

Производные и дифференциалы.

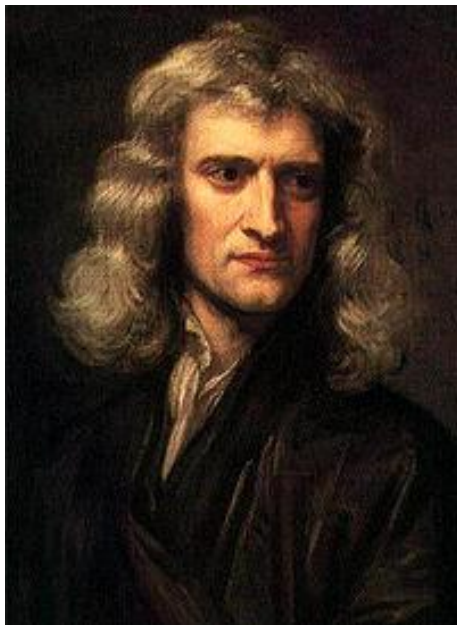
История возникновения дифференциального исчисления

Дифференциальное исчисление было создано Ньютоном и Лейбницем в конце 17 столетия на основе двух задач:

- 1) о разыскании касательной к произвольной линии
- 2) о разыскании скорости при произвольном законе движения.

Основной предпосылкой для создания дифференциального исчисления явилось введение в математику переменных величин (Декарт). В общих чертах построение дифференциального и интегрального исчислений было завершено в трудах Ньютона и Лейбница к концу 17 в., однако вопросы обоснования с помощью понятия предела были разработаны Коши лишь в начале 19 в.

04.01.1643 – 31.03.1727



Портрет 1689 года

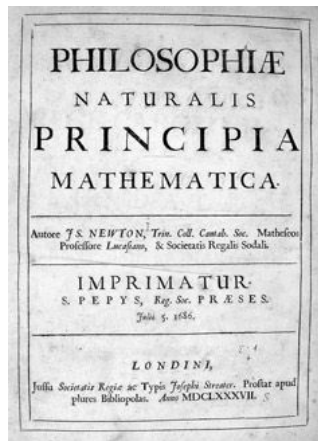
Английский физик, математик и астроном, один из создателей классической физики. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором он изложил закон всемирного тяготения и три закона механики, ставшие основой классической механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисления, теорию цвета и многие другие математические и физические теории.

Is. Newton

Вулсторп. Дом, где родился Ньютон.



Титульный лист
«Начал» Ньютона.



Один из последних
портретов Ньютона (1712)



Тринити-колледж, в
котором учился Ньютон.

Почитаемый потомок «Яблони
Ньютона». Кембридж,
Ботанический сад.



Могила Ньютона в
Вестминстерском
аббатстве.

01.07.1646 – 25.11.1716



A handwritten signature of Gottfried Wilhelm Leibniz in a cursive script, written in black ink.

Немецкий философ, логик, математик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед. Основатель и первый президент Берлинской Академии наук, иностранный член Французской Академии наук.

Лейбниц, независимо от Ньютона, создал математический анализ — дифференциальное и интегральное исчисления.

Лейбниц создал комбинаторику как науку; только он во всей истории математики одинаково свободно работал как с непрерывным, так и с дискретным. Он заложил основы математической логики, описал двоичную систему счисления с цифрами 0 и 1, на которой основана современная компьютерная техника.

Выдвинул в психологии понятие бессознательно «малых перцепций» и развил учение о бессознательной психической жизни.



Церковь и Школа Святого Фомы

TABLE 86 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
DES
NOMBRES plus haut degré. Car icy, c'est com-
me si on disoit, par exemple, que 111
ou 7 est la somme de quatre, de deux
Et que 1101 ou 13 est la somme de huit, quatre
& un. Cette propriété sert aux Effayeurs pour
peser toutes sortes de monnoies avec peu de poids,
& pourroit servir dans les monnoies pour don-
ner plusieurs valeurs avec peu de pieces.
Cette expression des Nombres étant établie, sert à
faire tres-facilement toutes sortes d'operations.

