

08.12.20.

Тема:

Основы тригонометрии. Радианная мера угла. Соответствие радианной и градусной мер углов. Вращательное движение точки вокруг начала координат.

*Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.*

Видео для усвоения материала:

<https://infourok.ru/videouroki/1175>

<https://youtu.be/k1NLEzZpfcg>

# Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

## Радианная мера угла

До сих пор для измерения углов вы использовали градусы или части градуса — минуты и секунды.

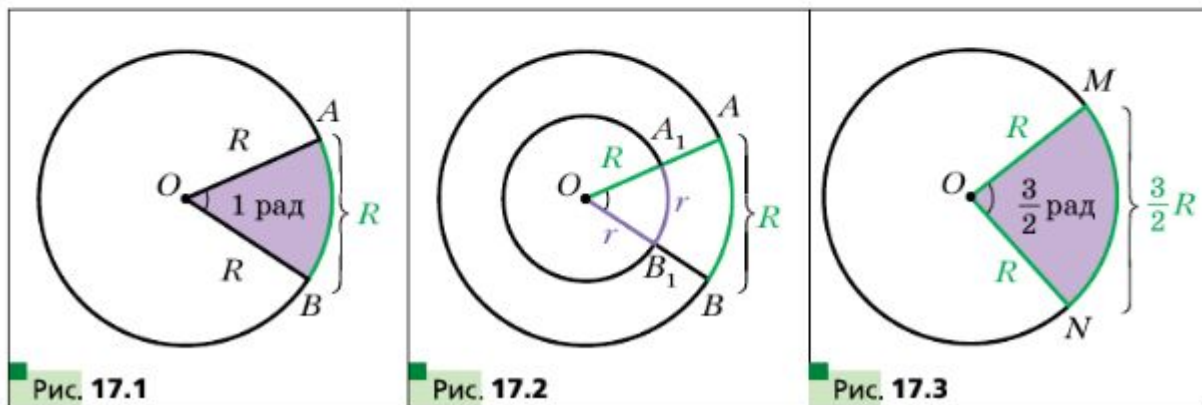
Во многих случаях удобно пользоваться другой единицей измерения углов. Её называют **радианом**.

### Определение

**Углом в один радиан называют центральный угол окружности, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности.**

На рисунке 17.1 изображён центральный угол  $AOB$ , опирающийся на дугу  $AB$ , длина которой равна радиусу окружности. Величина угла  $AOB$  равна одному радиану. Пишут:  $\angle AOB = 1$  рад. Также говорят, что радианная мера дуги  $AB$  равна одному радиану. Пишут:  $\overset{\frown}{AB} = 1$  рад.

Радианная мера угла (дуги) не зависит от радиуса окружности. Действительно, рассмотрим две окружности с общим центром  $O$  и радиусами  $R$  и  $r$  ( $R > r$ ) (рис. 17.2). Сектор  $AOB$  гомотетичен сектору  $A_1OB_1$  с цен-



тром  $O$  и коэффициентом  $\frac{R}{r}$ . Тогда, если длина дуги  $AB$  равна радиусу  $R$ , то длина дуги  $A_1B_1$  равна радиусу  $r$ .

На рисунке 17.3 изображены окружность радиуса  $R$  и дуга  $MN$ , длина которой равна  $\frac{3}{2}R$ . Тогда радианная мера угла  $MON$  (дуги  $MN$ ) равна  $\frac{3}{2}$  рад. Вообще, если центральный угол окружности радиуса  $R$  опирается на дугу, длина которой равна  $\alpha R$ , то говорят, что **радианная мера центрального угла** равна  $\alpha$  рад.

Длина полуокружности равна  $\pi R$ . Следовательно, радианная мера полуокружности равна  $\pi$  рад. Градусная мера полуокружности составляет  $180^\circ$ .

Сказанное позволяет установить связь между радианной и градусной мерами, а именно:

$$\pi \text{ рад} = 180^\circ. \quad (1)$$

Отсюда

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

Разделив 180 на 3,14 (напомним, что  $\pi \approx 3,14$ ), можно установить:  $1 \text{ рад} \approx 57^\circ$ .

Равенство (1) позволяет также записать, что

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \quad (2)$$

Из этой формулы легко установить, что, например,  $15^\circ = 15 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{\pi}{12} \text{ рад}$ ,  $90^\circ = 90 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{\pi}{2} \text{ рад}$ ,  $135^\circ = 135 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{3\pi}{4} \text{ рад}$ .

