Производные и дифференциалы.

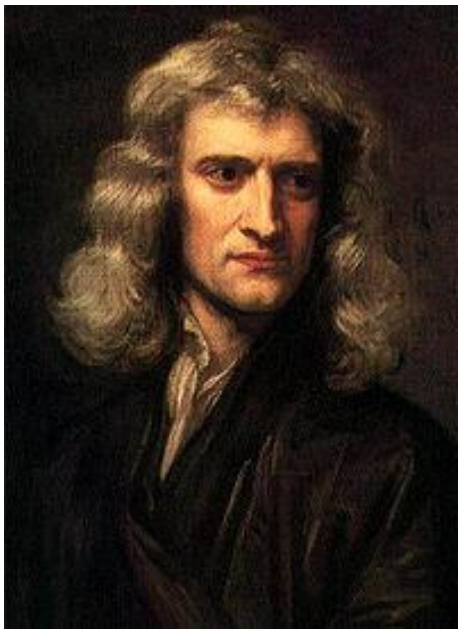
История возникновения дифференциального исчисления

Дифференциальное исчисление было создано Ньютоном и Лейбницем в конце 17 столетия на основе двух задач:

1) о разыскании касательной к произвольной линии
2) о разыскании скорости при произвольном законе движения.

Основной предпосылкой для создания дифференциального исчисления явилось введение в математику переменных величин (Декарт). В общих чертах построение дифференциального и интегрального исчислений было завершено в трудах Ньютона и Лейбница к концу 17 в., однако вопросы обоснования с помощью понятия предела были разработаны Коши лишь в начале 19 в.

04.01.1643 – 31.03.1727



Портрет 1689 года

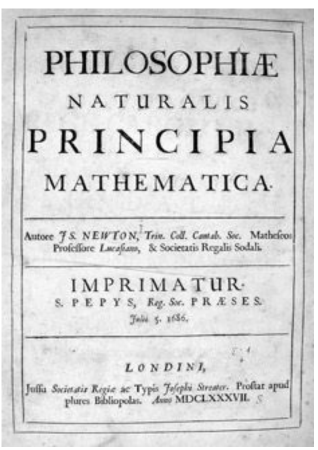
Английский физик, математик и астроном, один из создателей классической физики. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором он изложил закон всемирного тяготения и три закона механики, ставшие основой классической механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисления, теорию цвета и многие другие математические и физические теории.

Вулсторп. Дом, где родился Ньютон.

Тринити-колледж, в
котором учился Ньютон.

Почитаемый потомок «Яблони
Ньютона». Кембридж,
Ботанический сад.

Титульный лист
«Начал» Ньютона.

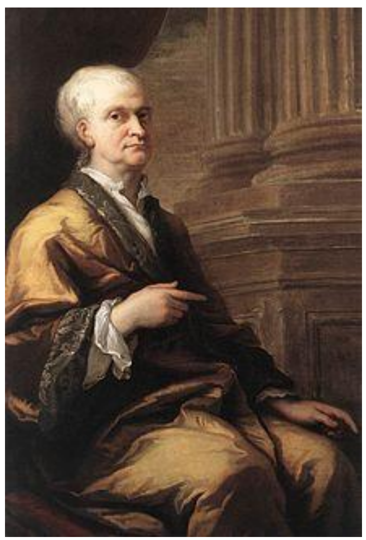


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos
Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud
plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.



Один из последних
портретов Ньютона (1712)

Могила Ньютона в
Вестминстерском
аббатстве.

01.07.1646 – 25.11.1716

Немецкий философ, логик, математик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед. Основатель и первый президент Берлинской Академии наук, иностранный член Французской Академии наук.

Лейбниц, независимо от Ньютона, создал математический анализ — дифференциальное и интегральное исчисления.

Лейбниц создал комбинаторику как науку; только он во всей истории математики одинаково свободно работал как с непрерывным, так и с дискретным. Он заложил основы математической логики, описал двоичную систему счисления с цифрами 0 и 1, на которой основана современная компьютерная техника.

