РАЗДЕЛ 4

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

Тема 23
КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Лекция 2

Цель лекции – ознакомиться с методами количественного описания суперпозиции гармонических колебаний и их практическим применением.

Вопросы лекции:

1. Геометрические способы представления гармонических колебаний.
2. Сложение гармонических колебаний одного направления одинаковой частоты. Биения.
3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты.
4. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний разных частот. Фигуры Лиссажу.

Литература:

БЭУ; Доп. [1, стр. 208-220]; [2, стр. 168-184]

Техническое обеспечение:

Комплект мультимедийных средств обучения.

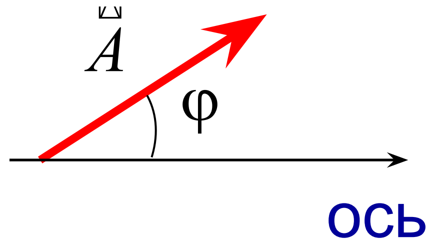
База данных анимаций физических процессов.

23.4. Геометрические способы представления гармонических колебаний.

Сложение колебаний – это нахождение закона результирующего колебания системы в случае, если она участвует одновременно в нескольких колебательных процессах.

При сложении гармонических колебаний одинаковой частоты их удобно представить в виде векторов на плоскости.

Вектор амплитуды:

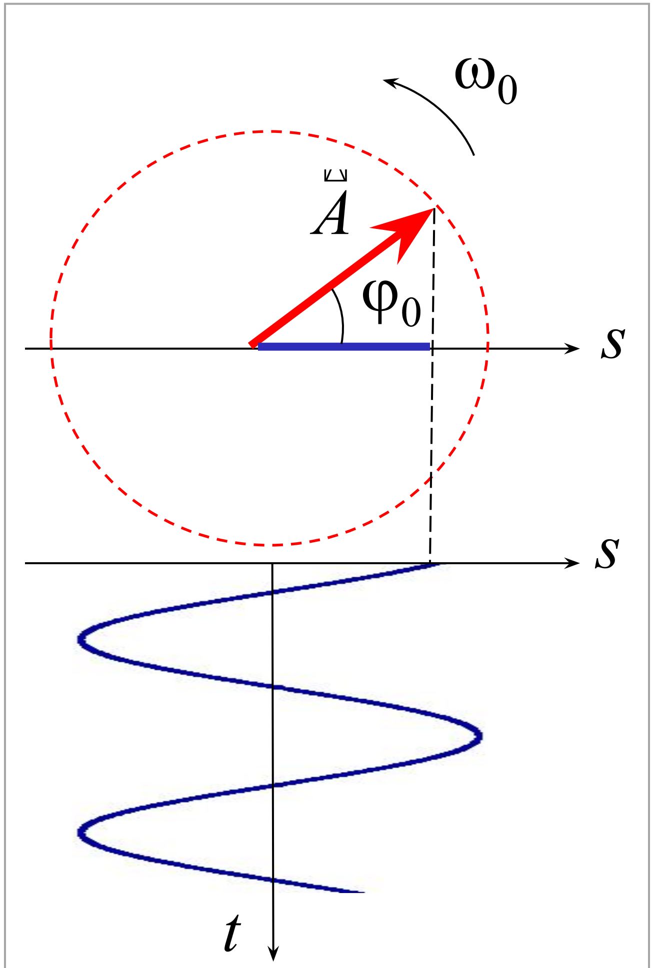


► длина вектора соответствует амплитуде колебаний;

► угол поворота относительно оси соответствует фазе колебаний в данный момент времени.

1) Метод векторных диаграмм

(метод вращающего вектора амплитуды)



$$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Правила построения:

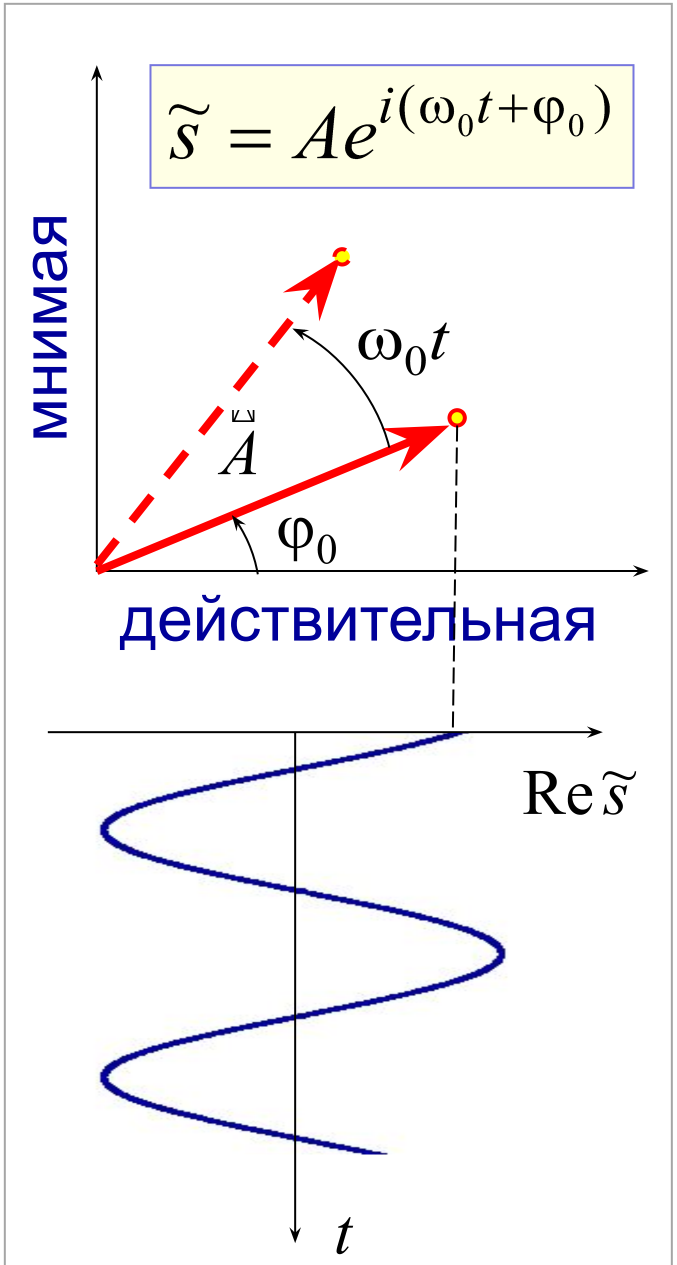
1. Задаем ось *Os*, вдоль которой будем отсчитывать значения переменной величины *s*.