Обычно при записи радианной меры угла обозначение «рад» опускают. Например, пишут  $135^\circ = \frac{3\pi}{4}$ .

В таблице приведены градусные и радианные меры часто встречающихся углов:

Градусная мера угла	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
Радианная мера угла	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$

Используя радианную меру угла, можно получить удобную формулу для вычисления длины дуги окружности. Поскольку центральный угол в 1 рад опирается на дугу, длина которой равна радиусу  $R$ , то угол в  $\alpha$  рад опирается на дугу, длина которой равна  $\alpha R$ . Если длину дуги, содержащей  $\alpha$  рад, обозначить  $l$ , то можно записать

$$l = \alpha R$$

На координатной плоскости рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Такую окружность называют **единичной окружностью**.

Пусть точка  $P$ , начиная движение от точки  $P_0(1; 0)$ , перемещается по единичной окружности против часовой стрелки. В некоторый момент времени она займёт положение, при котором  $\angle P_0OP = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$  (рис. 17.4).

Будем говорить, что точка  $P$  получена в результате **поворота точки  $P_0$  вокруг начала координат на угол  $\frac{2\pi}{3}$  (на угол  $120^\circ$ )**. Пишут:  $P = R_O^{\frac{2\pi}{3}}(P_0)$ .

Пусть теперь точка  $P$  переместилась по единичной окружности по часовой стрелке и заняла положение, при котором  $\angle POP_0 = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$

(рис. 17.5). Будем говорить, что точка  $P$  получена в результате поворота точки  $P_0$  вокруг начала координат на угол  $-\frac{2\pi}{3}$  (на угол  $-120^\circ$ ). Пишут:  $P = R_O^{-\frac{2\pi}{3}}(P_0)$ .

Вообще, когда рассматривают движение точки по окружности против часовой стрелки (см. рис. 17.4), то угол поворота считают положительным, а по часовой стрелке (см. рис. 17.5) — отрицательным.

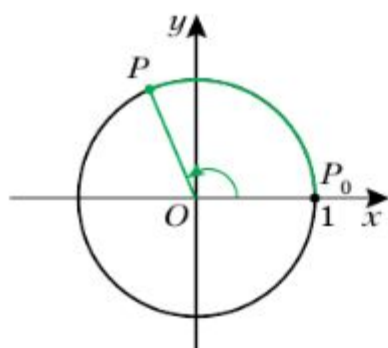


Рис. 17.4

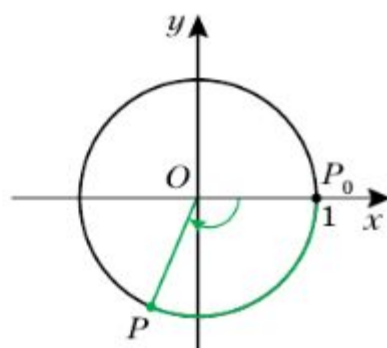


Рис. 17.5



Рассмотрим ещё несколько примеров. Обратимся к рисунку 17.6. Можно сказать, что точка  $A$  получена в результате поворота точки  $P_0$  вокруг начала координат на угол  $\frac{\pi}{2}$  (на угол  $90^\circ$ ) или на угол  $-\frac{3\pi}{2}$  (на угол  $-270^\circ$ ), то есть  $A = R_O^{\frac{\pi}{2}}(P_0)$ ,  $A = R_O^{-\frac{3\pi}{2}}(P_0)$ . Точка  $B$  получена в результате поворота точки  $P_0$  на угол  $\pi$  (на угол  $180^\circ$ ) или на угол  $-\pi$  (на угол  $-180^\circ$ ), то есть  $B = R_O^\pi(P_0)$ ,  $B = R_O^{-\pi}(P_0)$ . Точка  $C$  получена в результате поворота точки  $P_0$  на угол  $\frac{3\pi}{2}$  (на угол  $270^\circ$ ) или на угол  $-\frac{\pi}{2}$  (на угол  $-90^\circ$ ), то есть  $C = R_O^{\frac{3\pi}{2}}(P_0)$ ,  $C = R_O^{-\frac{\pi}{2}}(P_0)$ .

Если точка  $P$ , двигаясь по единичной окружности, сделает полный оборот, то можно говорить, что угол поворота равен  $2\pi$  (то есть  $360^\circ$ ) или  $-2\pi$  (то есть  $-360^\circ$ ).