Выдвинул в психологии понятие бессознательно «малых перцепций» и развил учение о бессознательной психической жизни.

Церковь и Школа Святого Фомы

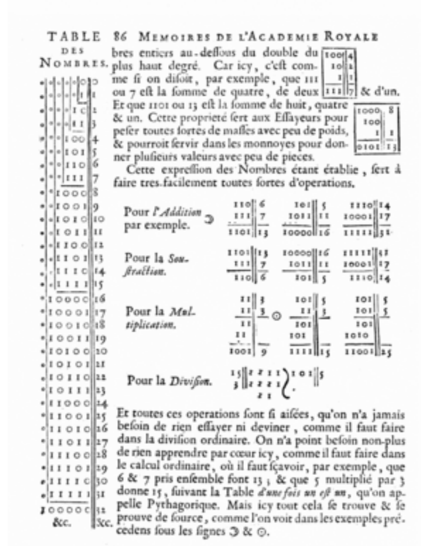


TABLE DES NOMBRES.

0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14
1111	15
10000	16
10001	17
10010	18
10011	19
10100	20
10101	21
10110	22
10111	23
11000	24
11001	25
11010	26
11011	27
11100	28
11101	29
11110	30
11111	31
100000	32
&c.	&c.

86 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

bres entiers au-dessous du double du plus haut degré. Car icy, c'est comme si on disoit, par exemple, que 111 ou 7 est la somme de quatre, de deux & d'un. Et que 1101 ou 13 est la somme de huit, quatre & un. Cette proprieté sert aux Essayeurs pour peser toutes sortes de masses avec peu de poids, & pourroit servir dans les monnoyes pour donner plusieurs valeurs avec peu de pieces.

Cette expression des Nombres étant établie, sert à faire tres-facilement toutes sortes d'operations.

Pour l'*Addition* par exemple.

Pour la *Soustraction.*

Pour la *Multiplication.*

Pour la *Division.*

Et toutes ces operations sont si aisées, qu'on n'a jamais besoin de rien essayer ni deviner, comme il faut faire dans la division ordinaire. On n'a point besoin non-plus de rien apprendre par cœur icy, comme il faut faire dans le calcul ordinaire, où il faut sçavoir, par exemple, que 6 & 7 pris ensemble font 13; & que 5 multiplié par 3 donne 15, suivant la Table *d'une fois un est un*, qu'on appelle Pythagorique. Mais icy tout cela se trouve & se prouve de source, comme l'on voit dans les exemples précedens sous les signes ☽ & ⊙.

Двоичная система счисления Лейбница. Страница из *Explication de l'Arithmétique Binaire*

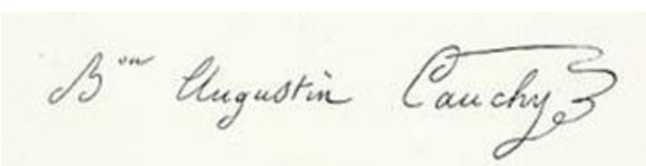
Дом Лейбница (Ганновер), в котором он жил с 1698 года вплоть до своей смерти

Альтдорфский университет

Копия механического калькулятора Лейбница

Памятник Готфриду Вильгельму Лейбницу в Лейпциге

21.08.1789 – 23.05.1857



Великий французский математик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий.

Разработал фундамент математического анализа, внёс огромный вклад в анализ, алгебру, математическую физику и многие другие области математики. Его имя внесено в список величайших ученых Франции, помещённый на первом этаже Эйфелевой башни.

Коши впервые дал строгое определение основным понятиям математического анализа — пределу, непрерывности, производной, дифференциалу, интегралу, сходимости ряда.

Курсы анализа Коши, основанные на систематическом использовании понятия предела, послужили образцом для большинства курсов позднейшего времени.