110	6	101	5	1110	14
111	7	1011	11	10001	17
1101	13	10000	16	11111	15
11011	15	100000	16	111111	17
111	7	1011	11	10001	17
1101	13	101	5	1110	14
11	3	101	5	101	5
11	3	101	5	101	5
11	3	101	5	101	5
1001	7	1111	15	10001	17
1101	13	101	5	1110	14
11011	15	101	5	11101	15
110111	17	101	5	111011	17
1101111	19	101	5	1110111	19
11011111	21	101	5	11101111	21
110111111	23	101	5	111011111	23
1101111111	25	101	5	1110111111	25
11011111111	27	101	5	11101111111	27
110111111111	29	101	5	111011111111	29
1101111111111	31	101	5	1110111111111	31
11011111111111	33	101	5	11101111111111	33
110111111111111	35	101	5	111011111111111	35
1101111111111111	37	101	5	1110111111111111	37
11011111111111111	39	101	5	11101111111111111	39
110111111111111111	41	101	5	111011111111111111	41
1101111111111111111	43	101	5	1110111111111111111	43
11011111111111111111	45	101	5	11101111111111111111	45
110111111111111111111	47	101	5	111011111111111111111	47
1101111111111111111111	49	101	5	1110111111111111111111	49
11011111111111111111111	51	101	5	11101111111111111111111	51
110111111111111111111111	53	101	5	111011111111111111111111	53
1101111111111111111111111	55	101	5	1110111111111111111111111	55
11011111111111111111111111	57	101	5	11101111111111111111111111	57
110111111111111111111111111	59	101	5	111011111111111111111111111	59
1101111111111111111111111111	61	101	5	1110111111111111111111111111	61
11011111111111111111111111111	63	101	5	11101111111111111111111111111	63
110111111111111111111111111111	65	101	5	111011111111111111111111111111	65
1101111111111111111111111111111	67	101	5	1110111111111111111111111111111	67
11011111111111111111111111111111	69	101	5	11101111111111111111111111111111	69
110111111111111111111111111111111	71	101	5	111011111111111111111111111111111	71
1101111111111111111111111111111111	73	101	5	1110111111111111111111111111111111	73
11011111111111111111111111111111111	75	101	5	11101111111111111111111111111111111	75
110111111111111111111111111111111111	77	101	5	111011111111111111111111111111111111	77
1101111111111111111111111111111111111	79	101	5	1110111111111111111111111111111111111	79
11011111111111111111111111111111111111	81	101	5	11101111111111111111111111111111111111	81
110111111111111111111111111111111111111	83	101	5	111011111111111111111111111111111111111	83
1101111111111111111111111111111111111111	85	101	5	1110111111111111111111111111111111111111	85
11011111111111111111111111111111111111111	87	101	5	11101111111111111111111111111111111111111	87
110111111111111111111111111111111111111111	89	101	5	111011111111111111111111111111111111111111	89
11011	91	101	5	1110111111111111111111111111111111111111111	91
110111	93	101	5	111011	93
11011	95	101	5	1110111	95
110111	97	101	5	111011	97
11011	99	101	5	1110111	99

Et toutes ces operations sont si aisées, qu'on n'a jamais
besoin de rien essayer ni deviner, comme il faut faire
dans la division ordinaire. On n'a point besoin non-plus
de rien apprendre par cœur icy, comme il faut faire dans
le calcul ordinaire, où il faut sçavoir, par exemple, que
6 & 7 pris ensemble font 13, & que 5 multiplié par 3
donne 15, suivant la Table d'une fois au 10^{me}, qu'on ap-
pelle Pythagorique. Mais icy tout cela se trouve & se
prouve de source, comme l'on voit dans les exemples préc.
éc. &c.



Дом Лейбница (Ганновер), в котором он жил с 1698 года вплоть до своей смерти



Альтдорфский университет

Двоичная система счисления Лейбница. Страница из *Explication de l'Arithmétique Binaire*



Копия механического калькулятора Лейбница



Памятник Готфриду Вильгельму Лейбницу в Лейпциге

21.08.1789 – 23.05.1857



Великий французский математик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий.

Разработал фундамент математического анализа, внёс огромный вклад в анализ, алгебру, математическую физику и многие другие области математики. Его имя внесено в список величайших ученых Франции, помещённый на первом этаже Эйфелевой башни.

Коши впервые дал строгое определение основным понятиям математического анализа — пределу, непрерывности, производной, дифференциалу, интегралу, сходимости ряда.

Курсы анализа Коши, основанные на систематическом использовании понятия предела, послужили образцом для большинства курсов позднейшего времени.

A handwritten signature in cursive script that reads "B^m Augustin Cauchy". The signature is written in dark ink on a light-colored background.



