

# Числовая последовательность

Преподаватель: Сосновских Е.М.



Функцию вида  $y = f(x)$ ,  $x \in N$  называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают  $y = f(n)$  или  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$ . Иногда для обозначения последовательности используют запись  $(y_n)$ .

**Словесный** способ задания последовательности.

2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

**Аналитический** способ задания последовательности.

$$1) y_n = n^3. \quad 1, 8, 27, 64, \dots, n^3, \dots$$

Если  $n = 9$ , то:

$$y_9 = 9^3,$$

$$y_9 = 729.$$

Если  $y_n = 1331$ , то:

$$n^3 = 1331,$$

$$n = 11.$$

$$2) y_n = C. \quad C, C, C, \dots, C, \dots$$

## Рекуррентный способ задания последовательности.

1) Арифметическая прогрессия — это числовая последовательность  $(a_n)$ , заданная рекуррентно соотношением:  $a_1 = a$ ,  $a_{n+1} = a_n + d$  ( $a$  и  $d$  — заданные числа,  $d$  — разность арифметической прогрессии).

2) Геометрическая прогрессия — это числовая последовательность  $(b_n)$ , заданная рекуррентно соотношениями:  $b_1 = b$ ,  $b_{n+1} = b_n q$  ( $b$  и  $q$  — заданные числа,  $b \neq 0$ ,  $q \neq 0$ ;  $q$  — знаменатель геометрической прогрессии).



Последовательность  $(y_n)$  называют ограниченной сверху, если все её члены не больше некоторого числа.



Последовательность  $(y_n)$  ограничена сверху, если существует число  $M$  такое, что для любого  $n$  выполняется неравенство  $y_n \leq M$ . Число  $M$  называют **верхней границей** последовательности.

Последовательность  $-1, -8, -27, -64, \dots, -n^3, \dots$  ограничена сверху.

Верхняя граница:  $M = -1$  или любое число, которое больше, чем  $-1$ , например,  $0$ .



Последовательность  $(y_n)$  называют ограниченной снизу, если все её члены не меньше некоторого числа.





Последовательность  $(y_n)$  ограничена снизу, если существует число  $m$  такое, что для любого  $n$  выполняется неравенство  $y_n \geq m$ . Число  $m$  называют **нижней границей последовательности**.

Последовательность  $0, 1, 2, 3, 4, \dots, (n - 1), \dots$  ограничена снизу.

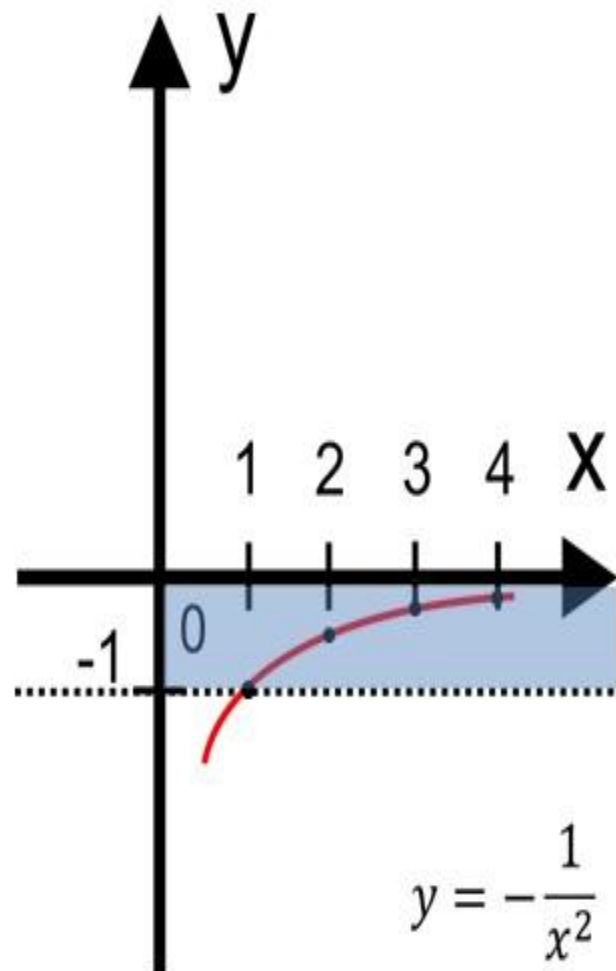
Нижняя граница:  $m = 0$  или любое число меньше 0.

Если последовательность ограничена и сверху, и снизу, то её называют **ограниченной**.

$$-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \dots, -\frac{1}{n^2}, \dots \quad M = 0, \\ m = -1$$

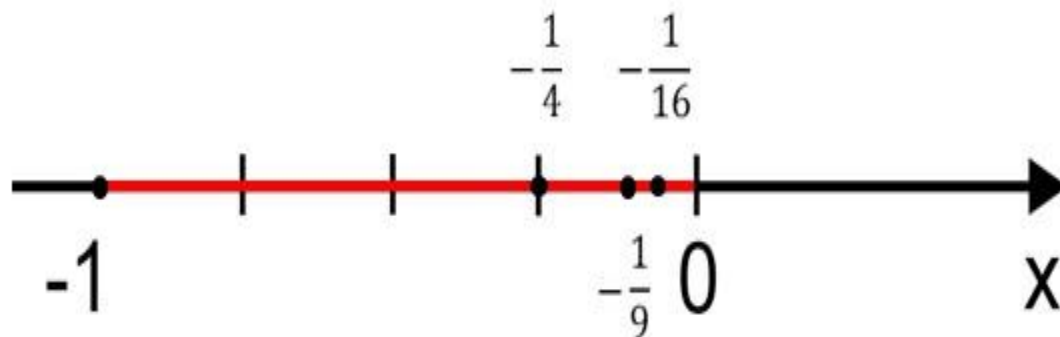
$$y_n = -\frac{1}{n^2};$$

$$y = -\frac{1}{x^2}, x \in \mathbb{N}.$$



Ограниченность последовательности означает, что все члены последовательности (точнее, соответствующие им точки прямой) принадлежат некоторому отрезку.

$$y_n = -\frac{1}{n^2} \quad y_n \in [-1; 0]$$





Последовательность  $(y_n)$  называют  
возрастающей, если каждый ее член больше  
предыдущего:  $y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_n <$   
 $y_{n+1} < \dots$ .

$1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1, \dots$  — возрастающая последовательность.

$$1 < 3 < 5 < 7 < \dots < 2n - 1 < 2(n + 1) - 1 < \dots$$



Последовательность  $(y_n)$  называют убывающей, если каждый её член меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > \dots > y_n > y_{n+1} > \dots$$

$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{2n-1}, \dots$  — убывающая последовательность.

$$1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \dots > \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2(n+1)-1} > \dots$$

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином — **монотонные последовательности**.



1)  $-1, 2, -3, 4, \dots, (-1)^n n, \dots$  — ни возрастающая, ни убывающая (немонотонная) последовательность.

2)  $y_n = 3^n$  — возрастающая последовательность  $(3, 9, 27, 81, 243, \dots)$ .

Если  $a > 1$ , то последовательность  $y_n = a^n$  возрастает.

3)  $y_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$  — убывающая последовательность  $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \dots\right)$ .

Если  $0 < a < 1$ , то последовательность  $y_n = a^n$  убывает.