Политехническая Школа

Коллеж де Франс

Туринский университет

Сорбонна

- Определение производной
- Производная и дифференциал.
- Таблица производных.
- Необходимое условие дифференцируемости.
- Геометрический смысл производной.
- Физический смысл производной.
- Основные правила вычисления производных.

Производной функции *f(x)* в точке *x=a* называют предел отношения приращения функции к приращению аргумента когда аргумент *x* стремится к точке *a*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

С понятием производной тесно связано понятие дифференциала и понятие дифференцируемой функции.

Функция *f(x)* называется дифференцируемой в точке *x=a* если ее приращение в этой точке можно представить в виде суммы линейной функции и бесконечно малой величины более высокого порядка, чем эта линейная функция, т. е.

$$f(x)-f(a)=A(x-a)+\alpha(x)(x-a),$$

где предел функции $\alpha(x)$ при *x* ---> *a* равен нулю.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ имеет производную в точке $x=a$, тогда она дифференцируема в этой точке и постоянную A, входящую в формулу для приращения, можно взять равной $f'(x)$.

Обратно. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x=a$, тогда она имеет производную в этой точке и постоянная A, входящая в формулу для приращения, равна $f'(a)$.

Доказательство. Пусть функция имеет производную $f'(a)$, тогда

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)+\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – функция, имеющая при x ---> a предел, равный нулю. Из этого равенства находим

$$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+\alpha(x)(x-a),$$

что доказывает дифференцируемость функции с постоянной

$$A=f'(a).$$

Обратно, пусть функция дифференцируема, тогда

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + \alpha(x)(x-a),$$

где $\alpha(x)$ – функция, имеющая при *x* ---> *a* предел, равный нулю. Из этого соотношения получаем, что

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A + \alpha(x),$$

и в силу арифметических свойств предела

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}(A + \alpha(x)) = A + 0 = A,$$

т. е. производная функции существует и равна *A*.

Слагаемое $A(x-a)$, входящее в определение дифференцируемости, носит название главной линейной частью приращения функции в точке $x=a$ или дифференциалом функции в этой точке

$$df(a) = A(x-a).$$

Как было только что доказано, необходимым и достаточным условием существования дифференциала является существование производной функции в данной точке. При этом величина A равна производной функции так, что

$$df(a) = f'(a)(x-a).$$

Дифференциалом dx независимой переменной x в точке $x=a$ называется ее приращение

$$dx = x-a.$$

Таким образом, дифференциал функции

$$df(a) = f'(a)dx.$$

На практике обычно принято записывать все формулы, в которые входит производная или дифференциал, не вводя специального обозначения для фиксированной точки a , а использовать для нее традиционное обозначение x . В этом случае неявно подразумевается наличие еще одного символа для обозначения независимой переменной, который не пишется. Это позволяет записать последнюю формулу в виде равенства

$$df(x) = f'(x)dx.$$

$$(\text{const})' = 0 \qquad (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (a^{x})' = a^{x}\ln a \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x - a} =$$

$$= (\cos a)\lim_{x \to a} \frac{2\sin\frac{x-a}{2}}{x - a} = (\cos a)\lim_{x \to a} \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos a$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$d(\mathrm{const}) = 0$$

$$\mathrm{d}(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1} dx$$

$$\mathrm{d}(a^{x}) = a^{x} \ln a \; dx$$

$$\mathrm{d}(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}$$

$$d(\sin x) = \cos x \, dx$$

$$d(\cos x) = -\sin x \, dx$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{tg}\, x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$d(\mathrm{ctg}\, x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d(\mathrm{arctg}\, x) = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$d(\mathrm{arcctg}\, x) = -\frac{dx}{1+x^2}$$

$$d(\mathrm{sh}\, x) = \mathrm{ch}\, x \; dx$$

$$d(\mathrm{ch}\, x) = \mathrm{sh}\, x \; dx$$

$$d(\mathrm{th}\, x) = \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x}$$

$$d(\mathrm{cth}\, x) = -\frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x}$$