2. Из точки *s*=0 оси направляем вектор *A* под углом ϕ_0 к оси.
(ϕ_0 – начальная фаза колебаний)

3. Вращаем вектор против часовой стрелки с угловой скоростью ω_0.
(ω_0 – собственная частота колебаний)

4. Проекция вектора *A* на ось *Os* изменяется по закону гармонических колебаний

2) Метод комплексного представления



Правила построения:

1. Значение переменной величины *s* задается точкой на комплексной плоскости:

► *A* – модуль числа (длина радиус-вектора точки)

► $(\omega_0 t + \phi_0)$ – аргумент числа (угол поворота радиус-вектора)

2. Выделяется действительная часть (в тригонометрической форме):

$$\mathrm{Re}\,\widetilde{s} = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

изменяется по закону гармонических колебаний

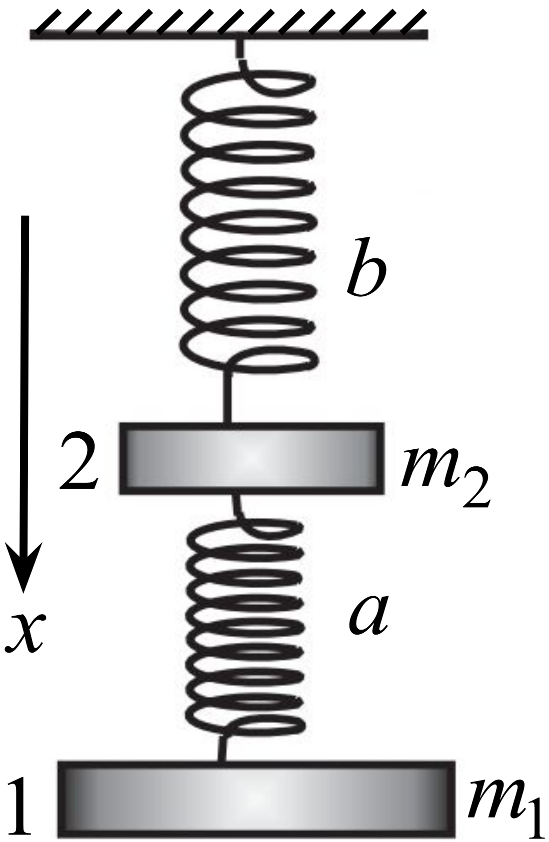
Замечания:

► оба метода базируются на общем (геометрическом) способе представления колебаний и взаимно дополняют друг друга;

► метод вращающего вектора амплитуды более прост и нагляден, но имеет ограничение по числу колебаний т.к. требует построения векторной диаграммы;

► метод комплексного представления не имеет ограничений и позволяет описывать самые общие (в том числе абстрактные) случаи колебательных процессов.

23.5. Сложение гармонических колебаний одного направления одинаковой частоты.



На примере механических колебаний:

Груз 1 массой m_1 колеблется относительно груза 2 массой m_2 на пружине *a* и вместе с ним на пружине *b* вдоль оси *x*.

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{cases}$$

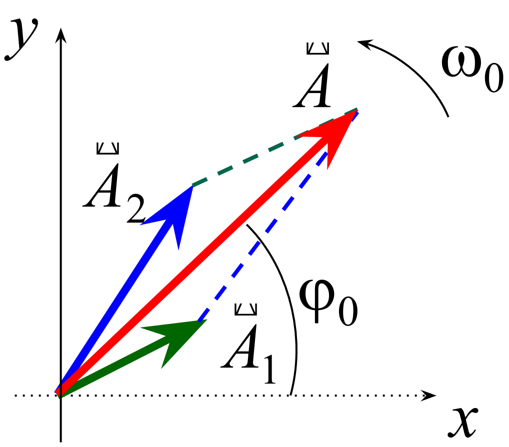
$$x = x_1 + x_2$$

Результирующее колебание *x* также является гармоническим и имеет вид:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

амплитуда
начальная фаза

Амплитуда *A* результирующего колебания (определяется по теореме косинусов)

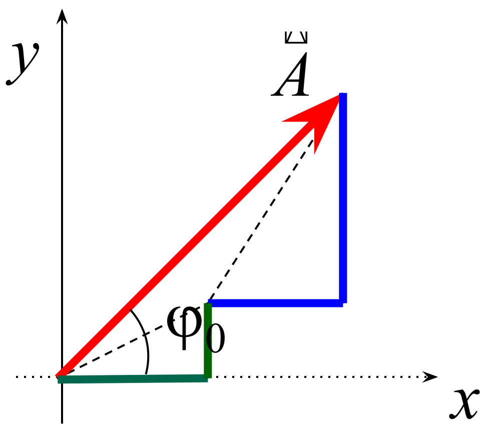


$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \qquad (23.18)$$

разность фаз

Начальная фаза ϕ_0 результирующего колебания

(определяется через отношение суммы проекций векторов A_1 и A_2 на ось *y* к сумме проекций этих векторов на ось *x*)



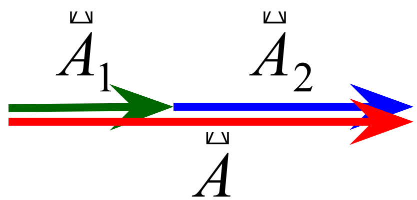
$$\mathrm{tg}\,\varphi_0=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2} \qquad (23.19)$$

Понятие о когерентности колебаний

Когерентными называются колебания одинакового направления и частоты, если их разность фаз остается неизменной во времени.

