



Тема

# **ГИБРИДНЫЕ МОДЕЛИРУЮЩИЕ КОМПЛЕКСЫ**

В практике машинного моделирования сложных систем используется вычислительная техника трех типов: ЭВМ(электронная вычислительная машина), АВМ (аналоговая вычислительная машина) и ГВК (гибридный вычислительный комплекс). При этом ГВК, обеспечение которых ориентировано на решение задач машинного моделирования (например, по составу программного обеспечения, наличию операционной системы реального времени и диалога, интерфейсу с натурными блоками моделируемой системы **S** и т. д.), называются *гибридными* или *аналого-цифровыми моделирующими комплексами (АЦМК)*. Преимущества каждого типа вычислительных средств в первую очередь определяются спецификой основных свойств цифровых и аналоговых ЭВМ, используемых для моделирования конкретной системы **S**.

Рассмотрим достоинства и недостатки этих трех типов вычислительных средств (АВМ, ЭВМ и ГВК) применительно к машинному моделированию систем. В общем случае с любой задачей, которую решает АВМ, может справиться и достаточно мощная универсальная ЭВМ. Но на АВМ можно решать задачи моделирования систем быстрее и эффективнее.

**Основные черты**, характерные для АВМ:

- 1) зависимые переменные модели системы **S** представляются *непрерывном виде*;
- 2) *точность результатов* моделирования определяется качеством компонентов электрических схем АВМ;
- 3) возможно *одновременное выполнение* параллельных вычислительных операций, что особенно важно при моделировании сложных систем;
- 4) возможно выполнение операций в *реальном* или *ускоренном масштабе времени* (скорость вычислений ограничена главным образом частотными характеристиками элементов, а не сложностью решаемой задачи моделирования системы **S**);

5) операции сложения, вычитания, умножения, дифференцирования, интегрирования, генерирования непрерывных функций выполняются весьма эффективно, но имеются ограниченные возможности выполнения логических действий, накопления цифровых данных, обеспечения длительных задержек, обработки информации, которые весьма характерны для моделирования систем;

6) технология программирования состоит в основном в замещении элементами АВМ (такими, как операционные усилители, интеграторы и т. п.) соответствующих элементов моделируемой системы **S**;

7) к АВМ можно подключить блоки реальной системы **S** при комбинированном моделировании; пользователь имеет возможность в ходе машинного эксперимента на АВМ изменять значения установок, т. е. коэффициентов, устанавливаемых на АВМ, что обеспечивает более наглядное проведение эксперимента с моделью системы **S**.

## Характерные черты ЭВМ:

- 1) вся обработка промежуточной и результирующей информации в процессе моделирования системы **S** реализуется в *дискретном виде*;
- 2) все операции по работе с машинной моделью **Мм** выполняются *последовательно*;
- 3) *точность результатов* моделирования системы **S** определяется главным образом выбранными численными методами решения задачи и формой представления чисел;
- 4) *время решения* определяется сложностью задачи моделирования системы **S**, т. е. числом операций, необходимых для получения результатов моделирования;
- 5) наличие компромисса между временем решения и точностью результатов моделирования системы **S**;

6) применяется ограниченное число арифметических операций (сложение, вычитание, умножение и деление), но с помощью численных методов можно в модели на базе этих исходных операций реализовать и более сложные, например дифференцирование, интегрирование и т. д.;

7) для выполнения логических операций и принятия решений в процессе моделирования используются как цифровые, так и нецифровые данные;

8) предусматриваются операции с плавающей запятой, что устраняет трудности масштабирования модели;

9) методы программирования базируются как на ЯОН (часто не имеющих непосредственного отношения к задаче моделирования), так и на ЯИМ.

Современные ГВК представляют собой попытку объединить все лучшее, присущее цифровой и аналоговой технике, и избежать их недостатков. Некоторые задачи требуют для своего решения усиления цифровой части комплекса аналоговой частью для увеличения скорости вычислений и распараллеливания процессов.

При этом **цифровая часть ГВК** дает возможность:

- 1) управлять аналоговой частью машинной модели **Мм** при высоком быстродействии;
- 2) использовать устройства запоминания и хранения данных моделирования;
- 3) обеспечивать более высокую точность вычислений и применения логических операций при моделировании системы **S**.

## **Преимущества ГВК:**

1) сочетает быстродействие АВМ и точность ЭВМ, что позволяет расширить класс моделируемых объектов;

2) в процессе машинного моделирования позволяет использовать реальные технические средства и части исследуемой конкретной системы

**S**;

3) обеспечивает гибкость аналогового моделирования благодаря использованию логики и памяти ЭВМ;

4) увеличивает быстродействие ЭВМ за счет использования аналоговых подпрограмм;

5) делает возможной обработку входной информации о модели системы **S**, представленной частично в дискретной и непрерывной формах.



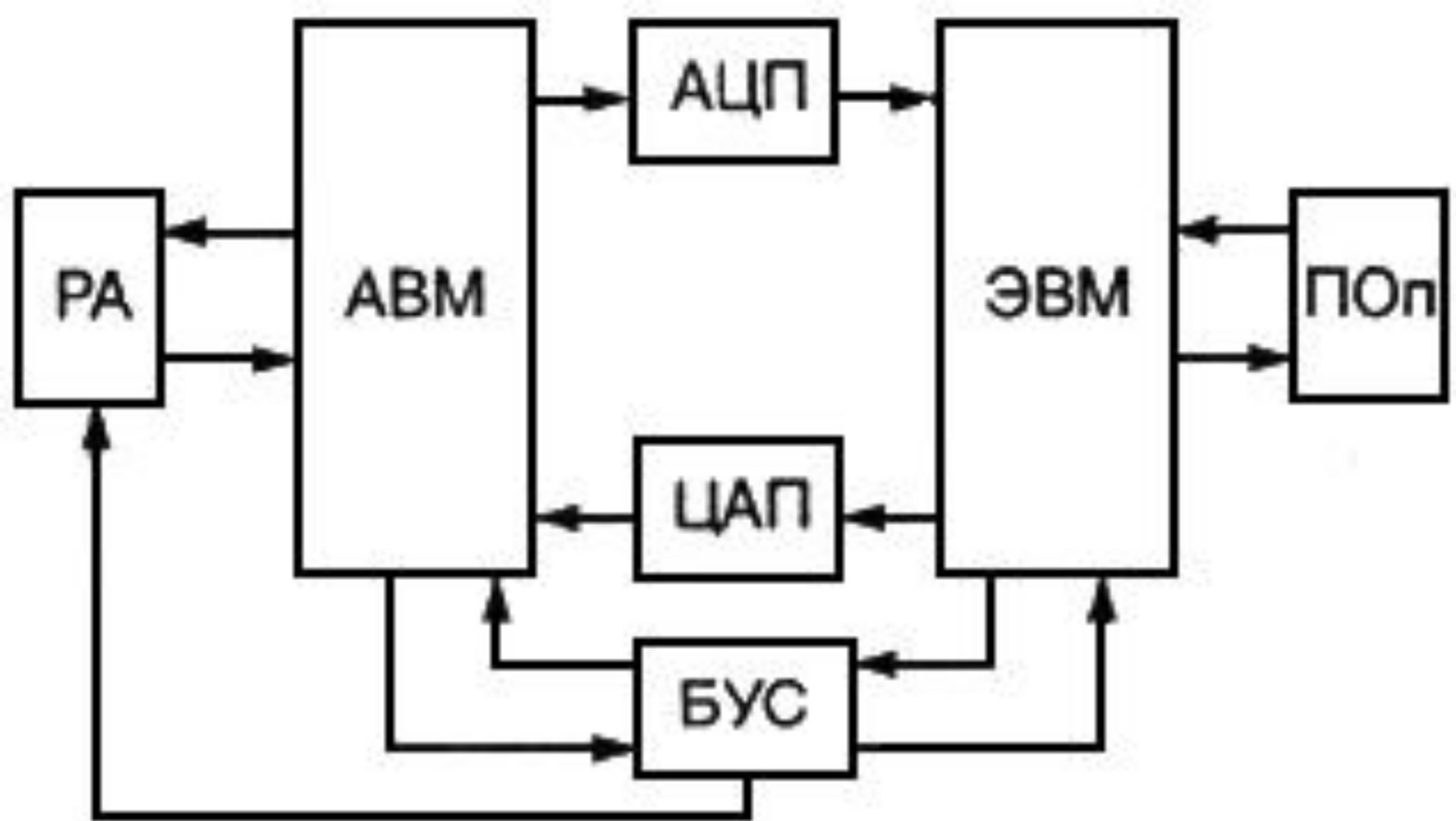
Говорить о **преимуществах** и **недостатках** ГВК можно применительно к машинному **моделированию конкретного класса систем S**. Для некоторых объектов использование при реализации модели системы ГВК аналогично их практической реализуемости.

