающие к выполнению этих заданий. В 2008 г. были включены задания, где нужно было найти наибольшее (наименьшее) значение функции и текстовая задача, для решения которой нужно было составить модель-уравнение

Предлагаем вам решение тех
уравнений в которых были
допущены ошибки.