Политехническая Школа



Туринский университет



Сорбонна



Коллеж де Франс

- Определение производной
- Производная и дифференциал.
- Таблица производных.
- Необходимое условие дифференцируемости.
- Геометрический смысл производной.
- Физический смысл производной.
- Основные правила вычисления производных.

Производной функции $f(x)$ в точке $x=a$ называют предел отношения приращения функции к приращению аргумента когда аргумент x стремится к точке a

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

С понятием производной тесно связано понятие дифференциала и понятие дифференцируемой функции.

Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке $x=a$ если ее приращение в этой точке можно представить в виде суммы линейной функции и бесконечно малой величины более высокого порядка, чем эта линейная функция, т. е.

$$f(x) - f(a) = A(x - a) + \alpha(x)(x - a),$$

где предел функции $\alpha(x)$ при $x \rightarrow a$ равен нулю.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ имеет производную в точке $x=a$, тогда она дифференцируема в этой точке и постоянную A , входящую в формулу для приращения, можно взять равной $f'(x)$.

Обратно. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x=a$, тогда она имеет производную в этой точке и постоянная A , входящая в формулу для приращения, равна $f'(a)$.

Доказательство. Пусть функция имеет производную $f'(a)$, тогда

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – функция, имеющая при $x \rightarrow a$ предел, равный нулю.
Из этого равенства находим

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \alpha(x)(x - a),$$

что доказывает дифференцируемость функции с постоянной

$$A = f'(a).$$

Обратно, пусть функция дифференцируема, тогда

$$f(x) - f(a) = A(x - a) + \alpha(x)(x - a),$$

где $\alpha(x)$ – функция, имеющая при $x \rightarrow a$ предел, равный нулю.

Из этого соотношения получаем, что

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A + \alpha(x),$$

и в силу арифметических свойств предела

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (A + \alpha(x)) = A + 0 = A,$$

т. е. производная функции существует и равна A .

Слагаемое $A(x-a)$, входящее в определение дифференцируемости, носит название главной линейной частью приращения функции в точке $x=a$ или дифференциалом функции в этой точке

$$df(a) = A(x - a).$$

Как было только что доказано, необходимым и достаточным условием существования дифференциала является существование производной функции в данной точке. При этом величина A равна производной функции так, что

$$df(a) = f'(a)(x - a).$$

Дифференциалом dx независимой переменной x в точке $x=a$ называется ее приращение

$$dx = x - a.$$

Таким образом, дифференциал функции

$$df(a) = f'(a)dx.$$

На практике обычно принято записывать все формулы, в которые входит производная или дифференциал, не вводя специального обозначения для фиксированной точки a , а использовать для нее традиционное обозначение x . В этом случае неявно подразумевается наличие еще одного символа для обозначения независимой переменной, который не пишется. Это позволяет записать последнюю формулу в виде равенства

$$df(x) = f'(x)dx.$$

$$(\text{const})' = 0$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\text{tg } x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\text{ctg } x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\text{arctg } x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\text{arcctg } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\text{sh } x)' = \text{ch } x$$

$$(\text{ch } x)' = \text{sh } x$$

$$(\text{th } x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$$

$$(\text{cth } x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}$$

$$f(x) = \sin x$$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x - a} = \\ &= (\cos a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2}}{x - a} = (\cos a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos a \end{aligned}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$d(\text{const}) = 0 \quad d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} dx \quad d(a^x) = a^x \ln a \, dx \quad d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}$$

$$d(\sin x) = \cos x \, dx$$

$$d(\cos x) = -\sin x \, dx$$

$$d(\text{tg } x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$d(\text{ctg } x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d(\text{arctg } x) = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$d(\text{arcctg } x) = -\frac{dx}{1+x^2}$$

$$d(\text{sh } x) = \text{ch } x \, dx$$

$$d(\text{ch } x) = \text{sh } x \, dx$$

$$d(\text{th } x) = \frac{dx}{\text{ch}^2 x}$$

$$d(\text{cth } x) = -\frac{dx}{\text{sh}^2 x}$$

Теорема. Если функция дифференцируема, то она непрерывна.
Доказательство. Согласно доказанной выше теореме

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \alpha(x)(x - a),$$

Поэтому

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \alpha(x)(x - a).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left(f(a) + f'(a)(x - a) + \alpha(x)(x - a) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(a) + \lim_{x \rightarrow a} f'(a) \lim_{x \rightarrow a} (x - a) + \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = \\ &= f(a) + f'(a) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = f(a). \end{aligned}$$

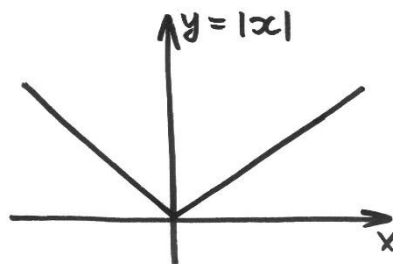
Так как предел функции равен значению в предельной точке, то функция непрерывна.