В зависимости от специфики исследуемых объектов в ряде случаев эффективной оказывается ориентация при моделировании систем на ЭВМ. При этом надо иметь в виду, что АВМ значительно уступают ЭВМ по точности и логическим возможностям, но по быстродействию, схемной простоте, сопрягаемости с датчиками внешней информации превосходят или, по крайней мере, не уступают им.

Для сложных динамических объектов перспективным является моделирование на базе ГВК, которые реализуют преимущества цифрового и аналогового моделирования и позволяют наиболее эффективно использовать ресурсы ЭВМ и АВМ в составе единого комплекса. При использовании ГВК существенно **упрощаются вопросы взаимодействия с датчиками, установленными на реальных объектах**, что позволяет, в свою очередь, проводить комбинированное моделирование с использованием аналого-цифровой части модели и натурной части объекта. Такие гибридные моделирующие комплексы могут входить в состав многомашинного информационно-вычислительного комплекса коллективного пользования, что еще больше расширяет его возможности с точки зрения моделируемых классов больших систем.

Состав и структура технического обеспечения АЦМК определяется множеством задач, на решение которых он ориентирован. В общем виде структура технических средств представлена на рис. 4. Здесь приняты следующие обозначения: **АВМ** - аналоговая вычислительная машина; ЭВМ - цифровая электронная вычислительная машина; **АЦП** - аналого-цифровой преобразователь; **ЦАП** - цифро-аналоговый преобразователь; **БУС** - блок управляющих связей; **РА** - реальная аппаратура; **ПОп** - пульт оператора.

Возможны различные варианты построения многомашинных комплексов, в которых используется по несколько АВМ и ЭВМ. Такие варианты обычно выбираются в случаях, когда не хватает производительности одного вычислителя или есть необходимость разделить средства выполнения отдельных задач моделирования системы **S** из-за ее функциональных или структурных особенностей.



**Рис. 4. Структура технических средств аналого-цифрового моделирующего комплекса**

Преобразователи АЦП и ЦАП являются средствами организации информационных связей между АВМ и ЭВМ, т. е. средствами для обмена информацией между цифровой и аналоговой частями модели системы **S**. Подготовка, запуск, останов и синхронизация элементов АЦМК в процессе решения задачи моделирования, как правило, осуществляются ЭВМ. Для реализации этих функций применяются специальные управляющие шины и аппаратура стыковки АВМ и ЭВМ по управлению, которые объединены на рассматриваемой схеме в БУС. Наряду с цифровой и аналоговой частями модели исследования на АЦМК могут использоваться реальные элементы исследуемой системы **S**. Исследования такого типа называются *полунатурным моделированием*.

Оператор управляет процессом моделирования с помощью средств, номенклатура которых определяется задачами, решаемыми на АЦМК. В состав ПОп могут входить печатающие устройства различного типа, дисплеи, графопостроители, самописцы и т. д., может иметь место специализированная клавиатура для передачи управляющих команд типа "Запуск", "Останов" и т. п. Таким образом, ПОп в АЦМК представляет собой набор технических средств для организации диалога "оператор - машинный эксперимент".

При распределении задачи моделирования системы  $S$  по средствам, входящим в состав АЦМК, могут быть выделены три типа комплексов.

**Аналого-ориентированные комплексы** используются в тех случаях, когда не требуется высокая точность результатов и когда моделируемая система **S** реализуема аналоговыми средствами. Системы такого класса исследуются на АЦМК, в которых цифровые средства необходимы на этапе подготовки модели для автоматизации набора задачи, накопления и обработки результатов моделирования. Сама же модель системы **S** реализуется исключительно на аналоговом вычислителе (аналоговое моделирование). Наряду с указанными функциями ЭВМ может выполнять задачи управления АВМ в процессе реализации модели. АЦМК с цифровым управлением и цифровой логикой способны воспроизводить более сложные модели по сравнению со стандартными АВМ. К аналого-ориентированным АЦМК относятся также комплексы, в которых ЦВМ применяются в качестве периферийного оборудования. В таких АЦМК малая ЭВМ используется с мощной АВМ для решения 170 специальных задач моделирования, решение которых было бы трудно или невозможно с помощью аналоговой аппаратуры.

К цифро-ориентированным комплексам можно отнести универсальные ЭВМ, где для отображения и регистрации результатов используются аналоговые средства - осциллографы, самописцы и т. д. В таких АЦМК модель  $M_M$  полностью реализуется цифровыми методами. Возможны варианты построения АЦМК для полунатурного моделирования, когда реальная аппаратура стыкуется с ЭВМ через аналоговый вычислитель. В цифро-ориентированных АЦМК может иметь место распараллеливание отдельных вычислительных процедур в процессе работы с цифровой моделью  $M_M$  за счет реализации их аналоговыми средствами.



Сбалансированные (универсальные) комплексы являются самым мощным средством для решения задач аналого-цифрового моделирования. В их состав входят средства, с помощью которых могут эффективно решаться не только аналого-цифровые задачи, но и задачи аналоговые с цифровым управлением, а также задачи цифрового моделирования. На комплексах такого типа широко используется диалог "оператор - машинный эксперимент", т. е. могут запоминаться, отображаться и регистрироваться результаты решений, оперативно вноситься изменения в модель  $M_M$  и осуществляться ее запуск. Другими словами, имеется возможность реализовать итеративный процесс исследования, сходящийся к получению искомого результата, что особенно важно при автоматизации проектирования системы  $S$  на базе машинного моделирования.

Задача построения технического обеспечения АЦМК в настоящее время сводится к выбору стандартной аппаратуры, разработке информационных и управляющих связей, реализуемых программно. Такой подход стал возможным благодаря тому, что сейчас промышленность выпускает широкий перечень ЭВМ, в которых предусмотрена возможность неавтономной работы. Это условие важно для построения АЦМК, так как в противном случае необходимы доработки универсальных вычислителей, создание нестандартного оборудования, что, как правило, делать нежелательно. При создании АЦМК должна быть возможность стыковки с периферийными устройствами широких функциональных возможностей: аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразователи, коммутаторы, регистры и т. д.

Современные АВМ, как правило, позволяют осуществлять цифровое управление. Принципиальных трудностей в построении технического обеспечения АЦМК нет. Однако, несмотря на широкие возможности, открывающиеся с выпуском большой номенклатуры цифровых и аналоговых вычислительных устройств, задача выбора комплекса технических средств АЦМК представляет собой сложную проблему, при решении которой необходимо ответить на следующие вопросы.

Следует ответить на вопросы: требуется ли работа в реальном масштабе времени, какие устройства должны быть включены в гибридный вычислительный контур, какие функции по управлению должны быть возложены на ЭВМ. При определении технологии проведения исследований на АЦМК выбирается номенклатура устройств отображения и регистрации, средств ведения диалога, находятся конфигурация системы связи, алгоритмы обмена и синхронизации работы отдельных устройств. Важными моментами при построении АЦМК являются выбор АЦП и ЦАП, количество каналов информационных связей, требования к точности и быстродействию.

