Приемы решения целых уравнений

Целое уравнение третьей или более высокой степени в отдельных случаях удается решить, используя специальные приемы. Рассмотрим некоторые из них.

Один из приемов решения уравнения вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен, степень которого выше двух, состоит в *разложении многочлена на множители*. С помощью разложения многочлена на множители удается иногда решение уравнения n-й степени, где $n \geqslant 3$, свести к решению уравнений более низких степеней.

Для разложения на множители многочлена третьей или более высокой степени бывает удобно иногда воспользоваться теоремой о корне многочлена.

Теорема. ***Если число а является корнем многочлена $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, где $a_0 \neq 0$, то этот многочлен можно представить в виде произведения $(x - a)\,P_1(x)$, где $P_1(x)$ — многочлен $(n - 1)$-й степени.***

197. Решите уравнение:

а) $x^3 + 9x - 10 = 0$;

197. Решите уравнение:

$m^3 - 5m - 2 = 0;$

Решите уравнение, используя разложение на множители:

$$x^5 + x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 8x + 8 = 0;$$

Для решения целых уравнений третьей или более высокой степени иногда используют известный вам *метод введения новой переменной*. Рассмотрим применение этого метода при решении возвратных уравнений 4-й степени.

Возвратным уравнением называется уравнение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \text{ где } a_0 \neq 0,$$

в котором $a_k = a_{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Возвратное уравнение четвертой степени в общем виде можно записать так:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \text{ где } a \neq 0.$$

Так как число 0 не является его корнем, то такое уравнение можно решить, разделив обе его части на x^2 и введя переменную $y = x + \frac{1}{x}$.

Пример 3. Решим уравнение

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Особенность этого уравнения четвертой степени состоит в том, что коэффициенты, одинаково удаленные от начала и конца, равны между собой. Разделим обе части уравнения на x^2. Это можно сделать, не нарушая равносильности, так как число 0 не является корнем уравнения. Получим

$$x^2 - 2x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Сгруппируем первый член с последним, а второй — с предпоследним и вынесем за скобки во второй группе множитель -2:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

Введем новую переменную $y = x + \frac{1}{x}$. Тогда $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2$, т. е.

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Получаем уравнение

$$(y^2 - 2) - 2y - 1 = 0, \text{ т. е.}$$
$$y^2 - 2y - 3 = 0.$$

Решив его, найдем, что $y_1 = -1$, $y_2 = 3$.
Значит,

$$x + \frac{1}{x} = -1 \text{ или } x + \frac{1}{x} = 3.$$

Первое из этих уравнений не имеет корней, а второе имеет корни $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ и $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. Значит, заданное уравнение $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ имеет корни $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ и $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Решите возвратное уравнение:

а) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$;

в) $4x^4 - 8x^3 - 37x^2 - 8x + 4 = 0$;

ДЗ

1 $x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0.$

2 $y^3 - y^2 - 14y + 24 = 0.$

Решите уравнение, используя разложение на множители:

3 $x^5 - 3x^3 + x^2 - 3 = 0;$

Решите возвратное уравнение:

4 $x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 3x + 1 = 0;$

5 $4x^4 - 8x^3 - 37x^2 - 8x + 4 = 0;$