Теорема. Если функция дифференцируема, то она непрерывна.
Доказательство. Согласно доказанной выше теореме

$$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+\alpha(x)(x-a),$$

Поэтому

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\alpha(x)(x-a).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\Big(f(a)+f'(a)(x-a)+\alpha(x)(x-a)\Big)=$$

$$=\lim_{x\to a} f(a)+\lim_{x\to a} f'(a)\lim_{x\to a}(x-a)+\lim_{x\to a}\alpha(x)\lim_{x\to a}(x-a)=$$

$$f(a)+f'(a)\cdot 0+0\cdot 0=f(a).$$

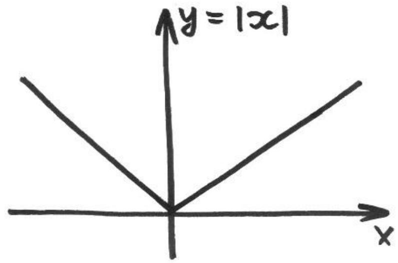
Так как предел функции равен значению в предельной точке, то функция непрерывна.

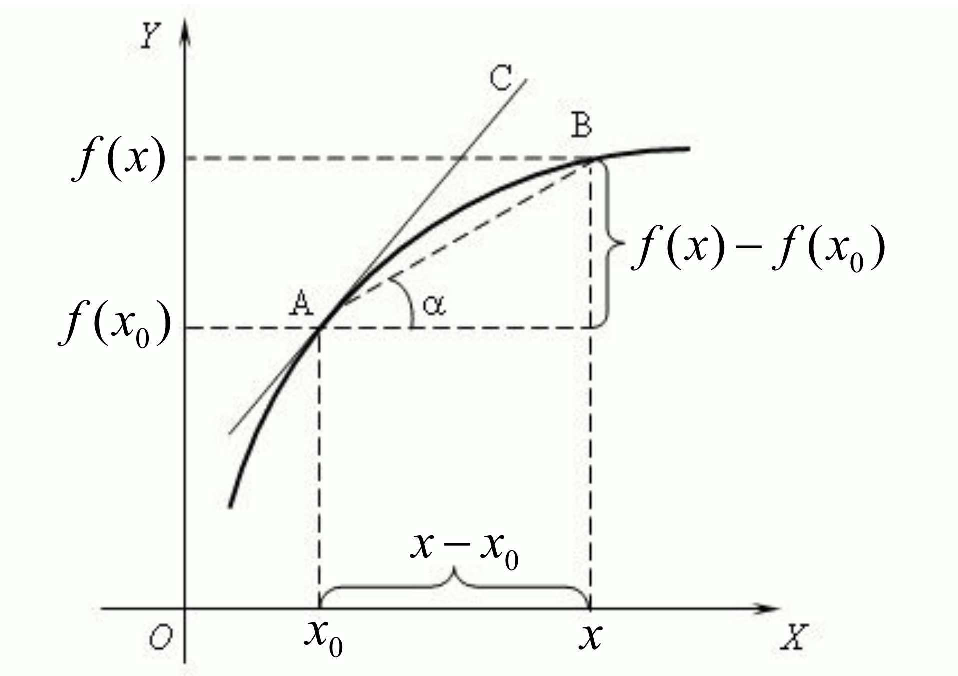
Обратное утверждение неверно. Непрерывная функция может не иметь производной. В этом можно убедиться на примере функции y=|x| в точке x=0. Для этой функции правый и левый пределы разностного отношения различны

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+0}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0+0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0+0}1=1,$$

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-0}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0-0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0+0}(-1)=-1.$$

Так как правый и левый пределы различны, то предел разностного отношения не существует, т. е. эта функция не дифференцируема в нуле.