Прежде всего нужно обосновать преимущества гибридного моделирования системы перед аналоговым или цифровым. При этом задачи, для которых проектируется АЦМК, должны быть достаточно важными, чтобы оправдать затраты на его создание. Решая вопрос о том, должен ли комплекс быть аналого-ориентированным, цифро-ориентированным или сбалансированным, необходимо провести выбор ЭВМ средней, малой или большой мощности. При достаточно высоких требованиях к скорости реализации цифровой части модели системы можно пойти по пути создания многопроцессорного комплекса. Необходимо рассмотреть требования к архитектурным особенностям ЭВМ: длине слова, возможностям системы прерывания, наличию аппаратных средств для работы с плавающей запятой, организации памяти и т. д. При выборе АВМ необходимо учитывать полосу пропускания, эффективность управления от ЭВМ, возможности автоматического набора, точностные характеристики.

Сложность перечисленных вопросов заключается в том, что большинство из них взаимосвязаны. От правильности их решения зависит эффективность моделирования систем на АЦМК, точность и достоверность результатов моделирования конкретной системы **S**.

Процедура компоновки технического обеспечения АЦМК представляет собой достаточно сложный неформальный процесс, в котором качество созданного комплекса в значительной степени зависит от интуиции, опыта и способностей его разработчиков. Данная процедура включает в себя этап логической, конструктивной и электрической компоновки.

Логическая компоновка подразумевает выбор минимального состава устройств, агрегатов и модулей из номенклатуры определенных семейств вычислительной техники, обеспечивающих выполнение функциональных задач, стоящих перед АЦМК, а также объединение их в единый комплекс, работающий под управлением общего программного обеспечения. При конструктивной компоновке решаются вопросы размещения устройств в типовых конструктивных элементах. Электрическая компоновка предполагает выбор линий связи для конструктивно скомпонованных элементов и порядок их соединений. Исходным материалом для логической компоновки являются агрегаты и модули технического обеспечения.

Опишем вариант построения АЦМК для решения задачи моделирования системы  $S$  на базе управляющей ЭВМ, которая имеет развитый интерфейс "Общая шина" (ОШ), т. е. на них могут быть возложены функции управления. Возможности расширения памяти и быстродействия позволяют достаточно эффективно использовать управляющие ЭВМ для реализации расчетных процедур в процессе моделирования различных систем. Мощная операционная система этих ЭВМ позволяет на базе стандартных средств реализовать процедуры генерации модели  $M_M$  на этапе ее подготовки.



Рассмотрим особенности компоновки устройств организации информационных и управляющих связей между ЭВМ и АВМ. Вариант использования ЭВМ в качестве цифровой части АЦМК состоит в применении для этих целей измерительно-вычислительных комплексов (ИВК). Развитие персональных и микроЭВМ, модульных программно-аппаратных средств, построенных на их базе для целей автоматизации научных исследований, создало благоприятные технико-экономические условия для компоновки модульных информационно-измерительных систем и ЭВМ в единые ИВК.

В общем случае ИВК - это автоматизированное средство измерения и обработки информации, предназначенное для исследования, контроля и испытаний сложных объектов и представляющее собой совокупность программно-управляемых технических средств, имеющих блочно-модульную структуру, определенную организацию и связи, обеспечивающие получение, преобразование, накопление, обработку и выдачу измерительной, командной и другой информации в соответствующей форме, в том числе для воздействия на объект исследования. При построении АЦМК на базе ИВК реальная аппаратура и АВМ выступают в качестве управляемого исследуемого объекта.

**Пример 1.** Рассмотрим возможности построения технического обеспечения АЦМК на базе ИВК (рис. 5.5). В данной структуре через интерфейс ОШ объединены следующие устройства: П - процессор, ОЗУ - оперативное запоминающее устройство, Д - дисплей, ПР - принтер, Н - накопители. Совокупность данных устройств представляет собой вычислительный комплекс. Связь с АВМ осуществляется через два крейта: устройство управления - КК1 - контролер крейта № 1, АЦП - аналого-цифровой преобразователь, К - коммутатор, ЦАП1 и ЦАП2 - цифро-аналоговые преобразователи, РВИС - регистр ввода инициативных сигналов. В данном варианте стыковки с АВМ аппаратура крейта № 2 - КК2, входящего в состав ИВК, не используется, за исключением ЦАП2, перенесенного в крейт № 1. Управление процессом моделирования на АЦМК осуществляется с пульта управления ПУ.

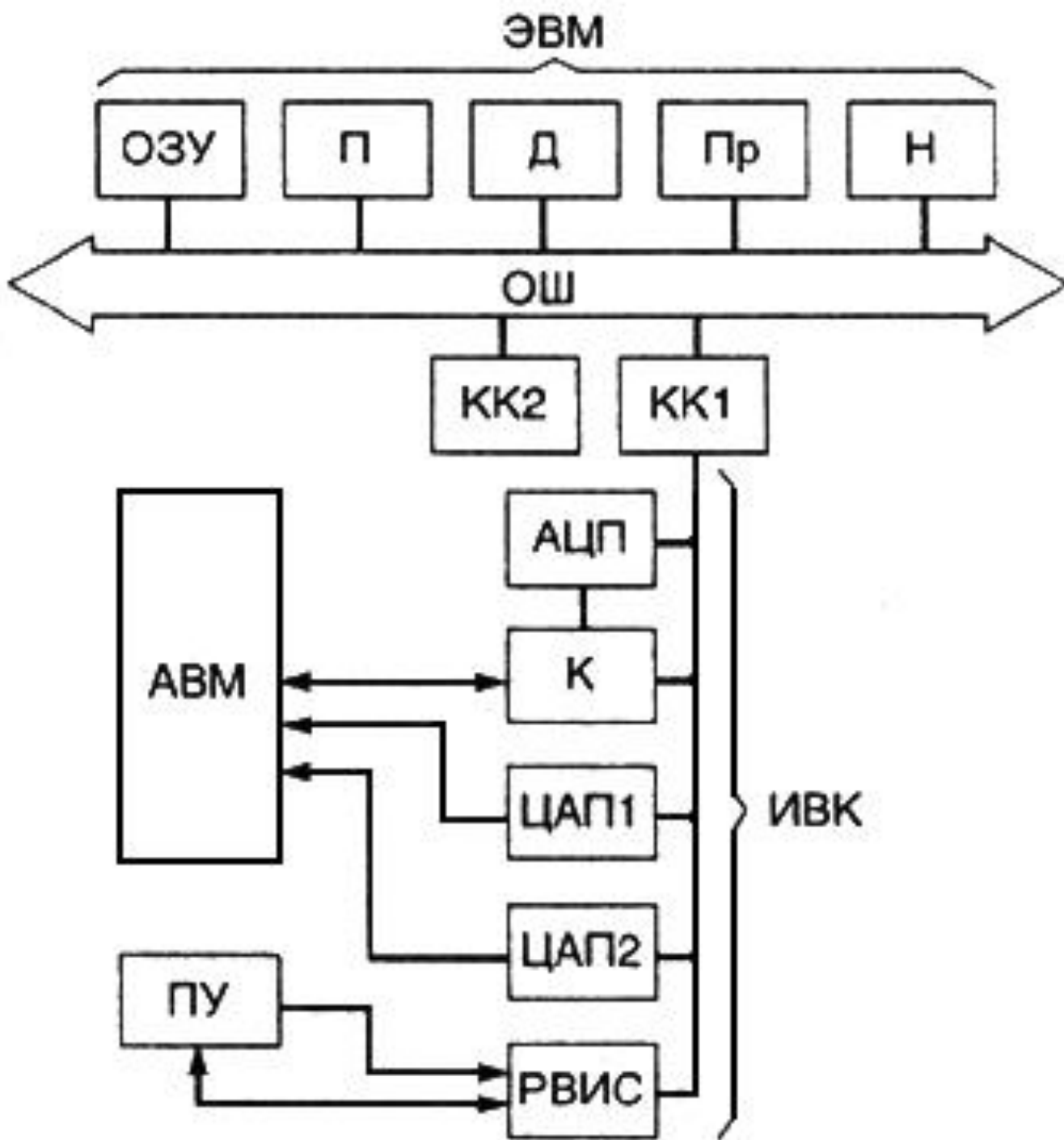


Рис. 5. Структура технического обеспечения АЦМК на базе ИВК

Развитая операционная система современных ЭВМ позволяет реализовать на их основе процедуры генерации цифровой части модели  $M_M$ , организовать диалоговые режимы на этапе подготовки машинного эксперимента и обработки его результатов. В то же время свойства ИВК как управляющего комплекса дают возможность управлять процессом моделирования системы  $S$ , осуществлять сбор, накопление и обработку результатов моделирования.