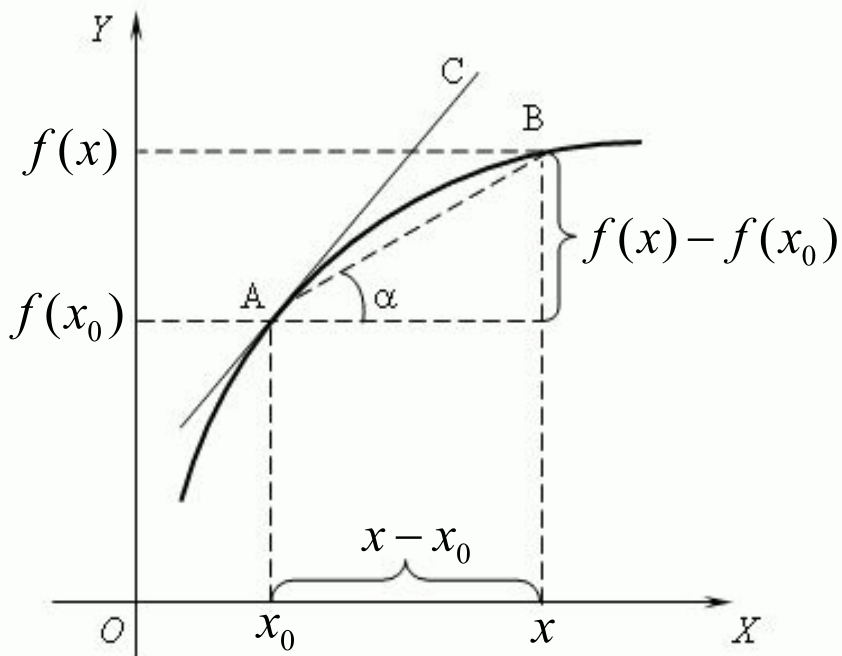
Обратное утверждение неверно. Непрерывная функция может не иметь производной. В этом можно убедиться на примере функции $y=|x|$ в точке $x=0$. Для этой функции правый и левый пределы разностного отношения различны

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} (-1) = -1.$$

Так как правый и левый пределы различны, то предел разностного отношения не существует, т. е. эта функция не дифференцируема в нуле.





Если существует предел углового коэффициента секущей AB при $x \rightarrow x_0$, то прямую AC , которая проходит через точку A и имеет угловой коэффициент k , равный этому пределу, называют в этом случае предельным положением секущей или касательной в точке $(x_0, f(x_0))$ графика функции.

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} k(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Производная функции в заданной точке совпадает с тангенсом угла наклона касательной к графику этой функции в заданной точке.

График функции $y=f(x)$ имеет касательную в точке $(x_0, f(x_0))$ тогда и только тогда, когда существует производная $f'(x_0)$.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку (x_0, y_0) и имеющей угловой коэффициент k , имеет вид

$$y = y_0 + k(x - x_0).$$

Отсюда следует, что уравнение касательной к графику функции записывается в следующей форме

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Прямая, которая проходит через точку $(x_0, f(x_0))$ и перпендикулярна касательной в этой точке, называется нормалью. Известно, что для двух перпендикулярных прямых произведение их угловых коэффициентов равно -1 .

Следовательно, если производная функции отлична от нуля, то уравнение нормали имеет вид

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Если же производная равна нулю то касательная параллельна оси Ox и уравнение нормали имеет вид

$$x = x_0.$$

Пусть материальная точка совершает прямолинейное движение и $x(t)$ – ее координата, отсчитываемая от некоторой точки на прямой, принятой за начало координат. Средняя скорость движения за промежуток времени, прошедший с момента t_0 до момента t , равна

$$v_{cp} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}.$$

Предел средней скорости при $t \rightarrow t_0$ называется в механике мгновенной скоростью. По определению производной, мгновенная скорость

$$v = \lim_{t \rightarrow t_0} v_{cp} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0).$$

Эта интерпретация обобщается на скорость изменения любой физической величины.

Например, если $q(t)$ – количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в момент времени t , то $q'(t)$ – мгновенная скорость его изменения, т. е. сила тока в этот момент времени.