Если существует предел углового коэффициента секущей AB при $x \to x_0$, то прямую AC, которая проходит через точку A и имеет угловой коэффициент k, равный этому пределу, называют в этом случае предельным положением секущей или касательной в точке $(x_0, f(x_0))$ графика функции.

$$k = \lim_{x\to x_0} k(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

Производная функции в заданной точке совпадает с тангенсом угла наклона касательной к графику этой функции в заданной точке.

График функции $y=f(x)$ имеет касательную в точке $(x_0,f(x_0))$ тогда и только тогда, когда существует производная $f'(x_0)$.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку (x_0,y_0) и имеющей угловой коэффициент k , имеет вид

$$y = y_0 + k(x - x_0).$$

Отсюда следует, что уравнение касательной к графику функции записывается в следующей форме

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Прямая, которая проходит через точку $(x_0, f(x_0))$ и перпендикулярна касательной в этой точке, называется нормалью. Известно, что для двух перпендикулярных прямых произведение их угловых коэффициентов равно –1.

Следовательно, если производная функции отлична от нуля, то уравнение нормали имеет вид

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Если же производная равна нулю то касательная параллельна оси Ox и уравнение нормали имеет вид

$$x = x_0.$$

Пусть материальная точка совершает прямолинейное движение и *x(t)* – ее координата, отсчитываемая от некоторой точки на прямой, принятой за начало координат. Средняя скорость движения за промежуток времени, прошедший с момента t_0 до момента t, равна

$$v_{cp} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}.$$

Предел средней скорости при t ---> t_0 называется в механике мгновенной скоростью. По определению производной, мгновенная скорость

$$v = \lim_{t \to t_0} v_{cp} = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0).$$

Эта интерпретация обобщается на скорость изменения любой физической величины.

Например, если q(t) – количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в момент времени t , то q' (t) – мгновенная скорость его изменения, т. е. сила тока в этот момент времени.

- Производная суммы.
- Производная разности.
- Производная произведения.
- Производная частного.
- Производная сложной функции.
- Производная обратной функции.
- Производная функции в параметрической форме.
- Производная «показательно-степенной» функции.

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

$$(f+g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)+g(x))-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-f(x_0))+(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0).$$

$$(f-g)'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$$

$$(f-g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{(f-g)(x)-(f-g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-g(x))-(f(x_0)-g(x_0))}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-f(x_0))-(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)-g'(x_0).$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$$(fg)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \right.$$

$$\left. + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x \to x_0} \left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) =$$

$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

$$(f/g)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$$(f/g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\Big[\big((f/g)(x)-(f/g)(x_0)\big)/(x-x_0)\Big]=\lim_{x\to x_0}\Big[\frac{1}{x-x_0}\Big(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\Big)\Big]=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\Big[\frac{1}{g(x)g(x_0)}\Big(\frac{f(x)g(x_0)-g(x)f(x_0)}{x-x_0}\Big)\Big]=\lim_{x\to x_0}\Big(\frac{1}{g(x)g(x_0)}\Big)\lim_{x\to x_0}\Big(\frac{f(x)g(x_0)-g(x)f(x_0)}{x-x_0}\Big)=$$

$$=\frac{1}{g^2(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-g(x)f(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{g^2(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-f(x_0))g(x_0)-f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}=$$

$$=\frac{1}{g^2(x_0)}\lim_{x\to x_0}\Big[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\Big]=$$

$$=\frac{1}{g^2(x_0)}\Big[\Big(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\Big)g(x_0)-f(x_0)\Big(\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\Big)\Big]=$$

$$=\frac{1}{g^2(x_0)}\Big[f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)\Big]=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Рассмотрим сложную функцию

$$F(x) = f(\varphi(x)).$$

Если существуют производные

$$\varphi'(x_0),\ f'(\varphi(x_0)),$$

то ее производная определяется формулой

$$F'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0).$$

Доказательство. Функция *f(t)* дифференцируема в точке

$$t_0 = \varphi(x_0)$$

поэтому по свойству дифференцируемой функции

$$f(t) - f(t_0) = f'(t_0)(t - t_0) + \alpha(t)(t - t_0),$$

где $\alpha(t)$ – функция, имеющая нулевой предел при t ---> t_0 . Доопределяя ее нулем при $t = t_0$, можно считать ее непрерывной при $t = t_0$ так, что при этом $\alpha(t_0)=0$.