При рассмотрении приведенных примеров структур комплексов (рис. 5.4 и 5.5) не ставилась цель показать процесс проектирования технического обеспечения АЦМК. Данные структуры приводились как возможные варианты реализации АЦМК для моделирования систем.

Программное обеспечение (ПО) АЦМК (рис. 6) строится по модульному принципу и включает в себя комплексы программ: планирования машинных экспериментов, построения модели системы, проведения машинных экспериментов, обработки результатов моделирования. Наиболее перспективной формой реализации ПО АЦМК является построение его в виде набора пакетов прикладных программ (ППП), снабженных развитыми средствами генерации, модификации и расширения.

Функциональное разбиение ПО может быть произведено с привязкой его к составным частям АЦМК. В этом случае в ПО включаются ППП пользователей, ПО аппаратуры КАМАК, ППП управления АВМ, проблемно-ориентированное ПО ЭВМ.

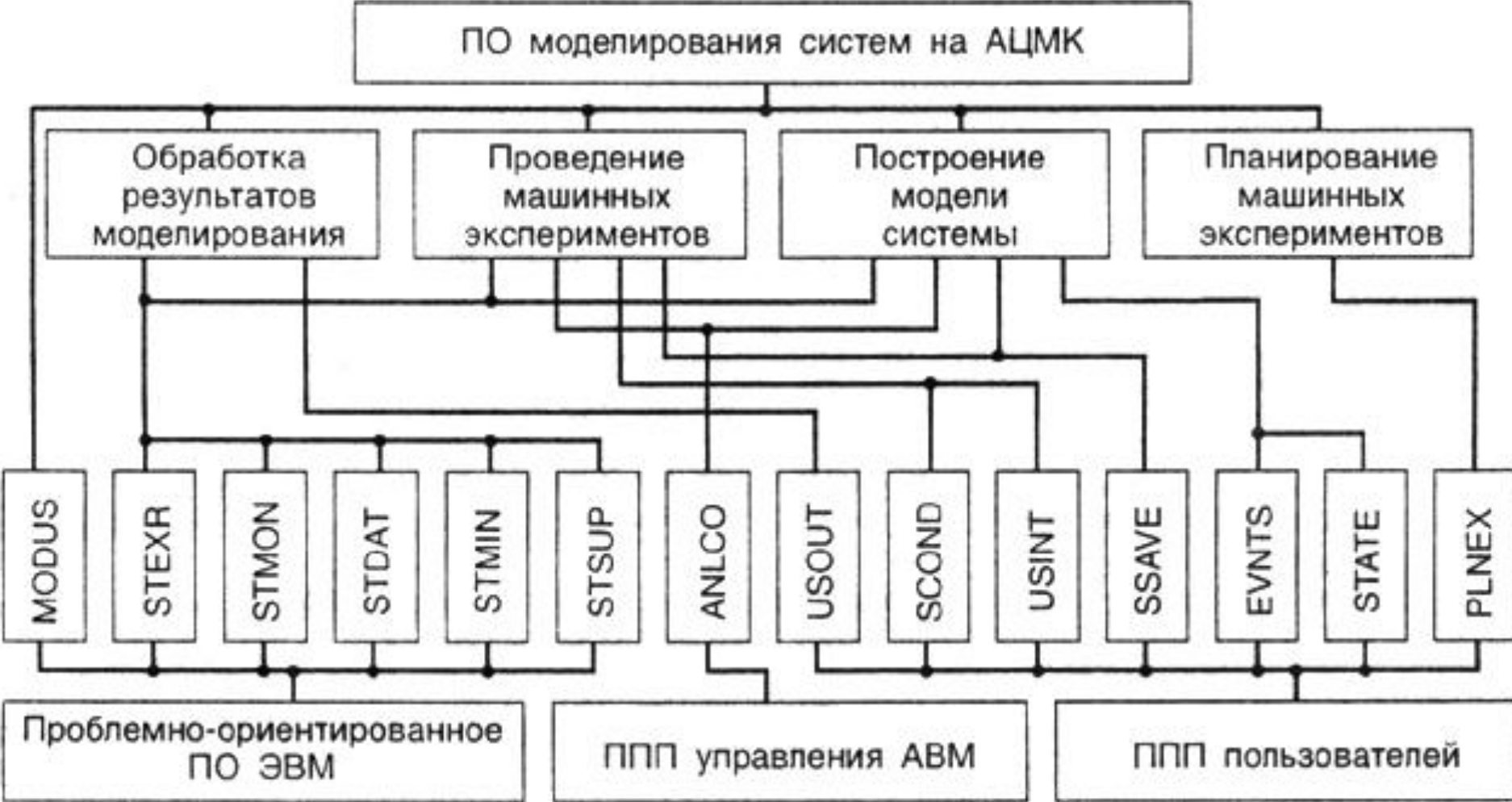


Рис. 6. Распределение задач моделирования по средствам АЦМК

**Пример 2.** Рассмотрим состав ПО АЦМК. В зависимости от вида модели конкретной системы **S** ППП пользователя включает в себя следующие программы:

**STATE** - программа, содержащая соотношения между переменными и параметрами и задающая описание непрерывной части модели системы;

**SCOND** - программа слежения за значениями дискретных переменных и определения наступления событий в модели системы;

**SSAVE** - программа сбора информации о состояниях моделируемой системы;

**EVNTS** - программа реализации событий, содержащая алгоритмы обработки событий в модели системы;

**USINT** - программа определения начальных значений переменных модели (может также переопределять значения переменных в процессе моделирования);

**USOUT** - программа вывода результатов моделирования, не предусмотренных системой моделирования;

**PLNEX** - ППП, позволяющий планировать эксперимент, собирать и обрабатывать статистическую информацию о результатах моделирования системы.

Решая задачу моделирования конкретной системы **S**, пользователь может отказаться от использования тех или иных программ.

**MONIT** - программа-монитор, которая представляет собой совокупность программ, решающих общие задачи управления аппаратурой и обработки прерываний в программах, написанных на языке ЯОН. В состав программы-монитора входят управляющая программа, предназначенная для организации работы с прерываниями от аппаратуры и блочного обмена данными в рамках операционной системы, и пакет программ, обеспечивающих выполнение основных функций из программ, написанных на ЯОН.

Программное обеспечение АВМ представляется в виде ППП ANLCO, позволяющего проводить автоматическую настройку блоков АВМ, имитирующих непрерывную часть в модели системы и управление этой настройкой и обменом информацией с другими составляющими АЦМК.