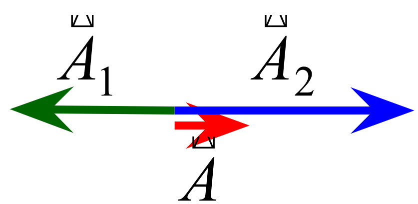
Частные случаи:

► $\Delta\varphi = 0$; $\pm 2\pi$; …



наибольшее усиление колебаний

► $\Delta\varphi = \pm\pi$; $\pm 3\pi$;…

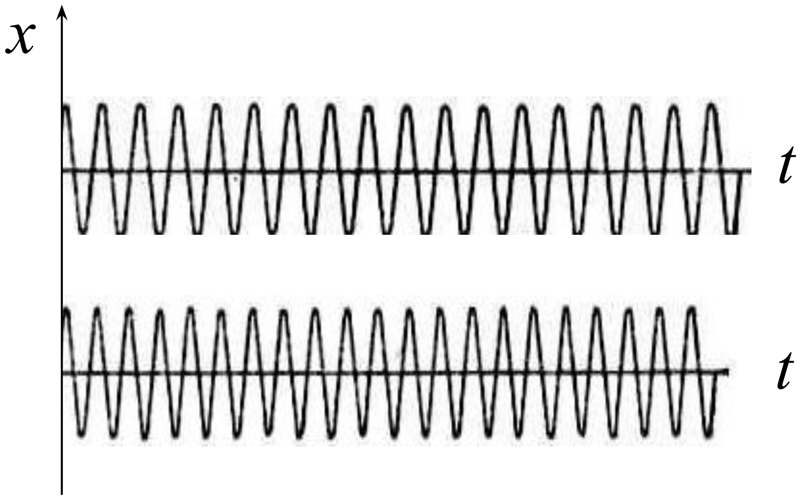


наибольшее ослабление колебаний

Наложение когерентных колебаний приводит к явлению интерференции (перераспределению энергии колебаний в пространстве).

Понятие о биениях

Биения – это результат сложения гармонических колебаний одинакового направления близких частот



$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Для простоты предположим:

$$A_1 = A_2 = A; \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0; \quad \omega_2 > \omega_1$$

Обозначим:

$$\omega_1 = \omega_0; \qquad \omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega$$

Результирующее смещение *x*:

$$x = x_1 + x_2 = A\cos\omega_0 t + A\cos(\omega_0 + \Delta\omega)t$$

где $\Delta\omega << \omega_0$

По формуле
суммы косинусов:

$$x = 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t \cdot \cos\omega_0 t \qquad (23.20)$$

уравнение биений, которые можно рассматривать как гармоническое колебание с пульсирующей амплитудой.

Амплитуда биений:

$$A_б = \left|2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right| > 0 \qquad (23.21)$$

Период изменения амплитуды:
(период биений)

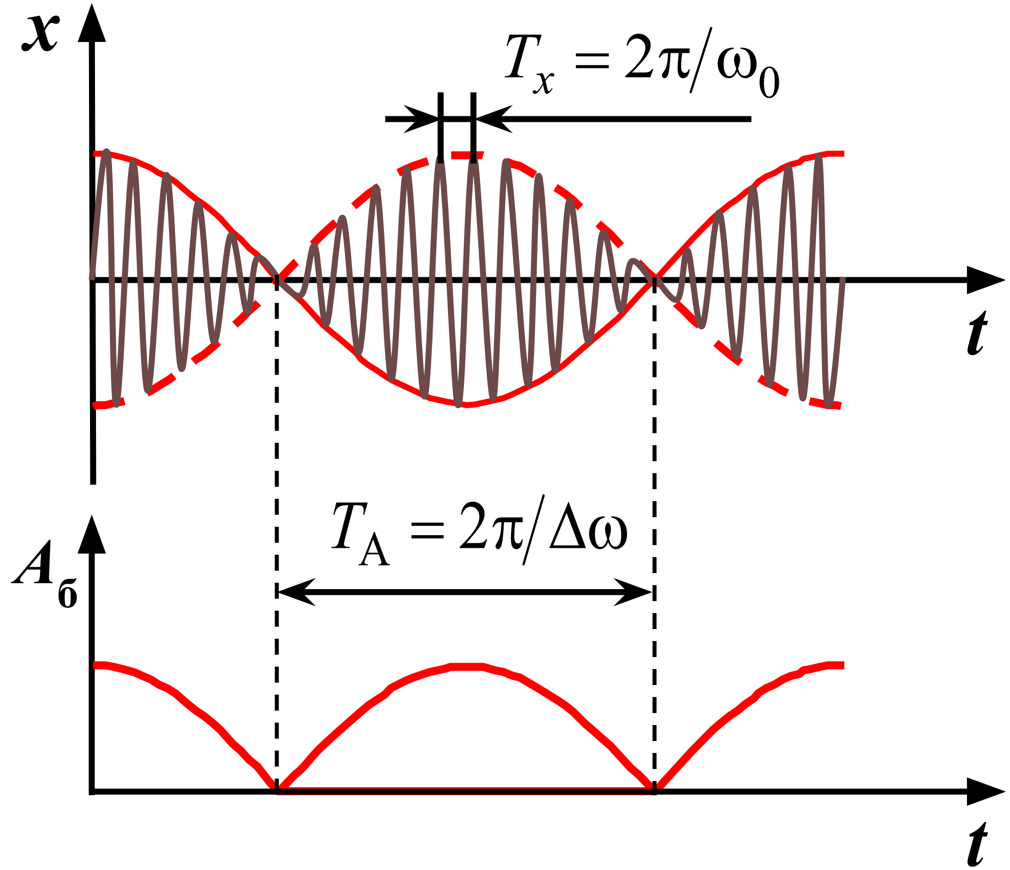
$$T_A = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

