08.12.20.

Тема:
Основы тригонометрии. Радианная мера угла. Соответствие радианной и градусной мер углов. Вращательное движение точки вокруг начла координат.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://infourok.ru/videouroki/1175
https://youtu.be/k1NLEzZpfcg

Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

Радианная мера угла

До сих пор для измерения углов вы использовали градусы или части градуса — минуты и секунды.

Во многих случаях удобно пользоваться другой единицей измерения углов. Её называют **радианом**.

Определение

Углом в один радиан называют центральный угол окружности, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности.

На рисунке 17.1 изображён центральный угол AOB, опирающийся на дугу AB, длина которой равна радиусу окружности. Величина угла AOB равна одному радиану. Пишут: $\angle AOB = 1$ рад. Также говорят, что радианная мера дуги AB равна одному радиану. Пишут: $\cup AB = 1$ рад.

Радианная мера угла (дуги) не зависит от радиуса окружности. Действительно, рассмотрим две окружности с общим центром O и радиусами R и r ($R > r$) (рис. 17.2). Сектор AOB гомотетичен сектору A_1OB_1 с цен-

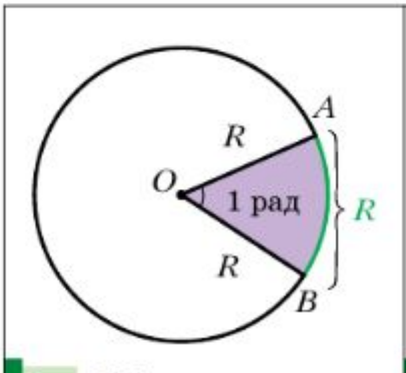

Рис. 17.1

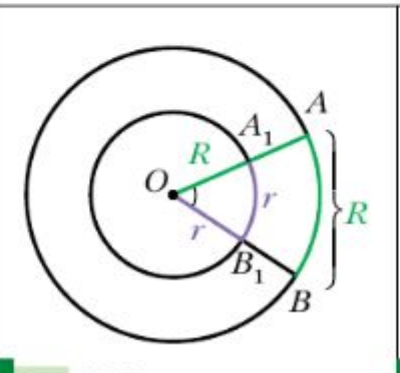

Рис. 17.2

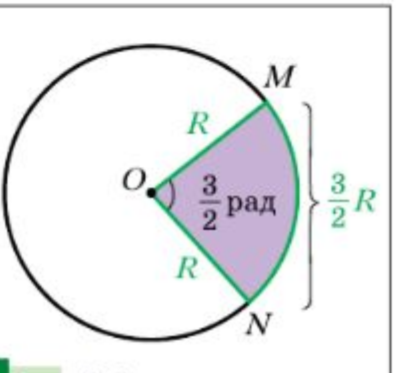

Рис. 17.3

тром O и коэффициентом $\frac{R}{r}$. Тогда, если длина дуги AB равна радиусу R, то длина дуги A_1B_1 равна радиусу r.

На рисунке 17.3 изображены окружность радиуса R и дуга MN, длина которой равна $\frac{3}{2}R$. Тогда радианная мера угла MON (дуги MN) равна $\frac{3}{2}$ рад. Вообще, если центральный угол окружности радиуса R опирается на дугу, длина которой равна αR, то говорят, что **радианная мера центрального угла** равна α рад.

Длина полуокружности равна πR. Следовательно, радианная мера полуокружности равна π рад. Градусная мера полуокружности составляет 180°.

Сказанное позволяет установить связь между радианной и градусной мерами, а именно:

$$\pi \text{ рад} = 180^\circ. \qquad (1)$$

Отсюда

$$\boxed{1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ}$$

Разделив 180 на 3,14 (напомним, что $\pi \approx 3{,}14$), можно установить: $1 \text{ рад} \approx 57^\circ$.

Равенство (1) позволяет также записать, что

$$\boxed{1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад}} \qquad (2)$$

Из этой формулы легко установить, что, например, $15^\circ = 15 \cdot \frac{\pi}{180}$ рад $= \frac{\pi}{12}$ рад, $90^\circ = 90 \cdot \frac{\pi}{180}$ рад $= \frac{\pi}{2}$ рад, $135^\circ = 135 \cdot \frac{\pi}{180}$ рад $= \frac{3\pi}{4}$ рад.

