Числовая последовательность

Преподаватель: Сосновских Е.М.

Функцию вида $y = f(x)$, $x \in N$ называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают $y = f(n)$ или $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$.
Иногда для обозначения последовательности используют запись (y_n).

Словесный способ задания последовательности.

2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

Аналитический способ задания последовательности.

1) $y_n = n^3$. $\quad 1, 8, 27, 64, \dots, n^3, \dots$

Если $n = 9$, то:
$y_9 = 9^3$,
$y_9 = 729$.

Если $y_n = 1331$, то:
$n^3 = 1331$,
$n = 11$.

2) $y_n = C$. $\quad C, C, C, \dots, C, \dots$

Рекуррентный способ задания последовательности.

1) Арифметическая прогрессия — это числовая последовательность (a_n), заданная рекуррентно соотношением: $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$ (a и d — заданные числа, d — разность арифметической прогрессии).

2) Геометрическая прогрессия — это числовая последовательность (b_n), заданная рекуррентно соотношениями: $b_1 = b$, $b_{n+1} = b_n\mathrm{q}$ (b и q — заданные числа, $b \neq 0$, $q \neq 0$; q — знаменатель геометрической прогрессии).

Последовательность (y_n) называют ограниченной сверху, если все её члены не больше некоторого числа.

Последовательность (y_n) ограничена сверху, если существует число M такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \leq M$. Число M называют верхней границей последовательности.

Последовательность $-1, -8, -27, -64, \dots, -n^3, \dots$ ограничена сверху.

Верхняя граница: $M = -1$ или любое число, которое больше, чем -1, например, 0.

Последовательность (y_n) называют ограниченной снизу, если все её члены не меньше некоторого числа.

Последовательность (y_n) ограничена снизу, если существует число m такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \geq m$. Число m называют нижней границей последовательности.

Последовательность $0, 1, 2, 3, 4, \dots, (n-1), \dots$ ограничена снизу.

Нижняя граница: $m = 0$ или любое число меньше 0.

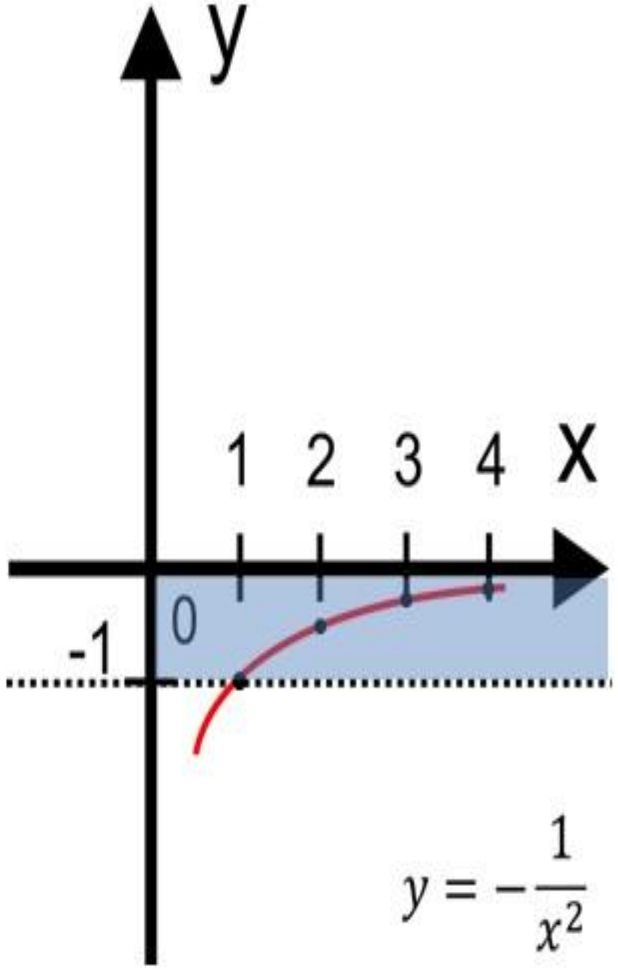
Если последовательность ограничена и сверху, и снизу, то её называют ограниченной.

$$-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \dots, -\frac{1}{n^2}, \dots$$

$M = 0,$
$m = -1$

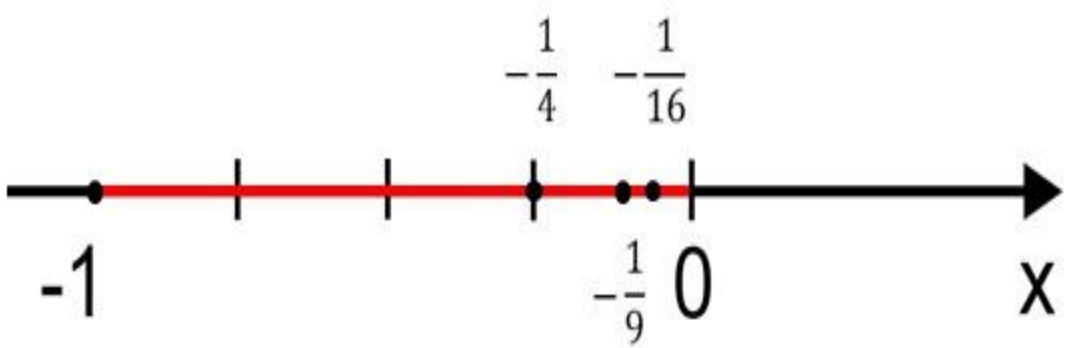
$$y_n = -\frac{1}{n^2};$$

$$y = -\frac{1}{x^2}, x \in N.$$



Ограниченность последовательности означает, что все члены последовательности (точнее, соответствующие им точки прямой) принадлежат некоторому отрезку.

$$y_n = -\frac{1}{n^2} \qquad y_n \in [-1; 0]$$



Последовательность (y_n) называют возрастающей, если каждый ее член больше предыдущего: $y_1 < y_2 < y_3 < \cdots < y_n < y_{n+1} < \cdots$.

$1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1, \dots$ — возрастающая последовательность.

$$1 < 3 < 5 < 7 < \cdots < 2n - 1 < 2(n+1) - 1 < \cdots$$

Последовательность (y_n) называют убывающей, если каждый её член меньше предыдущего: $y_1 > y_2 > y_3 > \cdots > y_n > y_{n+1} > \cdots$.

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{2n-1}, \dots$$ — убывающая последовательность.

$$1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \cdots > \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2(n+1)-1} > \cdots$$

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином — монотонные последовательности.

1) $-1, 2, -3, 4, \dots, (-1)^n n, \dots$ — ни возрастающая, ни убывающая (немонотонная) последовательность.

2) $y_n = 3^n$ — возрастающая последовательность $(3, 9, 27, 81, 243, \dots)$.

Если $a > 1$, то последовательность $y_n = a^n$ возрастает.

3) $y_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ — убывающая последовательность $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \dots\right)$.

Если $0 < a < 1$, то последовательность $y_n = a^n$ убывает.