Период колебаний:

$$T_x = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$T_x << T_A$$

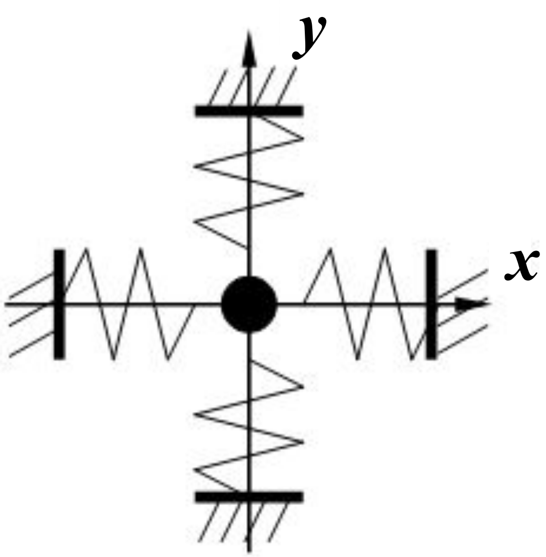
Графики биения:



С помощью биений можно обнаружить чрезвычайно малые разности частот!

“Метод биений” применяют в различных приборах для измерения частот, ёмкости, индуктивности, для настройки генераторов и т.д.

23.6. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты.



На примере механических колебаний:

Для простоты предположим:

$$\varphi_1 = 0; \quad \varphi_2 = \Delta\varphi$$

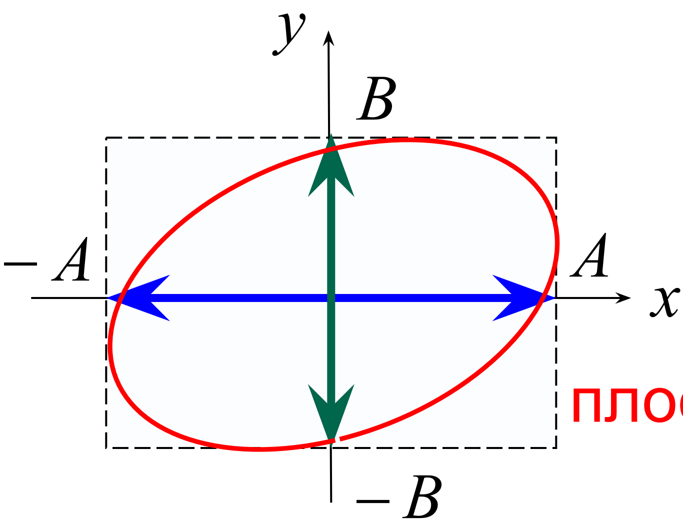
$$\begin{cases} x = A\cos\omega_0 t \\ y = B\cos(\omega_0 t + \Delta\varphi) \end{cases}$$

Уравнение траектории результирующего колебания находится исключением параметра *t*:

$$\frac{y}{B} = \cos(\omega_0 t + \Delta\varphi) = \cos\omega_0 t \cdot \cos\Delta\varphi - \sin\omega_0 t \cdot \sin\Delta\varphi$$

$$\cos\omega_0 t = \frac{x}{A} \qquad \sin\omega_0 t = \pm\sqrt{1 - \cos^2\omega_0 t}$$

Траектория результирующего колебания:



$$\frac{x^2}{A^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\Delta\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin\Delta\varphi \qquad (23.22)$$

Понятие о поляризации колебаний

Колебания называются поляризованными, если направление колебаний остается неизменным, или правильным образом изменяется в течение одного полного периода

Вектор амплитуды за один период описывает в плоскости колебаний эллипс:

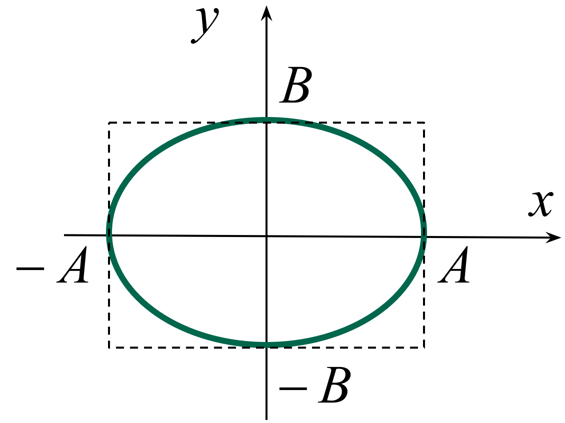
происходит эллиптическая поляризация колебаний!