Наиболее сложная часть ПО - комплекс программных средств ЭВМ. Не останавливаясь на рассмотрении операционной системы *MODOS*, в рамках которой реализуется модель системы *S*, рассмотрим состав проблемно-ориентированного ПО ЭВМ, позволяющего управлять процессом моделирования и обеспечивающего при этом взаимодействие пользователя с моделью. В его состав входят:

**STSUP** - супервизор комплекса, осуществляющий управление процессами моделирования системы по командам пользователя;

**STMIN** - интерактивный монитор комплекса, позволяющий в процессе моделирования системы в режиме дружественного интерфейса выполнять отображение объектов модели, изменение содержимого модели системы в процессе моделирования и т. п.;

**STDAT** - модуль, выполняющий инициализацию объектов системы моделирования;

**STMON** - программный монитор комплекса, обеспечивающий реализацию системных функций в программном режиме по запросам программ модели;

**STEXR** - управляющий модуль комплекса, осуществляющий контроль за процессом моделирования.

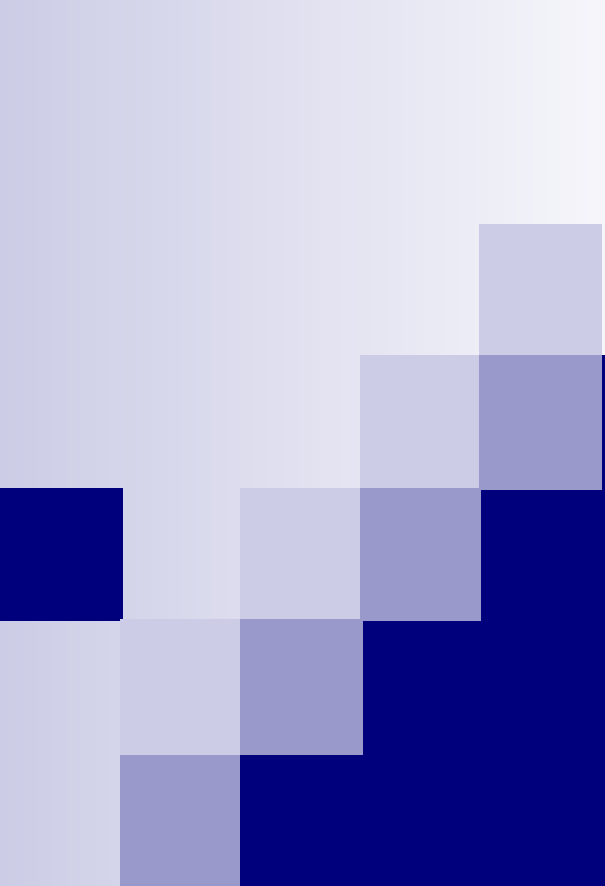
Использование модульной структуры и организации ПО

моделирования позволяет в режиме генерации создавать ППМ конкретной системы **S**, ориентированный на режим гибридного моделирования и конкретную конфигурацию комплекса технических средств АЦМК.



Тема

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
НА МИКРОУРОВНЕ**



# **Объекты компьютерного моделирования на микроуровне**

**Микроуровень** – это нижний иерархический уровень декомпозиции

объектов проектирования по степени абстрагирования при составлении математического описания. На этом уровне осуществляется детальное описание физических свойств технического объекта. Объекты рассматриваются как сплошные среды, имеющие конечные области определения, выделяемые в трехмерном геометрическом пространстве. Такие объекты представляют собой динамические системы с распределенными параметрами. Функционирование этих систем описывается дифференциальными уравнениями в частных производных.

Общий вид уравнений математической модели описания физических свойств технического объекта с распределенными параметрами

(1)

или

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0,$$

где  $L$  – дифференциальный оператор;  $\varphi$  – искомая функция (фазовая

$$L\varphi(Z) = \theta(Z)$$

координата);  $x_i$  – пространственные координаты;  $n$  – количество

пространственных координат;  $t$  – время;  $Z$  – вектор независимых

переменных;  $\theta(Z)$  – известная функция независимых координат.

Независимыми переменными в этих моделях являются

пространственные координаты  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) и время  $t$ .

$\overline{1, n}$

Если уравнение содержит одну фазовую переменную, система описывается одним уравнением вида (1), если несколько фазовых переменных, т. е. вектор  $\underline{\varphi}$ , то системой уравнений.

$$\underline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$$

Если фазовые переменные не являются явными функциями времени, задачу анализа объекта называют стационарной, в противном случае – нестационарной. Стационарная задача характеризует статическое состояние технического объекта. Динамические режимы функционирования объекта относятся к нестационарным задачам и для их оценки требуются исследования переходных процессов.

Уравнение (1) имеет множество решений. Для получения единственного решения необходимо задать краевые условия, включающие граничные и начальные условия. Граничные условия – это сведения об искомых непрерывных функциях  $\varphi$  и (или) их производных на границе  $S$  области определения объекта  $\Omega$ , характеризующие условия взаимодействия с окружающей внешней средой. Начальные условия – это значения этих же функций во всей области определения в начальный момент времени. Начальные условия задаются только при решении нестационарных задач (при исследовании переходных процессов).

Исходное дифференциальное уравнение в частных производных (1) вместе с краевыми условиями носит название дифференциальной краевой задачи и представляет собой математическую модель технического объекта с распределенными параметрами.



Существует несколько стандартных способов задания граничных условий. Для теплового объекта, представляющего собой твердое гомогенное (однородное) тело, используют граничные условия первого, второго и третьего родов.

Граничные условия первого рода означают задание на границе  $S$  области определения объекта  $\Omega$  значений  $\varphi_S$  искомой функции фазовой переменной  $\varphi$ .

При граничных условиях второго рода на границе задают значения частных производных искомой функции по пространственным координатам.

Граничные условия третьего рода представляют собой уравнения баланса потоков, характеризующих обмен энергией объекта с окружающей внешней средой.

В некоторых случаях, например для гетерогенных (неоднородных по составу материала) тепловых объектов, могут быть и иные граничные условия.

Состояние объекта характеризуется изменением во времени фазовых координат, определяемых в различных его точках. Задача анализа процесса функционирования технического объекта на микроуровне заключается в определении функций фазовых координат для множества точек, выделенных в области определения объекта.

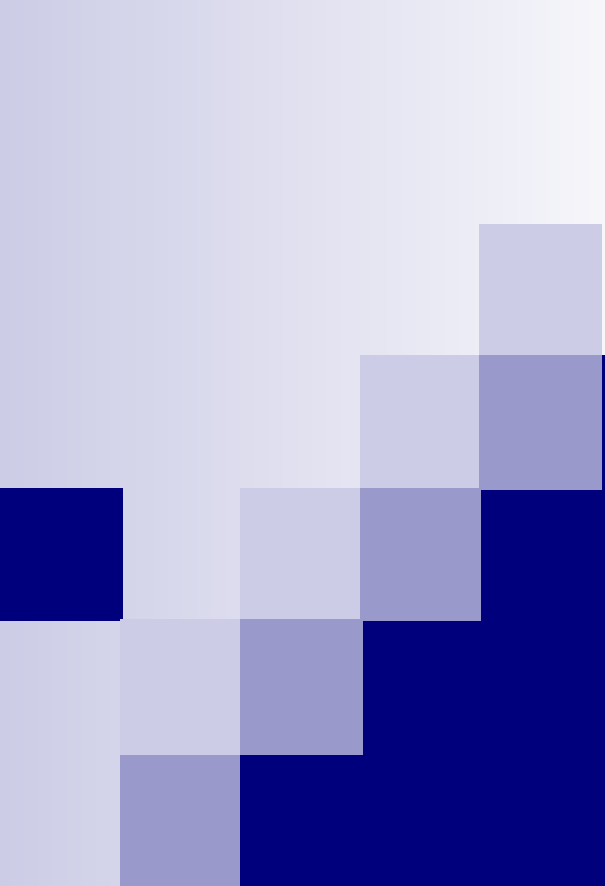
Объекты с распределенными параметрами могут быть различной физической природы: электрические, механические, тепловые, гидравлические, магнитные и др.

Механические объекты представляют собой элементы и базовые детали машин и механизмов: передаточные механизмы, столы металлообрабатывающих станков, корпуса, рамы, панели, валы и др. При анализе механических объектов находят деформации и напряжения. Они определяют несущую способность конструктивных элементов, надежность и нормальные условия функционирования базирующихся на них других элементов объекта.

При проектировании многих технических объектов возникает необходимость анализа теплонапряженности деталей, выбора оптимальных размеров и конфигурации теплообменников и решения многих других задач теплопередачи. В тепловых объектах определению подлежат температурные поля и термические напряжения.

При анализе гидравлических и пневматических систем определяют режимы течения сплошных потоков жидкостей и газов, характеризующиеся скоростями и давлениями.

Обычно в исходные уравнения (1) входят не все фазовые координаты, характеризующие процессы функционирования технического объекта, а только базисные, например, деформации – в модели механической системы, температуры – в тепловой системе, и т. д. Остальные фазовые координаты (например, напряжения в упомянутых системах) определяют через базисные координаты на основе уравнений, устанавливающих между ними соответствующие соотношения.



