

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Підготувала
учениця 11 класу
КЗШ №42:
Воронова Юлія

$$\sum_{i=1}^n R_i$$

Під **функціональним рівнянням** розуміють рівняння, в яких шукані функції зв'язані з відомими функціями (однієї чи кількох змінних), а допомогою операції утворення складеної функції. Одними з найпростіших функціональних рівнянь є **рівняння Коші**:

Приклади:

$$1. \quad f(x + y) = f(x) + f(y);$$

$$2. \quad f(x + y) = f(xy);$$

$$3. \quad f(xy) = f(x)f(y);$$

$$4. \quad f(xy) = f(x) + f(y).$$

$$f(x\lambda) = f(x) + f(\lambda).$$

АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД

Цей метод полягає в тому, що розв'язок функціонального рівняння відшукується поступово для натуральних, цілих, раціональних і дійсних значень аргументу. Він вимагає, як правило, використання умови **неперервності функції**.

Приклад:

$$\begin{aligned}f(x + y) &= f(x) + f(y) \\x = y &= 0 \\f(0) &= f(0) + f(0) \\f(0) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x + y) &= f(x) + f(y) \\y &= -x \\f(x) + f(-x) &= f(x + (-x)) = f(0) = 0 \\f(x) &= \text{непарна функція}\end{aligned}$$

* Якщо $x < 0$, то $(-x) > 0$. Використавши, що f — непарна функція, дістаємо $f(x) = -f(-x) = -(\lambda(-x)) = \lambda x$. Отже, розв'язком рівняння є функція виду $f(x) = \lambda x$, визначена для всіх дійсних x .

МЕТОД ПІДСТАНОВОК

Цей метод полягає в тому, що застосовуючи замість змінних різні підстановки і комбінуючи одержані рівняння з вихідним, одержуємо алгебраїчне рівняння відносно шуканої функції. Слід підкреслити, що при використанні методу підстановок можуть виникнути зайві розв'язки. А тому перевірка є обов'язковою.

Приклад:

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)\cos(y)$$

$$x = 0, y = t,$$

$$x = \frac{\pi}{2} + t, y = \frac{\pi}{2},$$

$$x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2} + t,$$

$$f(t) + f(-t) = 2f(0)\cos t, \quad f(\pi + t) + f(t) = 2f\left(\frac{\pi}{2} + t\right)\cos\frac{\pi}{2}, \quad f(\pi + t) + f(-t) = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$$

$$\left. \begin{aligned} f(t) + f(-t) &= 2a \cos t, \\ f(\pi + t) + f(t) &= 0, \\ f(\pi + t) + f(-t) &= -2b \sin t, \end{aligned} \right\} f(t) = a \cos t + b \sin t.$$

ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД

Цей метод ми застосуємо для відшукування кореня функціонального рівняння $x = F(x)$.

Уведемо для цього рівняння поняття ітераційної послідовності.

Послідовність чисел x_0, x_1, \dots, x_n , позначена коротко символом $\{x_n\}$, будемо називати ітераційною, якщо для будь-якого номера $n \geq 1$ елемент x_n виражається через елемент x_{n-1} по рекуррентній формулі $x_n = F(x_{n-1})$, а в якості x_0 узятє будь-яке число з області задання функції $F(x)$.

Приклад:

$$2f(1-x) + 1 = xf(x),$$

$$x \rightarrow 1-x,$$

$$2f(x) + 1 = (1-x)f(1-x).$$

$$A = f(x), B = f(1-x),$$

$$\begin{cases} 2B + 1 = xA, \\ 2A + 1 = (1-x)B. \end{cases}$$

$$A = \frac{x-3}{x^2-x+4}, B = -\frac{x+2}{x^2-x+4},$$

$$\text{Звідси } f(x) = \frac{x-3}{x^2-x+4}.$$

МЕТОД ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Цей метод застосовується для знаходження диференційованих розв'язків функціональних рівнянь. Він полягає в тому, що за допомогою диференціювання вихідного рівняння одержують диференціальні рівняння, які можна розв'язати. Частині розв'язків таких рівнянь і будуть розв'язками заданого рівняння.

Приклад:

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$$

$$f'(xy) = y \cdot f(xy)$$

$$y \cdot f'(xy) = f(y) \cdot f'(x)$$

$$y \cdot f'(y) = \lambda \cdot f(y),$$

$$\lambda = f'(1)$$

$$f(t) = C \cdot t^\lambda$$

C – довільна стала.

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$$

$$C(xy)^\lambda = Cx^\lambda \cdot Cy^\lambda.$$

$$C=0 \text{ або } C=1$$

$f(x) = 0$ і $f(x) = 1$, де λ – довільна стала, вичерпують розв'язки рівняння.

$$f(x) = 2x + C,$$

МЕТОД ЗВЕРНЕННЯ ДО РІВНЯННЯ В СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЯХ

Приклад:

$$f(f(x)) - 3f(x) + 2x = 0$$

$$x = u_t$$

$$f(x) = u_{t+1}, \quad f(f(x)) = u_{t+2}$$

$$u_{t+2} - 3u_{t+1} + 2u_t = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$u_t = C_1 + C_2 \cdot 2^{t+1},$$

$$f(x) = 2x + C, \quad f(x) = x$$