Частные случаи:

▶ $\Delta\phi = \pm\pi/2; \pm 3\pi/2; \ldots$

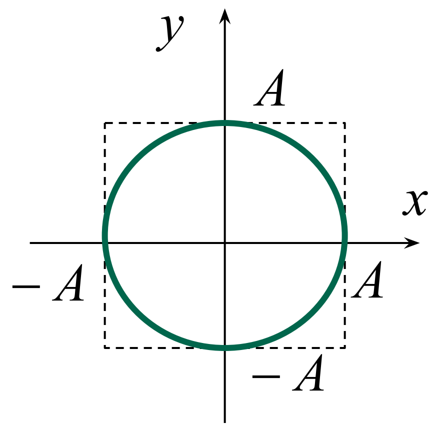
уравнение траектории

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$



эллиптическая поляризация

если при этом *A*=*B*

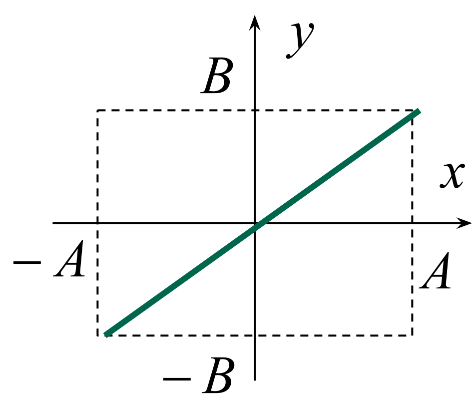


круговая поляризация

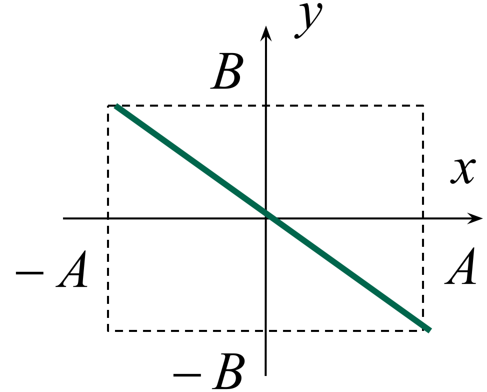
▶ $\Delta\phi = 0; \pm\pi; \pm 2\pi; \ldots$

уравнение траектории

четное

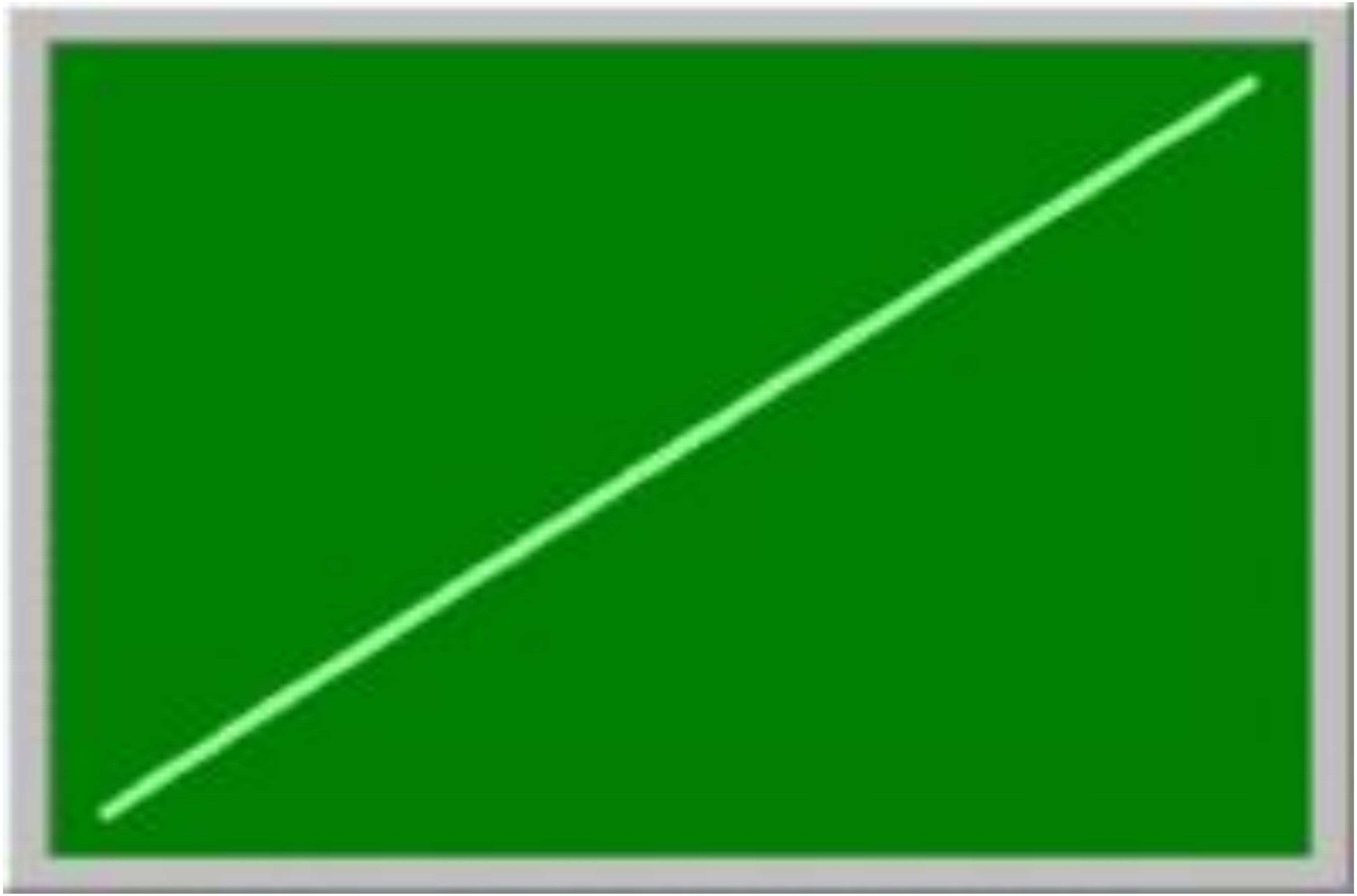


нечетное



$$y = \pm\frac{B}{A}x$$

линейная поляризация



23.7. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний разных частот. Фигуры Лиссажу.