# **Основы построения компьютерных моделей элементов систем на микроуровне**

Для построения компьютерных моделей технических объектов с распределенными параметрами используют фундаментальные физические законы. К ним относятся прежде всего законы сохранения (массы, энергии, количества движения).

Общая формулировка закона сохранения: изменение во времени некоторой субстанции в элементарном объеме равно сумме притока-стока этой субстанции через его поверхность с учетом скорости генерации или уничтожения субстанции в этом объеме.

Уравнение, соответствующее данной формулировке, имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{J} + G, \quad (2)$$

где  $\varphi$  – фазовая переменная (координата), выражающая субстанцию;  $\vec{J}$  – вектор плотности потока фазовой переменной;  $\operatorname{div} \vec{J}$  – дивергенция вектора  $\vec{J}$ ;  $G$  – скорость генерации или уничтожения субстанции.

У трехмерного технического объекта вектор  $\vec{J}$  состоит из трех составляющих, направленных параллельно осям декартовой системы координат  $x, y, z$ , т. е.  $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ . Дивергенция вектора  $\vec{J}$  – скалярная величина, определяемая выражением

$$\operatorname{div} \vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}. \quad (3)$$

Дивергенция вектора плотности потока характеризует сумму притока-стока субстанции через поверхность элементарного объема. В качестве субстанции в различных физических законах выступают: масса, энергия, количество движения и др.

# Уравнение закона сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} J_{\rho} \quad (4)$$

где  $\rho$  – плотность массы, кг/м<sup>3</sup>;

$$J_{\rho} = \rho v \quad (5)$$

– вектор плотности потока массы ( $v$  – вектор скорости переноса массы).

В одномерном случае, когда скорость направлена лишь вдоль оси  $x$ , уравнение (4) имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial (\rho v)}{\partial x} \quad (6)$$

Плотность потока массы  $J_{\rho} = \rho v$  выражается в кг/(м<sup>2</sup> · с).

## Уравнение закона сохранения энергии

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} = -\operatorname{div} J_E + G_E \quad (7)$$

где  $E = e + v^2/2$  – полная энергия единицы массы ( $e$  – внутренняя энергия единицы массы);  $\rho E$  – энергия единицы объема, Дж/м<sup>3</sup>;  $J_E$  – вектор плотности потока энергии;  $G_E$  – скорость генерации или поглощения энергии в единице объема, Дж/(м<sup>3</sup> · с).

В одномерном случае поток энергии направлен только вдоль оси  $x$ ,

тогда,  $J_E = J_{Ex}$  а уравнение (7) принимает вид

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} = -\frac{\partial J_{Ex}}{\partial x} + G_{Ex} \quad (8)$$

Плотность потока энергии выражается в Дж/(м<sup>2</sup> · с).



Уравнение закона сохранения количества движения используют при моделировании движения потока жидкости. Для потока идеальной жидкости (без учета сил трения, обусловленных вязкостью) уравнение имеет вид

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = -v \operatorname{div}(\rho v) - \operatorname{grad} p \quad (9)$$

где  $\rho v$  – вектор количества движения единицы объема жидкости;  $p$  – давление жидкости;  $\operatorname{grad} p$  – градиент давления. Компонентами вектора градиента являются частные производные аргумента по пространственным координатам. Градиент давления .

$$\operatorname{grad} p = \left( \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

Для одномерного потока жидкости получаем

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = -v \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (10)$$

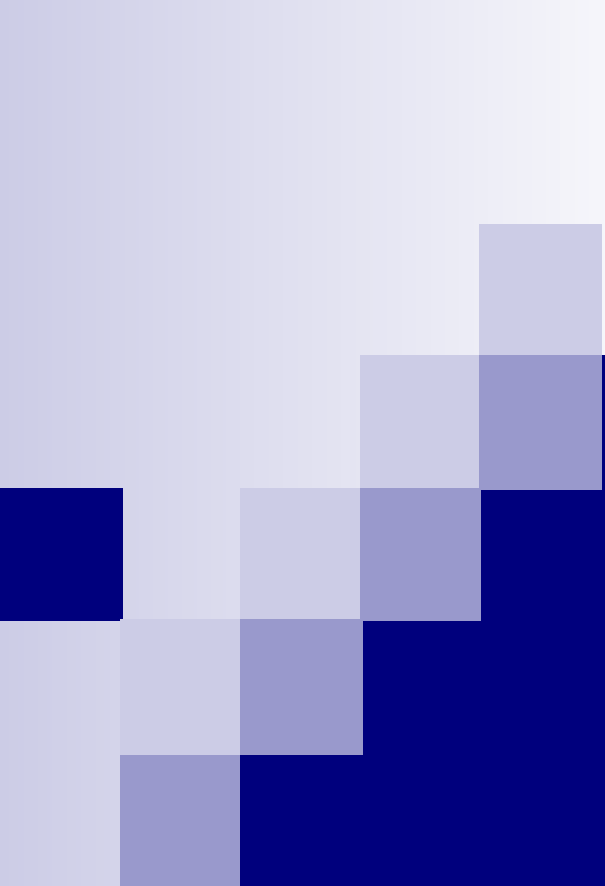
При учете массовых сил и сил трения уравнение закона сохранения количества движения имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = G_M - \left( \text{grad } p - \eta \nabla^2 v - \eta \text{grad div } \frac{v}{3} \right) / \rho \quad (11)$$

где  $G_M$  – напряженность поля массовых сил;  $\eta$  – динамическая вязкость;

$$\nabla^2 v = \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) i + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) j + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) k$$

– оператор Лапласа. Выражение (11) называют уравнением Навье–Стокса.



# **Модели механических подсистем на микроуровне**

Надежность работы ПрМ определяется рациональным выбором геометрических параметров входящих в их состав механических элементов. Форма и размеры элементов, их взаимное расположение в конечном счете определяют важнейшие параметры технического объекта – его массу и габариты, показатели надежности и долговечности.

Для решения задачи выбора геометрических параметров технического объекта необходим анализ напряженно-деформированного состояния его элементов. Значения напряжений и деформаций позволяют оценить прочность, долговечность, виброустойчивость конструктивных элементов и осуществить поиск их оптимальных размеров и конфигурации.

Примеры объектов проектирования: валы двигателей, корпуса, рамы, панели и стержневые конструкции станков, роботов и др.

Современные методы анализа напряженно-деформированного состояния несущих элементов различных технических систем базируются на использовании моделей с распределенными параметрами. В основе построения таких моделей лежит теория упругости. Динамические модели различных элементов технических объектов сводятся к стержневым, пластинчатым, оболочечным или объемным системам, находящимся под действием произвольных механических нагрузок (сосредоточенных, распределенных, детерминированных, случайных и др.). Эти модели представляют собой динамические системы с распределенными параметрами, функционирование которых описывается дифференциальными уравнениями в частных производных. Математической моделью анализа напряженно-деформированного состояния элемента механической системы является уравнение теории упругости – уравнение Ламе, которое выводится из условия динамического равновесия твердого тела под действием приложенных к нему сил, включая и силу инерции.