Так как функция $t=\varphi(x)$ дифференцируема в точке $x=x_0$, то также

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0)(x - x_0) + \beta(x)(x - x_0),$$

где $\beta(t)$ – функция, имеющая нулевой предел при x ---> x_0 . Доопределяя ее нулем при $x = x_0$, можно считать ее непрерывной при $x = x_0$ так, что при этом $\beta(t_0)=0$.

$$
\begin{aligned}
&F(x) - F(x_0) = f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0)) = \\
&= f(t) - f(t_0) = f'(t_0)(t - t_0) + \alpha(t)(t - t_0) = \\
&= f'(\varphi(x_0))(\varphi(x) - \varphi(x_0)) + \alpha(\varphi(x))(\varphi(x) - \varphi(x_0)) = \\
&= f'(\varphi(x_0))(\varphi'(x_0)(x - x_0) + \beta(x)(x - x_0)) + \\
&+ \alpha(\varphi(x))(\varphi'(x_0)(x - x_0) + \beta(x)(x - x_0)) = \\
&= f'(\varphi(x_0))(\varphi'(x_0)(x - x_0) + \gamma(x)(x - x_0),
\end{aligned}
$$

где $\gamma(x) = f'(\varphi(x_0))\beta(x) + \alpha(\varphi(x))(\varphi'(x_0) + \beta(x)).$

Так как функция $t=\varphi(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то она непрерывна в этой точке. Функцию $\alpha(t)$ можно считать непрерывной в точке $t=t_0=\varphi(x_0)$. По теореме о непрерывности сложной функции $\alpha(\varphi(x))$ непрерывна при $x = x_0$, т. е.

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(\varphi(x))=\alpha(\varphi(x_0))=\alpha(t_0)=0.$$

Но тогда

$$\lim_{x\to x_0}\gamma(x)=f'(\varphi(x_0))\lim_{x\to x_0}\beta(x)+\lim_{x\to x_0}\alpha(\varphi(x))(\varphi'(x_0)+\lim_{x\to x_0}\beta(x))=$$

$$=f'(\varphi(x_0))\cdot 0+0\cdot(\varphi'(x_0)+0)=0.$$

Итак

$$F(x)-F(x_0)=A(x-x_0)+\gamma(x)(x-x_0),$$

где

$$A=f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0)$$

и

$$\lim_{x\to x_0}\gamma(x)=0.$$

Отсюда следует, что функция

$$F(x)=f(\varphi(x))$$

дифференцируема в точке

$$x=x_0$$

и ее производная

$$F'(x_0)=A=f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0).$$

Пусть функция

$$y = f(x)$$

монотонна и непрерывна в окрестности точки x_0 , в самой точке x_0 существует производная, которая не равна нулю. Тогда обратная функция

$$x = g(y)$$

также имеет производную в точке

$$y_0 = f(x_0)$$

и

$$\boxed{g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.}$$

Доказательство. Из условий теоремы вытекает непрерывность обратной функции, поэтому при y ---> y_0 величина x ---> x_0 . Положим

$$y = f(x)$$

и учтем, что при этом

$$y_0 = f(x_0), \;\; x = g(y), \;\; x_0 = g(y_0).$$

Тогда

$$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Это доказывает утверждение теоремы.