Если точка  $P$  сделает полтора оборота против часовой стрелки, то естественно считать, что угол поворота равен  $3\pi$  (то есть  $540^\circ$ ), если по часовой стрелке — то  $-3\pi$  (то есть  $-540^\circ$ ).

Величина угла поворота как в радианах, так и в градусах может выражаться любым действительным числом.

Угол поворота однозначно определяет положение точки  $P$  на единичной окружности. Однако любому положению точки  $P$  на окружности соответствует бесконечно много углов поворота. Например, на рисунке 17.7 точке  $P$  соответствуют такие углы поворота:  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{4} + 2\pi$ ,  $\frac{\pi}{4} + 4\pi$ ,  $\frac{\pi}{4} + 6\pi$  и т. д., а также  $\frac{\pi}{4} - 2\pi$ ,  $\frac{\pi}{4} - 4\pi$ ,  $\frac{\pi}{4} - 6\pi$  и т. д.

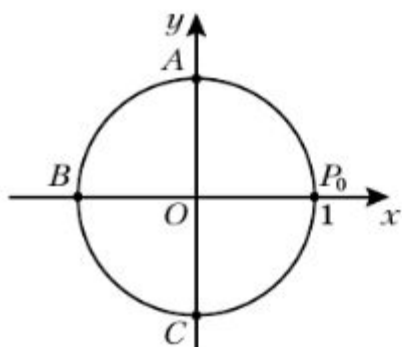


Рис. 17.6

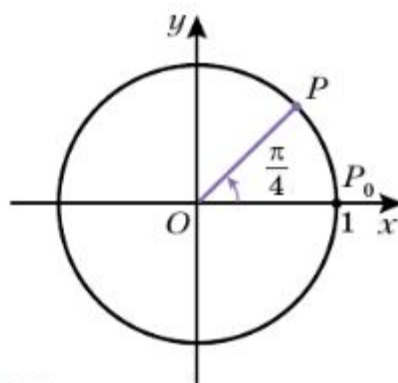


Рис. 17.7

Каждому действительному числу  $\alpha$  поставим в соответствие точку  $P$  единичной окружности такую, что  $P = R_O^\alpha(P_0)$ . Тем самым мы задали отображение множества действительных чисел на множество точек единич-

ной окружности. Заметим, что это отображение не является взаимно однозначным: каждой точке единичной окружности соответствует бесконечно много действительных чисел. Например, на рисунке 17.7 точке  $P$  соответствуют все действительные числа вида  $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Заметим, что множество чисел вида  $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , можно задать и иначе. Например:  $\frac{9\pi}{4} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , или  $-\frac{7\pi}{4} + 2\pi m$ ,  $m \in \mathbf{Z}$ .

## Практическая часть.

- ?** 1. Что называют углом в один радиан?  
2. Чему равна длина дуги окружности радиуса  $R$ , содержащей  $\alpha$  рад?  
3. Каким числом может выражаться угол поворота?  
4. Сколько точек определяет на единичной окружности угол поворота?  
5. Сколько углов поворота соответствуют положению точки на единичной окружности?

**407** Найти радианную меру угла, выраженного в градусах:  
1)  $40^\circ$ ; 2)  $120^\circ$ ; 3)  $150^\circ$ ; 4)  $75^\circ$ ; 5)  $32^\circ$ ; 6)  $140^\circ$ .

**408** Найти градусную меру угла, выраженного в радианах:  
1)  $\frac{\pi}{6}$ ; 2)  $\frac{\pi}{9}$ ; 3)  $\frac{3}{4}\pi$ ; 4) 2; 5) 3; 6) 0,36.

**416** Найти координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки  $(1; 0)$  на угол:

- 1)  $4\pi$ ; 2)  $-\frac{3}{2}\pi$ ; 3)  $-6,5\pi$ ; 4)  $\frac{\pi}{4}$ ; 5)  $\frac{\pi}{3}$ ; 6)  $-45^\circ$ .

**420** Найти координаты точки, полученной поворотом точки  $P(1; 0)$  на угол:

- 1)  $3\pi$ ; 2)  $-\frac{7}{2}\pi$ ; 3)  $-\frac{15}{2}\pi$ ; 4)  $5\pi$ ; 5)  $540^\circ$ ; 6)  $810^\circ$ .

**423** Найти все углы, на которые нужно повернуть точку  $P(1; 0)$ , чтобы получить точку с координатами:

- 1)  $(1; 0)$ ; 2)  $(-1; 0)$ ; 3)  $(0; 1)$ ; 4)  $(0; -1)$ .