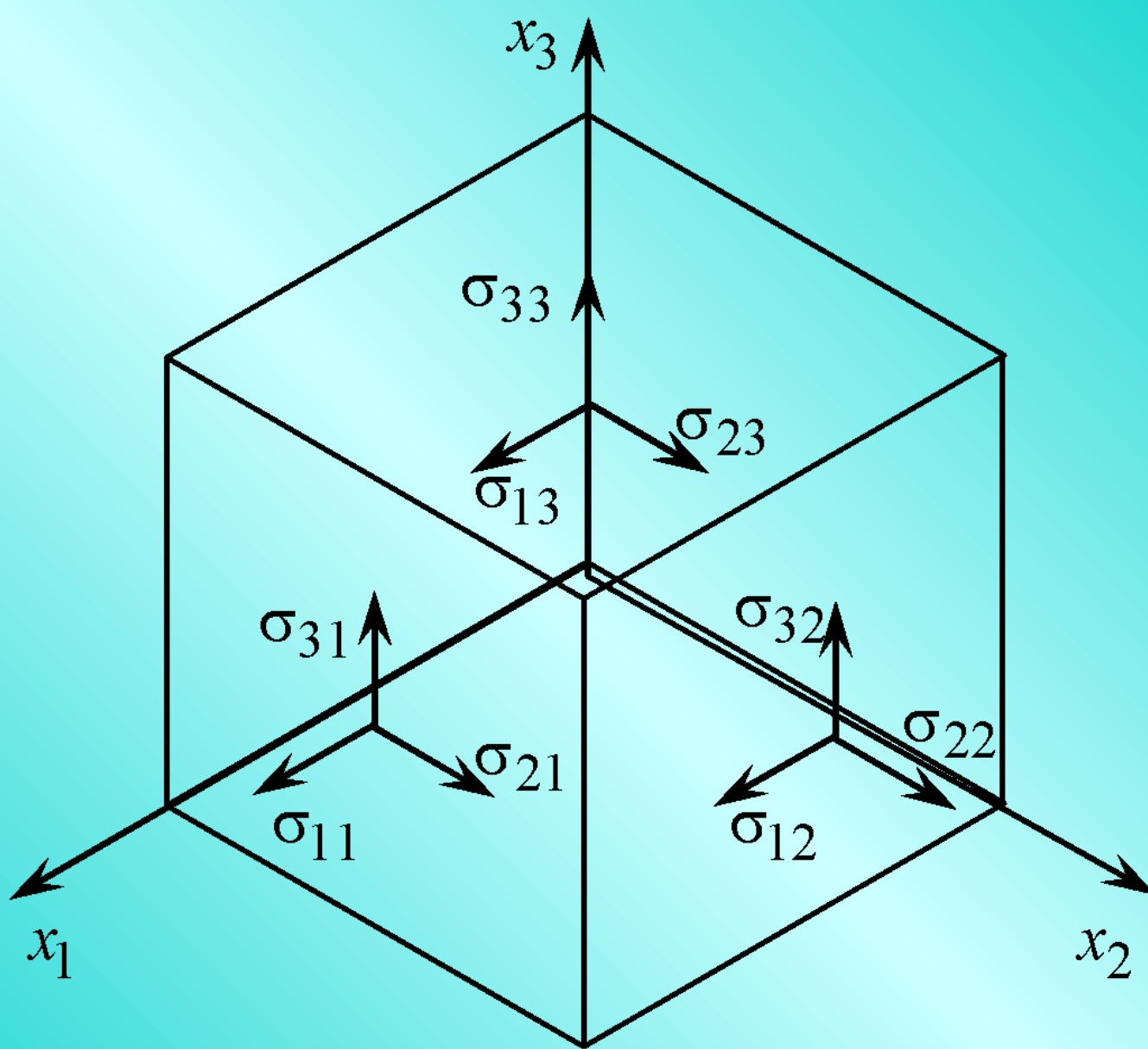


Рис. 7. Компоненты напряжений на гранях элементарного параллелепипеда

Выделим в твердом теле элементарный параллелепипед (рис. 7). Сформулируем условия его равновесия: геометрическая сумма сил, приложенных к выделенному элементарному параллелепипеду, включая его силу инерции, равна нулю. При этом учитываются распределенные нагрузки на гранях параллелепипеда и массовая сила. Распределенные нагрузки представляются нормальными  $\sigma_{ii}$  и касательными  $\sigma_{ij}$  напряжениями. Учитывая закон о парности касательных напряжений, согласно которому  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ ,  $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ ,  $\sigma_{31} = \sigma_{13}$ , получаем уравнения равновесия в проекциях на оси  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (12)$$

где  $\rho$  – плотность материала твердого тела;  $u_i$  – перемещение элемента вдоль оси  $x_i$ ;  $\sigma_{ij}$  – напряжение, действующее в направлении оси  $x_i$  в грани элемента, перпендикулярной оси  $x_j$ ;  $\rho g_i$  – проекция вектора массовых сил на ось  $x_i$  ( $\vec{g}$  – вектор ускорения свободного падения). Напряжения  $\sigma_{ij}$  связаны с деформациями  $\varepsilon_{ij}$ , а последние – с перемещениями  $u_i$ .

В случае линейной зависимости между ними, устанавливаемой законом Гука, для анизотропного тела имеем

$$\sigma_{ii} = \lambda \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{jj} + 2\mu \varepsilon_{ii} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &\text{при } i \neq j, \\ \sigma_{ij} &= 2\mu \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  – деформация, вычисляемая по формуле

$$\varepsilon_{ij} = 0.5 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad (15)$$

$\lambda$  и  $\mu$  – постоянные Ламе, характеризующие упругие свойства среды:

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad (16)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad (17)$$

$E$  – модуль упругости;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.



Заменив напряжения на деформации в уравнениях равновесия (12), получим уравнение теории упругости, называемое уравнением Ламе:

$$\rho \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{U} + \mu \nabla^2 \underline{U} + \rho \underline{g} \quad (18)$$

где  $\underline{U}$  – вектор перемещений;  $\nabla^2$  – оператор Лапласа.

Модели для анализа напряжений и деформаций часто оказываются более удобными, если представлены в интегральной форме, вытекающей из вариационных принципов механики. Вариационный принцип Лагранжа (принцип потенциальной энергии) гласит, что потенциальная энергия системы получает стационарные значения на тех кинематически возможных перемещениях, отвечающих заданным граничным условиям, которые удовлетворяют условиям равновесия.

Поэтому модель представляют в виде выражения потенциальной энергии

$E_{\Pi}$  системы как разность энергии деформации  $E_{\text{д}}$  и работы  $W$  массовых и

приложенных поверхностных сил:

$$E_{\Pi} = E_{\text{д}} - W,$$

где  $E_{\text{д}} = 0.5 \int_{\Omega} \sigma_{\text{T}}^{\text{T}} \varepsilon_{\text{T}} dR$ ;  $\varepsilon_{\text{T}} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23})$  – вектор-строка деформаций;

$\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})^{\text{T}}$  – вектор-столбец напряжений; – область определения искомой функции. Введем матрицу

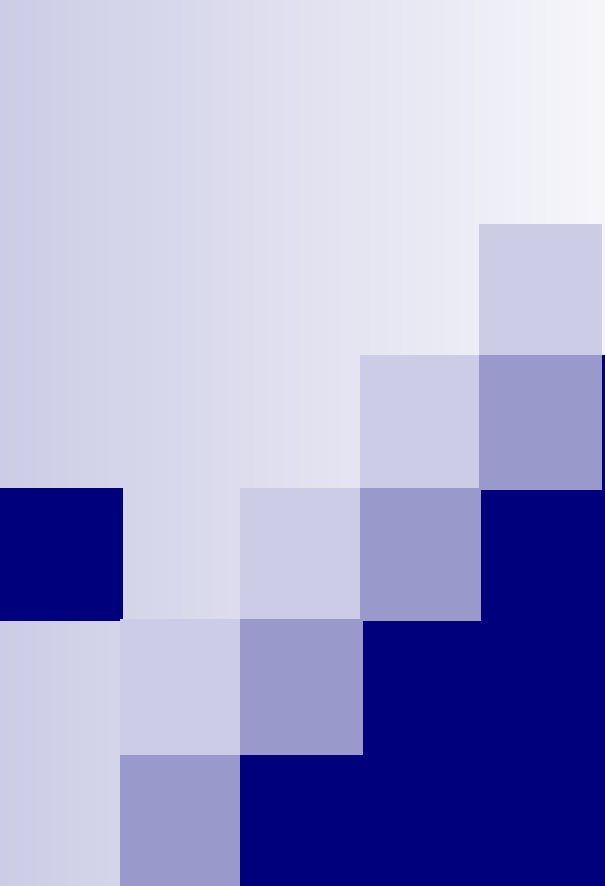
$$D := \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Используя матрицу (19), уравнения (13) и (14) можно записать в лаконичной форме

$$\overset{\square}{\sigma} = \overset{\square}{D} \overset{\square}{\varepsilon}. \quad (20)$$

При использовании принципа Лагранжа вместо решения уравнения (18) требуется минимизировать функционал

$$E_{\Pi} = 0.5 \int_{\overset{\square}{R}} \overset{\square}{\varepsilon}^T \overset{\square}{D} \overset{\square}{\varepsilon} dR - W \quad (21)$$



# **Модели тепловых систем на микроуровне**

Теплообмен может осуществляться теплопроводностью, конвекцией и тепловым излучением. Температурным полем называется совокупность значений температуры для всех точек пространства в данный момент времени. Температурное поле скалярное, так как температура – скалярная величина. Если температура  $T$  является функцией только пространственных координат  $T(x, y, z)$ , то процесс теплообмена стационарный и температурное поле стационарное. Если температура изменяется во времени, то процесс теплообмена и температурное поле нестационарные.

