

Физика твердой Земли

Лекция №2

Стационарное тепловое поле

Простейшая модель геотермы

Допущения:

- земная кора - однородное полупространство $z > 0$
- в массиве горных пород нет источников тепла.

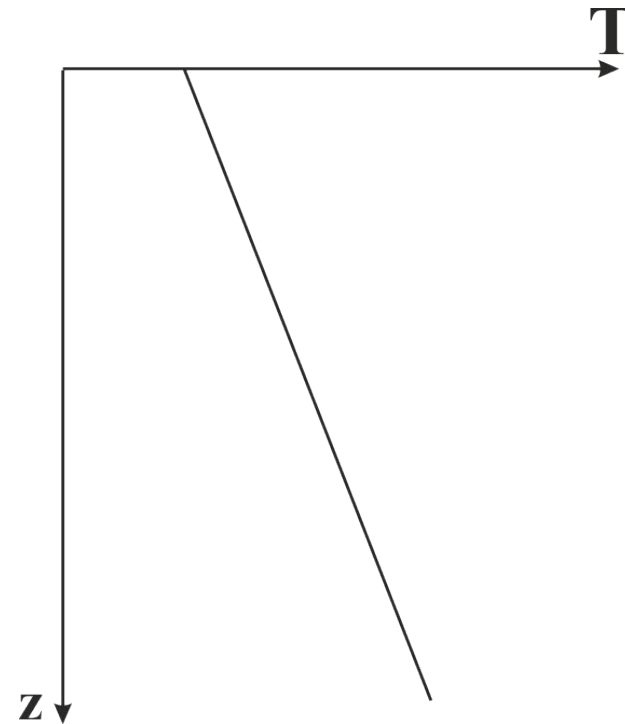
$$\Gamma = \frac{dT}{dz} = \text{const}$$

$$\int dT = \int \Gamma dz$$

$$T(z) = C + \Gamma z$$

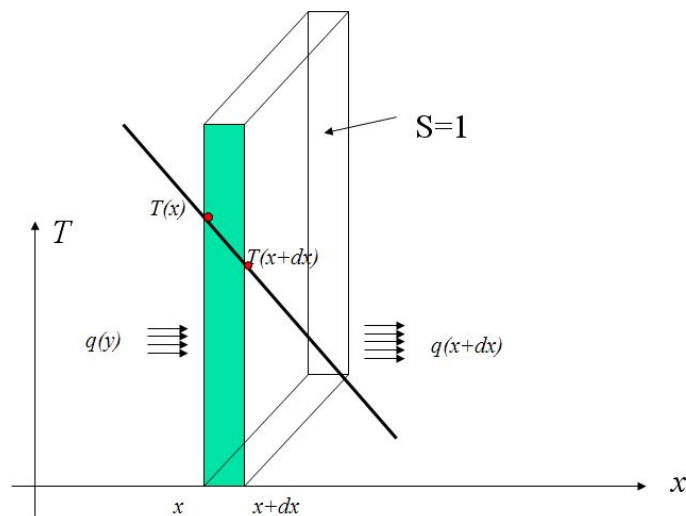
$$C = T_0 - \Gamma z_0$$

$$T(z) = T_0 + \Gamma(z - z_0)$$



Вывод стационарного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$



$$E_1 = q(x)Sdt$$

$$E_2 = q(x+dx)Sdt$$

$$\Delta E = (q(x+dx) - q(x))Sdt$$

Вывод стационарного уравнения теплопроводности

$$\Delta E_{\text{зех}} = mHdt$$

$$m = \rho V$$

$$m = \rho Sdx$$

$$\Delta E_{\text{зех}} = \rho HSdxdt$$

$$q(x + dx) - q(x) = \rho Hdx$$

$$q(x + dx) \approx q(x) + \frac{dq}{dx} dx + \dots$$

$$\frac{dq}{dx} = \rho H(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) + \rho H(x) = 0$$

Запись уравнения в различных системах координат

В декартовых
координатах

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho H(x, y, z) = 0$$

В цилиндрических
координатах

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_r r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda_\varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho H(r, \varphi, z) = 0$$

В сферических
координатах

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_r r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda_\phi \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \\ & + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_\theta \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \rho H(r, \phi, \theta) = 0 \end{aligned}$$

Граничные условия

Граничное условие первого рода

$$T|_{x=x_0} = T_0$$

Граничное условие второго рода

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = -q_0$$

Граничное условие третьего рода

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = AT \Big|_{x=x_0} + B$$

Граничное условие четвертого рода

$$T|_{x-0} = T|_{x+0} \qquad -\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x-0} = -\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+0}$$