Если взаимно перпендикулярные колебания происходят с циклическими частотами $p\omega_0$ и $q\omega_0$, где p и q – целые числа:

$$x = A\cos(p\omega_0 t) \quad \text{и} \quad y = B\cos(q\omega_0 t + \Delta\varphi)$$

то значение координат x и y одновременно повторяются через одинаковые промежутки времени T_0.

T_0 равно наименьшему общему кратному периодов колебаний вдоль осей x и y:

$$T_1 = \frac{2\pi}{p\omega_0} \quad \text{и} \quad T_2 = \frac{2\pi}{q\omega_0}$$

Траектории результирующих колебаний - кривые, которые называются фигурами Лиссажу.

Вид этих кривых сильно зависит от соотношения амплитуд, частот и разности фаз складываемых колебаний.

Пример:

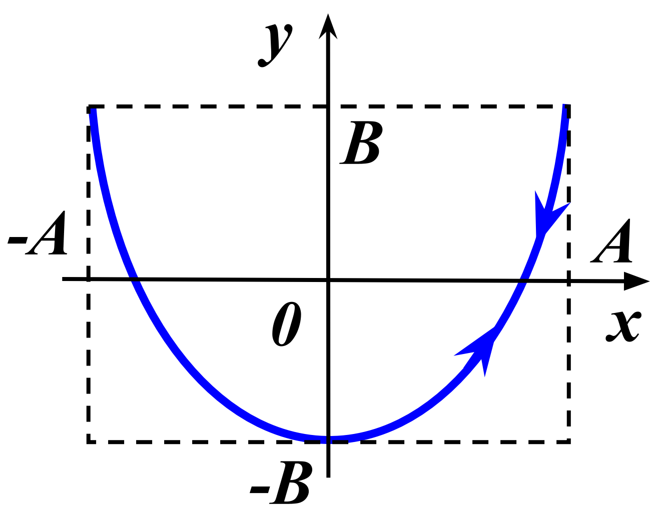
Пусть отношение частот взаимно перпендикулярных колебаний равно 1:2 и разность фаз **Δφ** = **π**/2.

Уравнения колебаний имеют вид:

$$x = A\cos\omega_0 t$$

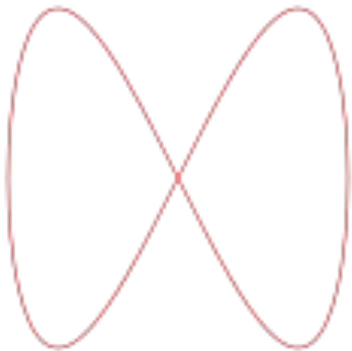
и

$$y = B\cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

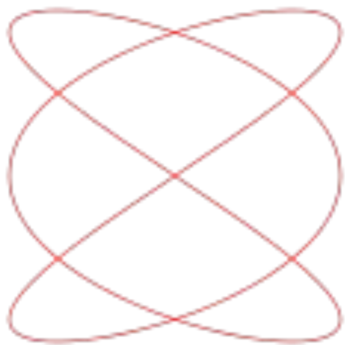


фигура Лиссажу

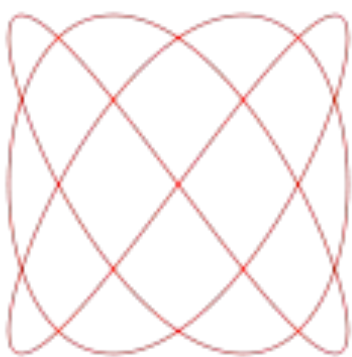
Траектория представляет собой незамкнутую кривую, по которой точка движется туда и обратно.



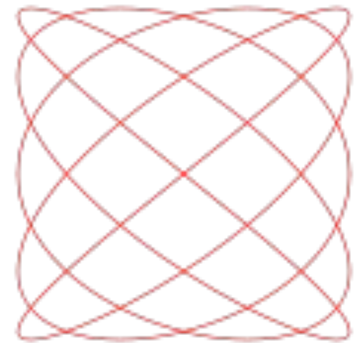
(1:2)



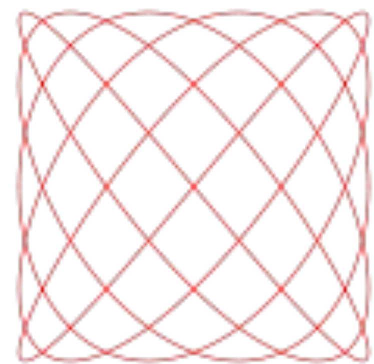
(3:2)



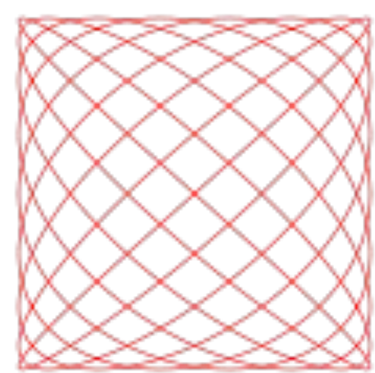
(3:4)