Обычно при записи радианной меры угла обозначение «рад» опускают. Например, пишут $135^\circ = \frac{3\pi}{4}$.

В таблице приведены градусные и радианные меры часто встречающихся углов:

Градусная мера угла	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Радианная мера угла	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Используя радианную меру угла, можно получить удобную формулу для вычисления длины дуги окружности. Поскольку центральный угол в 1 рад опирается на дугу, длина которой равна радиусу R, то угол в α рад опирается на дугу, длина которой равна αR. Если длину дуги, содержащей α рад, обозначить l, то можно записать

$$\boxed{l = \alpha R}$$

На координатной плоскости рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Такую окружность называют **единичной окружностью**.

Пусть точка P, начиная движение от точки $P_0(1;\ 0)$, перемещается по единичной окружности против часовой стрелки. В некоторый момент времени она займёт положение, при котором $\angle P_0OP = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ (рис. 17.4).

Будем говорить, что точка P получена в результате **поворота точки P_0 вокруг начала координат** на угол $\frac{2\pi}{3}$ (на угол 120°). Пишут: $P = R_O^{\frac{2\pi}{3}}(P_0)$.

Пусть теперь точка P переместилась по единичной окружности по часовой стрелке и заняла положение, при котором $\angle POP_0 = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ (рис. 17.5). Будем говорить, что точка P получена в результате поворота точки P_0 вокруг начала координат на угол $-\frac{2\pi}{3}$ (на угол -120°). Пишут: $P = R_O^{-\frac{2\pi}{3}}(P_0)$.

Вообще, когда рассматривают движение точки по окружности против часовой стрелки (см. рис. 17.4), то угол поворота считают положительным, а по часовой стрелке (см. рис. 17.5) — отрицательным.

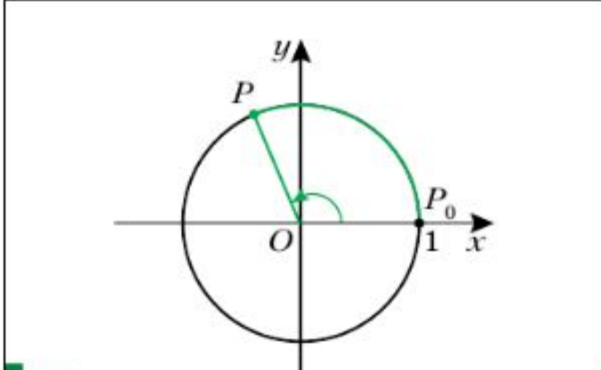

Рис. 17.4

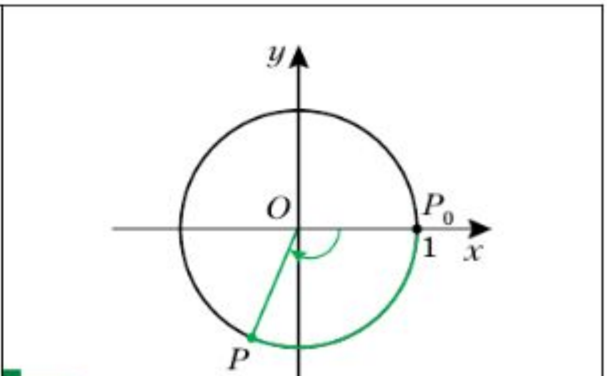

Рис. 17.5

Рассмотрим ещё несколько примеров. Обратимся к рисунку 17.6. Можно сказать, что точка A получена в результате поворота точки P_0 вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{2}$ (на угол 90°) или на угол $-\frac{3\pi}{2}$ (на угол –270°), то есть $A = R_O^{\frac{\pi}{2}}(P_0)$, $A = R_O^{-\frac{3\pi}{2}}(P_0)$. Точка B получена в результате поворота точки P_0 на угол π (на угол 180°) или на угол $-\pi$ (на угол –180°), то есть $B = R_O^{\pi}(P_0)$, $B = R_O^{-\pi}(P_0)$. Точка C получена в результате поворота точки P_0 на угол $\frac{3\pi}{2}$ (на угол 270°) или на угол $-\frac{\pi}{2}$ (на угол –90°), то есть $C = R_O^{\frac{3\pi}{2}}(P_0)$, $C = R_O^{-\frac{\pi}{2}}(P_0)$.