- Производная суммы.
- Производная разности.
- Производная произведения.
- Производная частного.
- Производная сложной функции.
- Производная обратной функции.
- Производная функции в параметрической форме.
- Производная «показательно-степенной» функции.

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$\begin{aligned}(f + g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).\end{aligned}$$

$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$

$$\begin{aligned}(f - g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f - g)(x) - (f - g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - g(x)) - (f(x_0) - g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0)) - (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) - g'(x_0).\end{aligned}$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \right. \\ &+ \left. f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$$\begin{aligned} (f/g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{(f/g)(x) - (f/g)(x_0)}{x - x_0} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{x - x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \right) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(\frac{f(x)g(x_0) - g(x)f(x_0)}{x - x_0} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{g(x)g(x_0)} \right) \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)g(x_0) - g(x)f(x_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= \frac{1}{g^2(x_0)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - g(x)f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{g^2(x_0)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0) - f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \frac{1}{g^2(x_0)} \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] = \\ &= \frac{1}{g^2(x_0)} \left[\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) g(x_0) - f(x_0) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{g^2(x_0)} \left[f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0) \right] = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим сложную функцию

$$F(x) = f(\varphi(x)).$$

Если существуют производные

$$\varphi'(x_0), f'(\varphi(x_0)),$$

то ее производная определяется формулой

$$F'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0).$$

Доказательство. Функция $f(t)$ дифференцируема в точке $t_0 = \varphi(x_0)$

поэтому по свойству дифференцируемой функции

$$f(t) - f(t_0) = f'(t_0)(t - t_0) + \alpha(t)(t - t_0),$$

где $\alpha(t)$ – функция, имеющая нулевой предел при $t \rightarrow t_0$.
Доопределяя ее нулем при $t = t_0$, можно считать ее непрерывной при $t = t_0$ так, что при этом $\alpha(t_0) = 0$.

Так как функция $t = \varphi(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то также

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0)(x - x_0) + \beta(x)(x - x_0),$$

где $\beta(x)$ – функция, имеющая нулевой предел при $x \rightarrow x_0$.
Доопределяя ее нулем при $x = x_0$, можно считать ее непрерывной при $x = x_0$ так, что при этом $\beta(x_0) = 0$.

$$\begin{aligned}
F(x) - F(x_0) &= f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0)) = \\
&= f(t) - f(t_0) = f'(t_0)(t - t_0) + \alpha(t)(t - t_0) = \\
&= f'(\varphi(x_0))(\varphi(x) - \varphi(x_0)) + \alpha(\varphi(x))(\varphi(x) - \varphi(x_0)) = \\
&= f'(\varphi(x_0))(\varphi'(x_0)(x - x_0) + \beta(x)(x - x_0)) + \\
&\quad + \alpha(\varphi(x))(\varphi'(x_0)(x - x_0) + \beta(x)(x - x_0)) = \\
&= f'(\varphi(x_0))(\varphi'(x_0)(x - x_0) + \gamma(x)(x - x_0)),
\end{aligned}$$

где $\gamma(x) = f'(\varphi(x_0))\beta(x) + \alpha(\varphi(x))(\varphi'(x_0) + \beta(x))$.

Так как функция $t=\varphi(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то она непрерывна в этой точке. Функцию $\alpha(t)$ можно считать непрерывной в точке $t=t_0=\varphi(x_0)$. По теореме о непрерывности сложной функции $\alpha(\varphi(x))$ непрерывна при $x = x_0$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(\varphi(x)) = \alpha(\varphi(x_0)) = \alpha(t_0) = 0.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x) &= f'(\varphi(x_0)) \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(\varphi(x))(\varphi'(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x)) = \\ &= f'(\varphi(x_0)) \cdot 0 + 0 \cdot (\varphi'(x_0) + 0) = 0. \end{aligned}$$

Итак

$$F(x) - F(x_0) = A(x - x_0) + \gamma(x)(x - x_0),$$

где

$$A = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x) = 0.$$

Отсюда следует, что функция

$$F(x) = f(\varphi(x))$$

дифференцируема в точке

$$x = x_0$$

и ее производная

$$F'(x_0) = A = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0).$$

Пусть функция

$$y = f(x)$$

монотонна и непрерывна в окрестности точки x_0 , в самой точке x_0 существует производная, которая не равна нулю. Тогда обратная функция

$$x = g(y)$$

также имеет производную в точке

$$y_0 = f(x_0)$$

и

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Из условий теоремы вытекает непрерывность обратной функции, поэтому при $y \rightarrow y_0$ величина $x \rightarrow x_0$. Положим

$$y = f(x)$$

и учтем, что при этом

$$y_0 = f(x_0), \quad x = g(y), \quad x_0 = g(y_0).$$

Тогда

$$g'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Это доказывает утверждение теоремы.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$