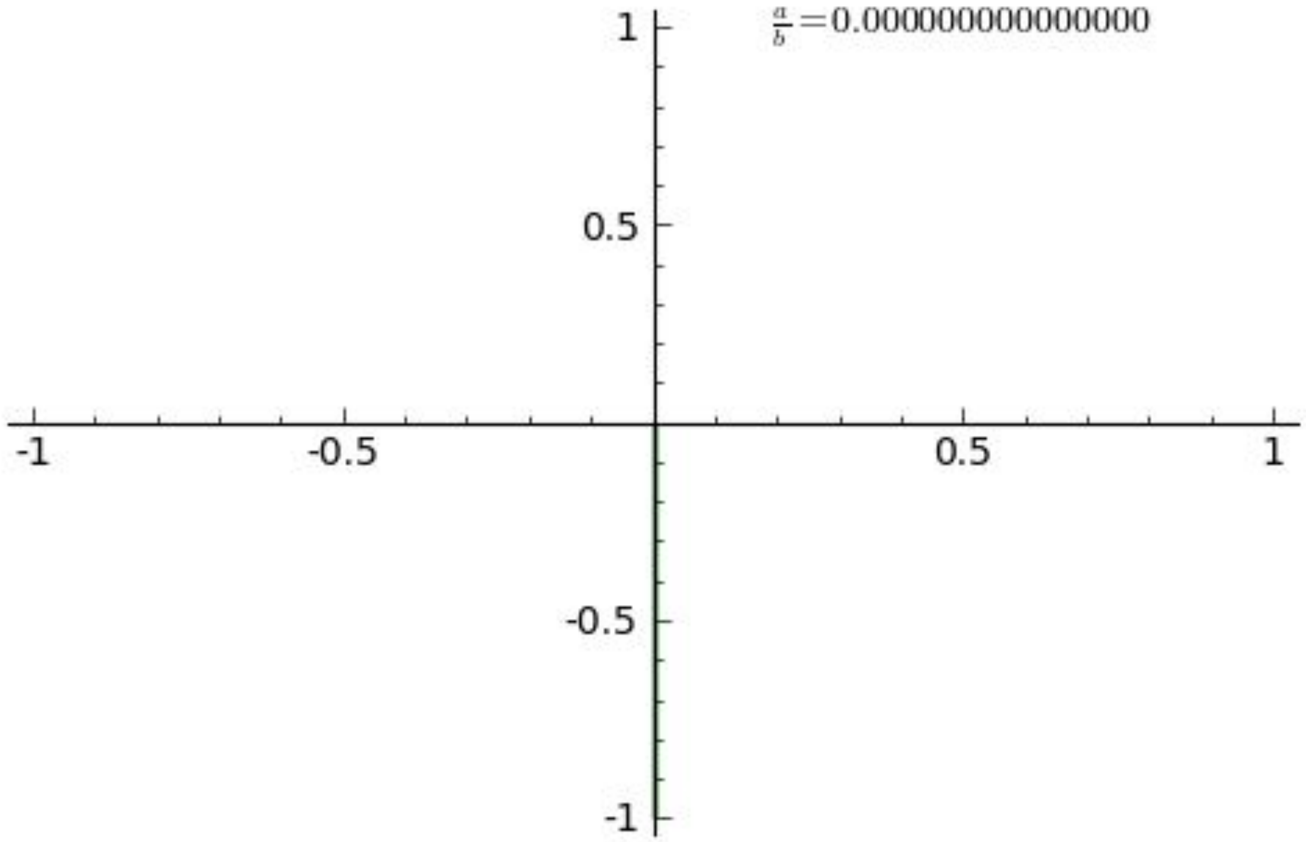
(5:4)

