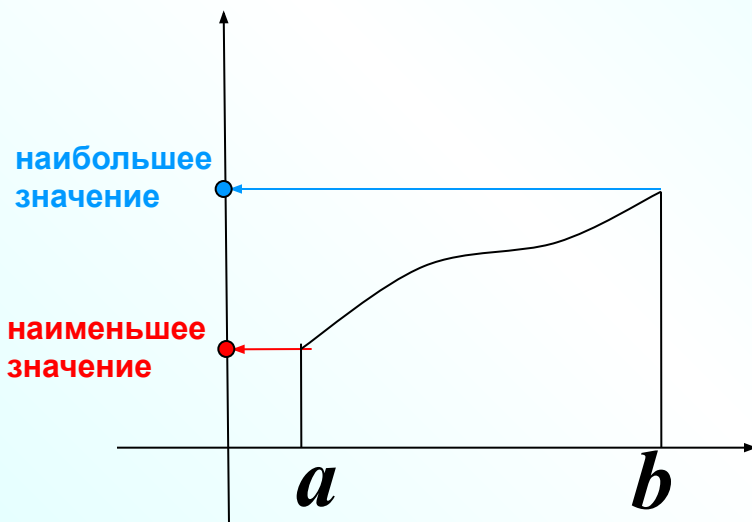


Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

функция возрастает



Предположим, что функция  $f$  не имеет на отрезке  $[a; b]$  критических точек.

Тогда она возрастает (рис. 1) или убывает (рис. 2) на этом отрезке.

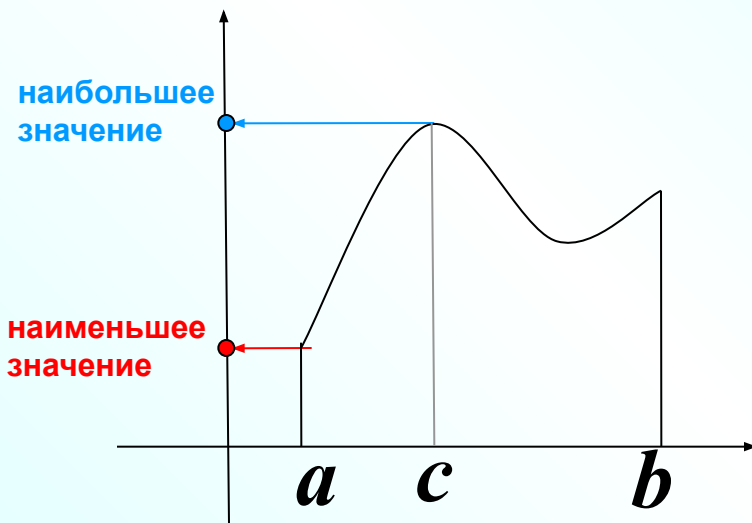
Значит,

наибольшее и наименьшее значения функции  $f$  на отрезке  $[a; b]$  — это значения в концах  $a$  и  $b$ .

функция убывает

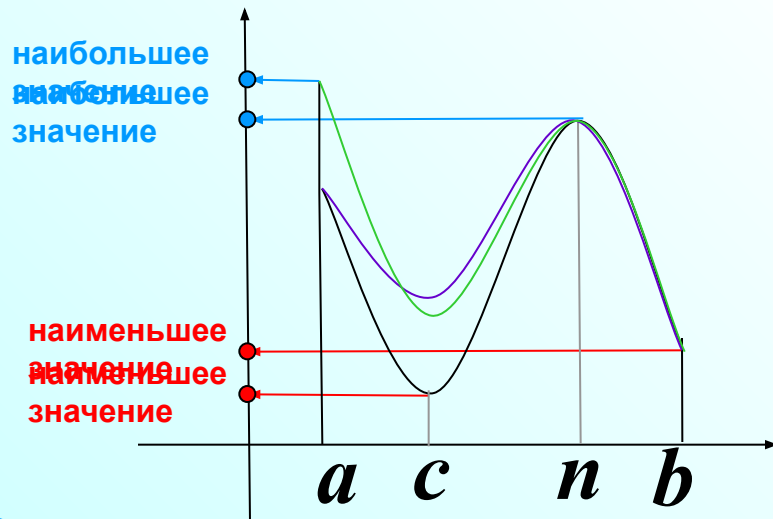


## Примеры




Пусть теперь функция  $f$  имеет на отрезке  $[a; b]$  конечное число критических точек.

Наибольшее и наименьшее значения функция  $f$  может принимать в критических точках функции или в точках  $a$  и  $b$ .



Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

1.