заданную в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Пусть функция $x = \varphi(t)$ непрерывна и монотонна в окрестности точки $t = t_0$, пусть также существуют производные

$$\varphi'(t_0), \quad \psi'(t_0),$$

причем $\varphi'(t_0) \neq 0$. Тогда функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0 = \varphi(t_0)$. При этом

$$f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Доказательство. В самом деле, при тех предположениях, которые сделаны, функция $x=\varphi(t)$ имеет обратную $t=\tau(x)$. Производную этой функции можно вычислить по правилу дифференцирования обратной функции:

$$\tau'(x_0) = 1/\varphi'(t_0).$$

Функцию

$$y = f(x) = \psi(t) = \psi(\tau(x))$$

мы можем рассматривать как сложную функцию. По правилу дифференцирования сложной функции

$$f'(x_0) = \psi'(\tau(x_0))\tau'(x_0) = \frac{\psi'(\tau(x_0))}{\varphi'(t_0)} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Показательно-степенной функцией условно называют функцию вида

$$y = f(x)^{\varphi(x)}.$$

Производную этой функции можно найти если предварительно сделать тождественные преобразования

$$y = f(x)^{\varphi(x)} = e^{\ln(f(x)^{\varphi(x)})} = e^{\varphi(x)\ln f(x)}$$

И затем использовать правило дифференцирования сложной функции

$$\begin{aligned} y' &= (e^{\varphi(x)\ln f(x)})' = e^{\varphi(x)\ln f(x)} (\varphi(x)\ln f(x))' = \\ &= f(x)^{\varphi(x)} (\varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)(\ln f(x))') = \\ &= f(x)^{\varphi(x)} (\varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)(f'(x)/f(x))) = \\ &= f(x)^{\varphi(x)} (\ln f(x))\varphi'(x) + \varphi(x)f(x)^{\varphi(x)-1} f'(x). \end{aligned}$$

В результате получается простая формула, которую легко запомнить. Нужно продифференцировать функцию как показательную, затем как степенную и полученные результаты сложить.

- Дифференциал суммы.
- Дифференциал разности.
- Дифференциал произведения.
- Дифференциал частного.
- Дифференциал сложной функции.

Дифференциал суммы

$$d(f(x) + g(x)) = (f(x) + g(x))' dx = f'(x)dx + g'(x)dx = df(x) + dg(x)$$

Дифференциал разности

$$d(f(x) - g(x)) = (f(x) - g(x))' dx = f'(x)dx - g'(x)dx = df(x) - dg(x)$$

Дифференциал произведения

$$\begin{aligned} d(f(x)g(x)) &= (f(x)g(x))' dx = (f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x))dx = \\ &= (f'(x)dx)g(x) + f(x)(g'(x)dx) = (df(x))g(x) + f(x)(dg(x)) \end{aligned}$$

Дифференциал частного

$$\begin{aligned} d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' dx = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} dx = \\ &= \frac{(f'(x)dx)g(x) - f(x)(g'(x)dx)}{g^2(x)} = \frac{(df(x))g(x) - f(x)(dg(x))}{g^2(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}df(\varphi(x)) &= (f(\varphi(x)))' dx = (f'(\varphi(x))\varphi'(x))dx = \\ &= f'(\varphi(x))(\varphi'(x)dx) = f'(\varphi(x))d\varphi(x)\end{aligned}$$

Полученная формула допускает важную интерпретацию. Формула для дифференциала сложной функции оказывается одинаковой независимо от того, является ли φ независимой переменной или функцией.

Если φ является независимой переменной, то

$$df(\varphi) = f'(\varphi)d\varphi,$$

а если φ является функцией, то также

$$df(\varphi) = f'(\varphi)d\varphi,$$

но только в первой из этих формул $d\varphi$ представляет собой дифференциал независимой переменной, совпадающий с приращением этой переменной, а во второй формуле это дифференциал функции, который, вообще говоря, с приращением функции не совпадает. Хотя смысл этих формул получается различным, но форма у них одна и та же.

Это свойство называется инвариантностью формы дифференциала.