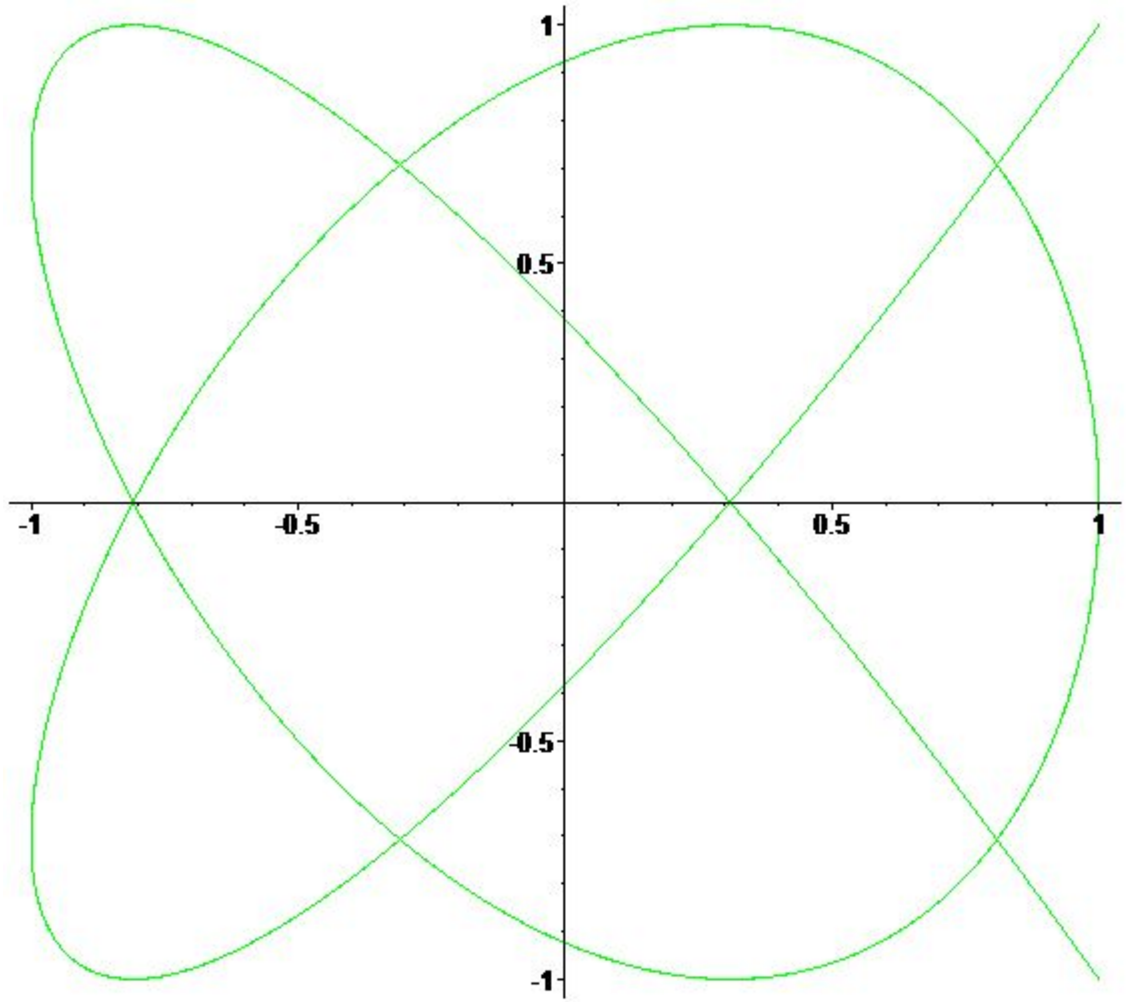


(5:6)



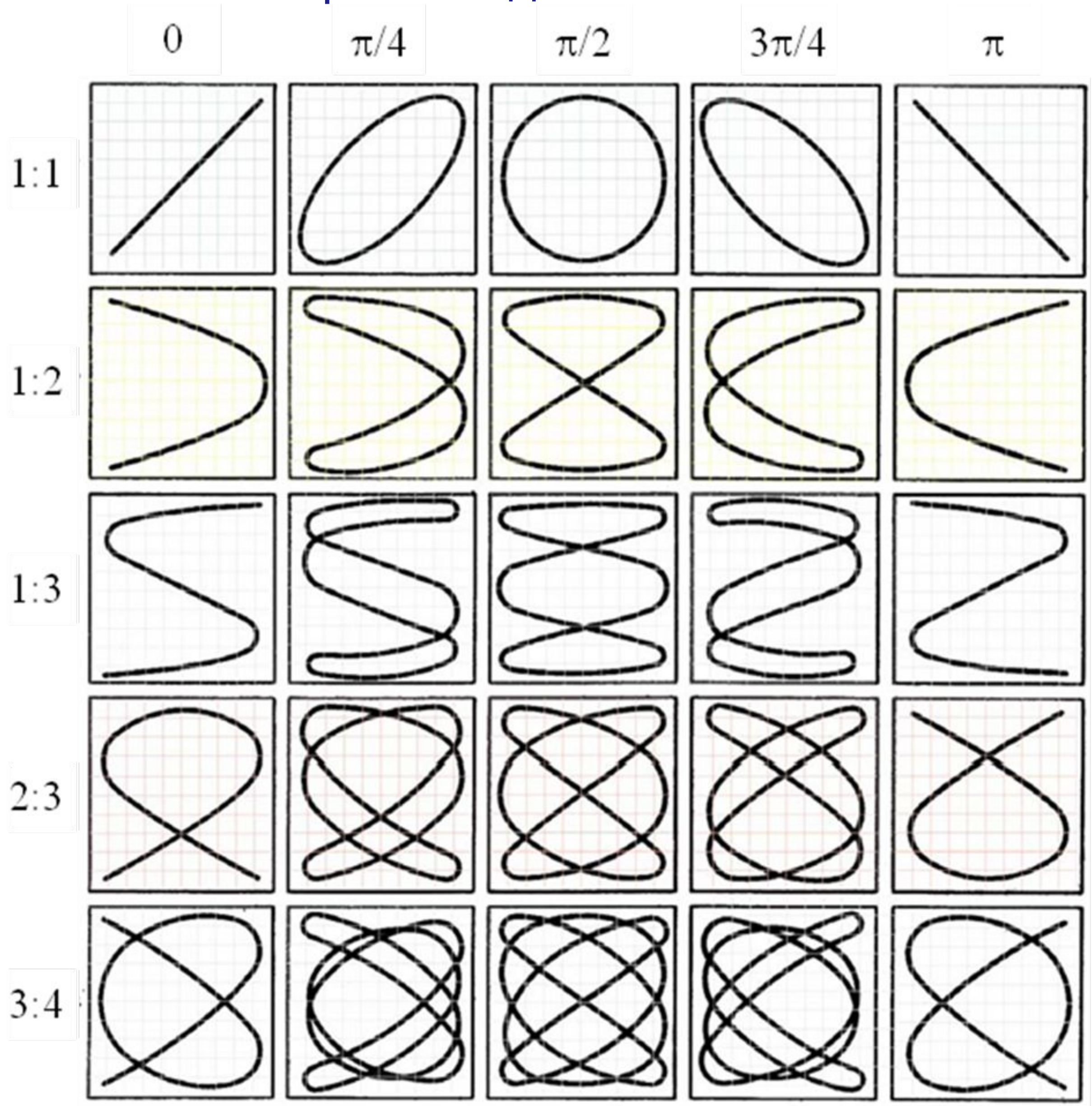
(9:8)


$\frac{a}{b} = 0.000000000000000$
1
0.5
-0.5
-1
-1
-0.5
0.5
1


1
0.5
-0.5
-1
-1
-0.5
0.5
1

Разность фаз складываемых колебаний

Отношение частот складываемых колебаний



Примеры фигур Лиссажу

Задание на самоподготовку

1. Повторить тему лекции с использованием конспекта и рекомендованной литературы.
2. Ответить на контрольные вопросы в электронном учебнике по теме лекции.
3. Решить задачи в электронном учебнике по теме лекции.