Рассмотрим функцию $$y = f(x)$$

заданную в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Пусть функция $x=\varphi(t)$ непрерывна и монотонна в окрестности точки $t=t_0$, пусть также существуют производные

$$\varphi'(t_0), \quad \psi'(t_0),$$

причем $\varphi'(t_0)\neq 0$. Тогда функция $y=f(x)$ имеет производную в точке $x_0= \varphi(t_0)$. При этом

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.}$$

Доказательство. В самом деле, при тех предположениях, которые сделаны, функция $x=\varphi(t)$ имеет обратную $t=\tau(x)$. Производную этой функции можно вычислить по правилу дифференцирования обратной функции:

$$\tau'(x_0) = 1/\varphi'(t_0).$$

Функцию

$$y = f(x) = \psi(t) = \psi(\tau(x))$$

мы можем рассматривать как сложную функцию. По правилу дифференцирования сложной функции

$$f'(x_0) = \psi'(\tau(x_0))\tau'(x_0) = \frac{\psi'(\tau(x_0))}{\varphi'(t_0)} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Показательно-степенной функцией условно называют функцию вида

$$\boxed{y = f(x)^{\varphi(x)}.}$$

Производную этой функции можно найти если предварительно сделать тождественные преобразования

$$y = f(x)^{\varphi(x)} = e^{\ln(f(x)^{\varphi(x)})} = e^{\varphi(x)\ln f(x)}$$

И затем использовать правило дифференцирования сложной функции

$$y' = (e^{\varphi(x)\ln f(x)})' = e^{\varphi(x)\ln f(x)}(\varphi(x)\ln f(x))' =$$

$$= f(x)^{\varphi(x)}(\varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)(\ln f(x))') =$$

$$= f(x)^{\varphi(x)}(\varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)(f'(x)/f(x)) =$$

$$= \boxed{f(x)^{\varphi(x)}(\ln f(x))\varphi'(x) + \varphi(x)f(x)^{\varphi(x)-1}f'(x).}$$

В результате получается простая формула, которую легко запомнить. Нужно продифференцировать функцию как показательную, затем как степенную и полученные результаты сложить.

- Дифференциал суммы.
- Дифференциал разности.
- Дифференциал произведения.
- Дифференциал частного.
- Дифференциал сложной функции.

Дифференциал суммы

$$d(f(x)+g(x))=(f(x)+g(x))'dx=f'(x)dx+g'(x)dx=df(x)+dg(x)$$

Дифференциал разности

$$d(f(x)-g(x))=(f(x)-g(x))'dx=f'(x)dx-g'(x)dx=df(x)-dg(x)$$

Дифференциал произведения

$$d(f(x)g(x))=(f(x)g(x))'dx=(f'(x)g(x)dx+f(x)g'(x))dx=$$

$$=(f'(x)dx)g(x)+f(x)(g'(x))dx)=(df(x))g(x)+f(x)(dg(x))$$

Дифференциал частного

$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'dx=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}dx=$$

$$=\frac{(f'(x)dx)g(x)-f(x)(g'(x)dx)}{g^2(x)}=\frac{(df(x))g(x)-f(x)(dg(x))}{g^2(x)}$$

$$df(\varphi(x)) = (f(\varphi(x)))'dx = (f'(\varphi(x))\varphi'(x))dx =$$
$$= f'(\varphi(x))(\varphi'(x)dx) = f'(\varphi(x))d\varphi(x)$$

Полученная формула допускает важную интерпретацию. Формула для дифференциала сложной функции оказывается одинаковой независимо от того, является ли φ независимой переменной или функцией.

Если φ является независимой переменной, то

$$df(\varphi) = f'(\varphi)d\varphi,$$

а если φ является функцией, то также

$$df(\varphi) = f'(\varphi)d\varphi,$$

но только в первой из этих формул $d\varphi$ представляет собой дифференциал независимой переменной, совпадающий с приращением этой переменной, а во второй формуле это дифференциал функции, который, вообще говоря, с приращением функции не совпадает. Хотя смысл этих формул получается различным, но форма у них одна и та же.

Это свойство называется инвариантностью формы дифференциала.