<b>Этапы</b>	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0; 4]$
1. Найти $f'(x)$	1) $y' = 3x^2 - 27$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	2) $y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3)$ $x = 3 \in [0; 4]$ $x = -3 \notin [0; 4]$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	3) $y(0) = 0$ $y(4) = 4^3 - 27 \cdot 4 = -44$ $y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее или наибольшее	 <p>В 11 - 5 4</p>

**Выполнение этапов решения можно изменить, как вам удобно.**

Найдите наименьшее значение функции  $y = x^3 - 27x$  на отрезке  $[0; 4]$

Значения функции в  
концах отрезка.

$$1) y(0) = 0$$

$$y(4) = 4^3 - 27 \cdot 4 = -44$$

Найдем критические  
точки, которые  
принадлежат  
заданному отрезку.

$$2) y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3)$$

$$x = 3 \in [0; 4]$$

$$x = -3 \notin [0; 4]$$

Значения функции в  
критических точках,  
которые принадлежат  
заданному отрезку.

$$y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$$

Выбрать наименьшее из  
полученных значений.

В 11	-	5	4			
------	---	---	---	--	--	--

2. Найдите наибольшее значение функции  $y = x^3 - 3x + 4$  на отрезке  $[-2; 0]$

Значения функции в концах отрезка.

$$1) y(0) = 4$$

$$y(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 4 = 2$$

$$2) y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

$$x = 1 \notin [-2; 0]$$

$$x = -1 \in [-2; 0]$$

$$y(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 4 = 6$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

Выбрать наибольшее из полученных значений.

В 11

6

3. Найдите наименьшее значение функции  $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$  на отрезке  $[1; 4]$

Значения функции в концах отрезка.

$$1) y(1) = 1 - 2 + 1 + 3 = 3$$

$$y(4) = 4^3 - 2 \cdot 4^2 + 4 + 3 = 39$$

$$2) y' = 3x^2 - 4x + 1 = 3(x - 1)(x - \frac{1}{3})$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4$$

$$x_1 = \frac{4+2}{6} = 1 \in [1; 4]$$

$$x_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3} \notin [1; 4]$$

$$y(1) = 3$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку. Выбрать наименьшее из полученных значений.

В 11

3

4. Найдите наибольшее значение функции  $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$  на отрезке  $[-3; 3]$

Значения функции в концах отрезка.

$$y(-3) = \frac{(-3)^3}{3} - 9(-3) - 7 = -9 + 27 - 7 = 11$$

$$y(3) = \frac{3^3}{3} - 9 \cdot 3 - 7 = 9 - 27 - 7 = -25$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = \frac{3x^2}{3} - 9 = x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

$$x = 3 \in [-3; 3]$$

$$x = -3 \in [-3; 3]$$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(-3) = 11$$

$$y(-3) = -25$$

Выбрать наибольшее из полученных значений.

В 11

1 1



5. Найдите наибольшее значение функции  $y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$  на отрезке  $[1; 9]$

Значения функции в концах отрезка.

$$y(1) = 1^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$y(9) = 9^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 9 + 1 = (3^2)^{\frac{3}{2}} - 27 + 1 = 27 - 27 + 1 = 1$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - 3 = \frac{3}{2} \sqrt{x} - 3$$

$$\frac{3}{2} \sqrt{x} - 3 = 0 \quad / \cdot 2$$

$$3\sqrt{x} - 6 = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4 \in [1; 9]$$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(4) = 4^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 4 + 1 = (2^2)^{\frac{3}{2}} - 12 + 1 = 8 - 12 + 1 = -3$$

Выбрать наибольшее из полученных значений.

В 11

1

6. Найдите наименьшее значение функции  $y = x\sqrt{x} - 3x + 1$  на отрезке  $[1; 9]$

Значения функции в концах отрезка.

$$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$$

$$y(1) = 1^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$y(9) = 9^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 9 + 1 = (3^2)^{\frac{3}{2}} - 27 + 1 = 27 - 27 + 1 = 1$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3$$

Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде

$$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$$

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3$$

$$3\sqrt{x} - 6 = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4 \in [1; 9]$$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(4) = 4^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 4 + 1 = (2^2)^{\frac{3}{2}} - 12 + 1 = 8 - 12 + 1 = -3$$

Выбрать наименьшее из полученных значений.

В 11

-


3

7. Найдите наименьшее значение функции  $y = \frac{x^2 + 25}{x}$  на отрезке  $[-10; 1]$

$$y = x + 25 \cdot \frac{1}{x}$$

$$D(y): x \neq 0$$

Значения функции в концах отрезка.



$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

Выбрать наименьшее из полученных значений.

$$y(-10) = -10 + 25 \cdot \frac{1}{-10} = -10 - 2,5 = -12,5$$

$$y(1) = 1 + 25 = 26$$

Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде

$$y' = 1 + 25 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2}$$

$$x = 5 \notin [-10; 1]$$

$$x = -5 \in [-10; 1]$$

$$x = 0 \notin D(y)$$

$$y(-5) = -5 + 25 \cdot \frac{1}{-5} = -5 - 5 = -10$$

В 11

- 1 2 , 5

## Задание 1

Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$  на  $[-4; 6]$  без построения графика.



## Задание 2.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = x^3 - 5x^2 + 7x$  на  $[-1; 2]$  без построения графика.