Если точка P, двигаясь по единичной окружности, сделает полный оборот, то можно говорить, что угол поворота равен 2π (то есть 360°) или -2π (то есть –360°).

Если точка P сделает полтора оборота против часовой стрелки, то естественно считать, что угол поворота равен 3π (то есть 540°), если по часовой стрелке — то -3π (то есть –540°).

Величина угла поворота как в радианах, так и в градусах может выражаться любым действительным числом.

Угол поворота однозначно определяет положение точки P на единичной окружности. Однако любому положению точки P на окружности соответствует бесконечно много углов поворота. Например, на рисунке 17.7 точке P соответствуют такие углы поворота: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi$, $\frac{\pi}{4} + 4\pi$, $\frac{\pi}{4} + 6\pi$ и т. д., а также $\frac{\pi}{4} - 2\pi$, $\frac{\pi}{4} - 4\pi$, $\frac{\pi}{4} - 6\pi$ и т. д.

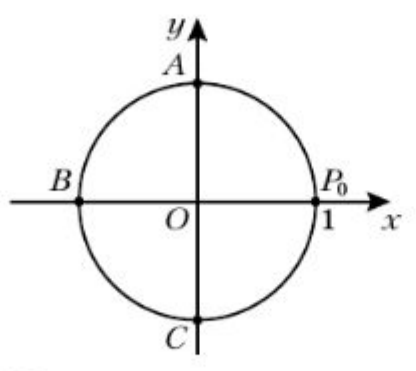

Рис. 17.6

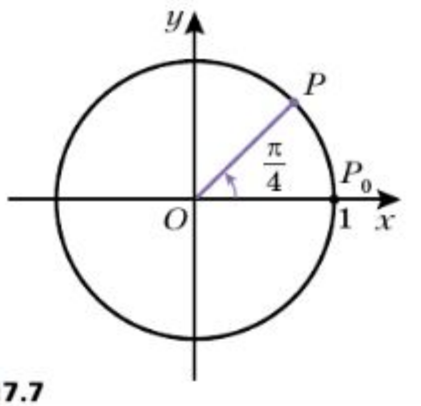

Рис. 17.7

Каждому действительному числу α поставим в соответствие точку P единичной окружности такую, что $P = R_O^{\alpha}(P_0)$. Тем самым мы задали отображение множества действительных чисел на множество точек единичной окружности. Заметим, что это отображение не является взаимно однозначным: каждой точке единичной окружности соответствует бесконечно много действительных чисел. Например, на рисунке 17.7 точке P соответствуют все действительные числа вида $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Заметим, что множество чисел вида $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, можно задать и иначе. Например: $\frac{9\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, или $-\frac{7\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

Практическая часть.

? **1.** Что называют углом в один радиан?
2. Чему равна длина дуги окружности радиуса R, содержащей α рад?
3. Каким числом может выражаться угол поворота?
4. Сколько точек определяет на единичной окружности угол поворота?
5. Сколько углов поворота соответствуют положению точки на единичной окружности?

407 Найти радианную меру угла, выраженного в градусах:
1) $40°$; 2) $120°$; 3) $150°$; 4) $75°$; 5) $32°$; 6) $140°$.

408 Найти градусную меру угла, выраженного в радианах:
1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{9}$; 3) $\frac{3}{4}\pi$; 4) 2; 5) 3; 6) 0,36.

416 Найти координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки (1; 0) на угол:
1) 4π; 2) $-\frac{3}{2}\pi$; 3) $-6{,}5\pi$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) $\frac{\pi}{3}$; 6) $-45°$.

420 Найти координаты точки, полученной поворотом точки P (1; 0) на угол:
1) 3π; 2) $-\frac{7}{2}\pi$; 3) $-\frac{15}{2}\pi$; 4) 5π; 5) $540°$; 6) $810°$.

423 Найти все углы, на которые нужно повернуть точку P (1; 0), чтобы получить точку с координатами:
1) (1; 0); 2) (−1; 0); 3) (0; 1); 4) (0; −1).