Решение уравнений

Евтушенко Ирина Ивановна

Доклад на РМО математиков

2009 год

Г. Дальнегорск

Приморский край

Равенство вида $f(x)=g(x)$, уравнение с одним неизвестным.

Число а называется корнем уравнения если обе части уравнения определены при $x=a$ равенство $f(a)=g(a)$ является верным.

Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

В процессе решения часто приходится преобразовывать уравнение, заменяя его более простым. *Нельзя выполнять преобразования, которые приводят к потере корня.*

Определение. Уравнения $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ называются равносильными, если совпадают множества их корней.

Теоремы о равносильности уравнений

Теорема 1. Если какой-нибудь член уравнения перенести из одной части уравнения в другую со знаком минус, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части уравнения возвести в одну нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 3. Уравнение $af(x) = ag(x)$ ($a > 0$, a 1) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Теорема 4. ***Если обе части уравнения f(x) = g(x) умножить на выражение h(x), которое имеет смысл всюду в ОДЗ уравнения f(x) = g(x) и нигде в этой области не обращается в 0, то получится уравнение, равносильное данному.***

Теорема 5. Если обе части уравнения неотрицательны в области определения уравнения, то при возведении обеих частей уравнения в четную степень получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 6. Если f(x) > 0 и g(x) > 0, то уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (a > 0, a1) равносильно уравнению f(x) = g(x).

Общие приемы решения уравнений

Метод разложения на множители

Этот метод заключается в том, что уравнение $f(x)g(x)h(x) = 0$ можно заменить совокупностью уравнений $f(x) = 0$; $g(x) = 0$; $h(x) = 0$.

Решив уравнения совокупности нужно взять только те решения, которые принадлежат области определения исходного уравнения, а остальные корни отбросить.

Метод замены переменной

Этот метод заключается в том, что если уравнение $f(x) = 0$ сводится к уравнению $h(g(x)) = 0$, то нужно ввести новую переменную $u = g(x)$, затем решить уравнение $h(u) = 0$, а в конце решить совокупность уравнений $g(x) = u1$; $g(x) = u2$; …; $g(x) = un$, где $u1$, …, un — корни уравнения $h(u) = 0$.

Использование свойств функций

Пусть у нас имеется уравнение $f(x) = g(x)$.

Если одна из функций возрастает, а другая убывает, то исходное уравнение либо не имеет корней, либо имеет единственный корень, который иногда легко угадывается

Использование графиков

Суть метода использования графиков для решения уравнения $f(x) = g(x)$ проста: нужно построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и найти все точки их пересечения, абсциссы которых и будут являться корнями нашего исходного уравнения.

Показательные уравнение

Основным методом решения показательных уравнений является сведение уравнения с помощью различных преобразований правой и левой частей к простейшему показательному уравнению — к уравнению вида ax = b.

Это уравнение решается по стандартной схеме в зависимости от знака правой части, а именно:

1) Если b, то уравнение не имеет решений в силу того, что показательная функция y = ax принимает только неотрицательные значения.

2) Если b > 0, то уравнение имеет единственное решение — x = logab.

Уравнение с иррациональностью

Основным методом решения уравнения с иррациональностью является приведение уравнения с помощью различных преобразований правой и левой частей уравнения к простейшему иррациональному уравнению , то есть к уравнению вида

$$f(x)=g(x).$$

Это уравнение эквивалентно системе вида

$$g(x)\geq 0,$$

$$f(x)\geq g(x)2$$

По результатам ЕГЭ 2008 года выявились недочеты при выполнении работы.

Оказалось что выпускники, получившие оценку «3»:
не научились решать иррациональные и тригонометрические уравнения

$$\sin\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{7x^2 - 24} = -x$$

Проиллюстрируем конкретными примерами, какие недочеты выявились у «хорошистов» при выполнении заданий повышенного уровня сложности. Они успешно справляются с решением уравнений (показательных, логарифмических и иррациональных) методом замены (см. примеры 1-2).

Пример 1.	(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите их произведение.)	41%
Пример 2.	(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)	31%

$$2^x - 4\cdot\left(\sqrt{2}\right)^x - 32 = 0$$

$$\log_3 x + 8\cdot\sqrt{\log_3 x} - 20 = 0.$$

Более низкие результаты показаны этими учащимися при выполнении «похожего» уравнения (см. пример 3).

Пример 3. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите их сумму.) 19%

$$\sqrt[3]{17x+13}+(17x+13)^{\frac{1}{6}}-6=0$$

Это наблюдение подтверждается и при анализе результатов выполнения заданий повышенного уровня с развернутым ответом (С1-С2).

Как и в 2007 году, выпускники 2008 года, показавшие отличный уровень подготовки, справляются со всеми заданиями базового уровня сложности, а также со всеми заданиями повышенного уровня сложности. Из них от 80% до 97% выполняют верно задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и от 78% до 92% – правильно решают задания повышенного уровня сложности с развернутым ответом. Выборочная перепроверка работ выявила ошибки и недочеты, которые допускают выпускники, приступающие к выполнению этих заданий. В 2008 г. были включены задания, где нужно было найти наибольшее (наименьшее) значение функции и текстовая задача, для решения которой нужно было составить модель-уравнение

Предлагаем вам решение тех уравнений в которых были допущены ошибки.