ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Підготувала
учениця 11 класу
КЗШ № 42:
Воронова Юлія

$$\sum_{i=1}^{n} R_i$$

Під **функціональним рівнянням** розуміють рівняння, в яких шукані функції зв’язані з відомими функціями (однієї чи кількох змінних), а допомогою операції утворення складеної функції. Одними з найпростіших функціональних рівнянь є **рівняння Коші**:

Приклади:

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$;
2. $f(x+y) = f(xy)$;
3. $f(xy) = f(x)f(y)$;
4. $f(xy) = f(x) + f(y)$.

АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД

Цей метод полягає в тому, що розв'язок функціонального рівняння відшукується поступово для натуральних, цілих, раціональних і дійсних значень аргументу. Він вимагає, як правило, використання умови **неперервності функції**.

Приклад:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$
$$x=y=0$$
$$f(0)=f(0)+f(0)$$
$$f(0)=0$$

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$
$$y=-x$$
$$f(x)+f(-x)=f\big(x+(-x)\big)=f(0)=0$$

$f(x)$ – непарна функція

* Якщо $x<0$, то $(-x)>0$. Використавши, що f — непарна функція, дістаємо $f(x)=-f(-x)=-(\lambda(-x))=\lambda x$. Отже, розв'язком рівняння є функція виду $\boldsymbol{f(x)=\lambda x}$, визначена для всіх дійсних x.

МЕТОД ПІДСТАНОВОК

Цей метод полягає в тому, що застосовуючи замість змінних різні підстановки і комбінуючи одержані рівняння з вихідним, одержуємо алгебраїчне рівняння відносно шуканої функції. Слід підкреслити, що при використанні методу підстановок можуть виникнути зайві розв'язки. А тому перевірка є обов'язковою.

Приклад:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos(y)$$

$x=0, y=t,$ $f(t)+f(-t)=2f(0)\cos t,$	$x=\frac{\pi}{2}+t, y=\frac{\pi}{2},$ $f(\pi+1)+f(t)=2f(\frac{\pi}{2}+t)\cos\frac{\pi}{2},$	$x=\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{2}+t,$ $f(\pi+t)+f(-t)=2f(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2}+t)$

$$\left.\begin{aligned} &f(t)+f(-t)=2a\cos t,\\ &f(\pi+t)+f(t)=0,\\ &f(\pi+t)+f(-t)=-2b\sin t, \end{aligned}\right\} f(t)=a\cos t+b\sin t.$$

ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД

Цей метод ми застосуємо для відшукання кореня функціонального рівняння x = F (x).

Уведемо для цього рівняння поняття **ітераційної послідовності.**

Послідовність чисел x_0 , x_1 ,..., x_n, позначена коротко символом $\{x_n\}$, будемо називати ітераційною, якщо для будь-якого номера n $ 1 елемент xn виражається через елемент x_n - 1 по рекуррентній формулі x_n = F (x_n - 1), а в якості x_0 узяте будь-яке число з області завдання функції F (x).

Приклад:

$2\,f(1-x)+1=x\,f(x),$

$x\ \rightarrow\ 1\text{-}x\,,$

$2\,f(x)+1=(1-x)\,f(1-x).$

$A=f(x), B=f(1-x),$

$$\begin{cases} 2B+1=xA, \\ 2A+1=(1-x)B. \end{cases}$$

$A=\frac{x-3}{x^2-x+4}, \ B=-\frac{x+2}{x^2-x+4},$

Звідси $f(x)=\frac{x-3}{x^2-x+4}.$

МЕТОД ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Цей метод застосовується для знаходження диференційованих розв’язків функціональних рівнянь. Він полягає в тому, що за допомогою диференціювання вихідного рівняння одержують диференціальні рівняння, які можна розв’язати. Частині розв’язків таких рівнянь і будуть розв’язками заданого рівняння.

Приклад:

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$$

$$f'(xy) = y \cdot f(xy)$$

$$y \cdot f'(xy) = f(y) \cdot f'(x)$$

$$y \cdot f'(y) = \lambda \cdot f(y),$$

$$\lambda = f'(1)$$

$$f(t) = C \cdot t^{\lambda}$$

C– довільна стала.

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$$

$$C(xy)^{\lambda} = Cx^{\lambda} \cdot Cy^{\lambda}.$$

C=0 або C=1

$f(x) = 0$ і $f(x) = x^{\lambda}$, де λ - довільна стала, вичерпують розв’язки рівняння.

$f(x) = 2x + C,$

МЕТОД ЗВЕРНЕННЯ ДО РІВНЯННЯ В СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЯХ

Приклад:

$$f(f(x)) - 3f(x) + 2x = 0$$

$$x = u_t$$

$$f(x) = u_{t+1}, \quad f(f(x)) = u_{t+2}$$

$$u_{t+2} - 3u_{t+1} + 2u_t = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2$$

$$u_t = C_1 + C_2 \cdot 2^{t+1},$$

$$f(x) = 2x + C, \qquad f(x) = x$$