При проектировании теплотехнических объектов на микроуровне используют уравнение теплопроводности, связывающее изменение температуры во времени и пространстве со свойствами среды. Это уравнение позволяет выполнять анализ температурных полей в твердых телах – деталях машин.

Уравнение теплопроводности может быть получено на основе закона сохранения энергии. Применительно к тепловой системе закон сохранения энергии можно сформулировать так: изменение во времени количества тепловой энергии в элементарном объеме равно сумме притока-стока энергии через его поверхность с учетом выделения энергии в том же объеме в единицу времени внутренними источниками (или поглощения энергии стоками). По аналогии с уравнением (7) можно записать

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \text{div} \vec{q} + G_Q \quad (38)$$

где  $Q$  – количество тепловой энергии в единице объема, Дж/м<sup>3</sup>;  $\vec{q}$  – вектор плотности теплового потока, Дж/(м<sup>2</sup> · с);  $G_Q$  – количество тепловой энергии, выделяемое в единицу времени в рассматриваемом элементарном объеме, Дж/(м<sup>3</sup> · с).

Выделение (или поглощение) тепловой энергии внутри тела может происходить из-за объемных химических реакций, прохождения электрического тока, фазовых превращений материала при изменении температуры и т. п. Величина  $G_Q$  характеризует мощность внутренних источников теплоты (или стоков).

Изменение количества тепловой энергии в единице объема  $dQ$  пропорционально изменению температуры  $dT$ :

$$dQ = C\rho dT \quad (39)$$

где  $C$  – удельная теплоемкость материала теплотехнического объекта; Дж/(кг · К);  $\rho$  – плотность материала.

Плотность теплового потока  $\vec{q}$  в соответствии с законом Фурье пропорциональна градиенту температуры:

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad} T, \quad (40)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала теплотехнического объекта, Дж/(с · м · К);  $\text{grad} T = \left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$  – градиент температуры.

С учетом выражений (39) и (40) уравнение (38) приводится к виду

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho c_p} \left[ (g \text{ rad}) T + G_Q \right] \quad (41)$$

Для однородного изотропного тела  $\lambda = \text{const}$ . Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_\delta \text{div grad } T + \frac{G_Q}{c_p}, \quad (42)$$

где  $\alpha_\delta = \frac{\lambda}{c_p}$  – коэффициент температуропроводности, м<sup>2</sup>/с. Выражение

дивергенции градиента температуры можно записать в виде

$$\text{div grad } T = \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (43)$$

где  $\nabla^2$  – оператор Лапласа.



Для одномерного случая, когда теплопередача осуществляется только

вдоль оси  $x$ , получаем

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{G_Q}{C\rho} \quad (44)$$

Для решения уравнений (41), (42), (44) должна быть задана функция

и краевые условия – начальные и граничные. Кроме того, необходимо

$$G_Q = G_Q(x, y, z, t)$$

описание геометрии теплотехнического объекта (его формы и размеров), а

также физических свойств объекта и среды (значений параметров  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $C$ ).

Для многих теплотехнических объектов можно принимать  $G_Q = 0$ . К

ним, в частности, относятся объекты, представляющие собой твердые тела: стенки теплообменников и корпусных деталей машин, диски и барабаны фрикционных муфт и тормозов и др. В этом случае уравнение теплопередачи для объекта, выполненного из материала, обладающего изотропными теплофизическими свойствами,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_T \nabla^2 T. \quad (45)$$

Для одномерного случая

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (46)$$

При описании граничных условий в зависимости от наличия информации о теплообмене на граничной поверхности принимают различные допущения. В простейшем случае задают граничные условия первого рода. При этом задается распределение температуры на граничной поверхности объекта  $S$  как функция координат и времени

$$T_S = \varphi(x, y, z, t), \quad x, y, z \in S. \quad (47)$$

Граничные условия второго рода описывают распределение производных температуры по пространственным координатам на поверхности  $S$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial n} \right) = \psi(x, y, z, t), \quad x, y, z \in S, \quad (48)$$

где  $\frac{\partial T}{\partial n}$  — модуль вектора градиента температуры.

Учитывая формулу (40), можно отметить, что граничные условия второго рода характеризуют распределение плотности теплового потока на граничной поверхности  $S$ .

При отсутствии теплового потока на поверхности объекта теплообмен с внешней средой не осуществляется. В этом случае говорят, что граничная поверхность объекта теплоизолирована. Граничные условия теплоизолированного объекта

$$\left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_S = 0 \quad (49)$$

При проектировании технических объектов часто встречается случай, когда часть граничной поверхности теплоизолирована, а на остальной части осуществляется теплообмен с внешней средой.

Граничные условия третьего рода позволяют конкретизировать характеристики теплообмена с внешней средой. При этом задается распределение плотности теплового потока на граничной поверхности. Функция плотности теплового потока зависит от способа теплообмена. Для технических объектов наиболее характерны три способа: конвективный теплообмен твердого тела с окружающей газовой или жидкостной средой, генерирование на граничных поверхностях тепловых потоков в процессе трения контактирующих поверхностей и тепловое излучение.

При конвективном теплообмене плотность теплового потока на граничной поверхности пропорциональна разности температуры окружающей среды  $T_c$  и температуры граничной поверхности  $T_s$

$$qS = \alpha(T_c - T_s) \quad (50)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплообмена (теплопередачи) через конвекцию, Дж/(с · м<sup>2</sup> · К).

Уравнение (50) выражает закон Ньютона. Принимая во внимание, что, согласно выражению (40), модуль вектора плотности теплового потока, можно записать следующее уравнение баланса тепловых потоков:

$$qS = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha(T_c - T_S) = 0. \quad (51)$$

Выражение (51) представляет собой уравнение граничного условия третьего рода при конвективном теплообмене.

Отметим, что выражения граничных условий первого и второго родов являются частными случаями уравнения (51). Так, при  $\alpha \rightarrow \infty$  и  $\lambda = \text{const}$  или при  $\lambda \rightarrow \infty$  и  $\alpha = \text{const}$  получаем

в результате  $T_S = T_c$  и приходим к граничным условиям первого рода.

$$\lim_{\alpha/\lambda \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\alpha/\lambda} \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_S \right] = 0,$$

Если положить  $\alpha \rightarrow 0$ , получим частный случай граничных условий второго рода – при теплоизолированной граничной поверхности.

При генерировании теплового потока на граничной поверхности, что характерно для фрикционных механизмов, подшипников скольжения и т. п., уравнение граничного условия третьего рода имеет вид

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + qS = 0. \quad (52)$$

При лучистом теплообмене между твердым телом и внешней средой плотность теплового потока определяется по закону Стефана–Больцмана

$$qS = \varepsilon \sigma (T_c^4 - T_S^4), \quad (53)$$

где  $\varepsilon$  – степень черноты поверхности, характеризующая ее излучательную (или поглощающую) способность;  $\sigma$  – постоянная Стефана–Больцмана.

На основе выражений (47)–(53) можно получить уравнения граничных условий для одномерного теплотехнического объекта.

Уравнения граничных условий первого рода

$$T_{S0} = \varphi_1(t) \text{ и } \left. \begin{array}{l} x = 0; \\ T_{SL} = \varphi_2(t) \text{ и } x = L; \end{array} \right\} \quad (54)$$

где  $T_{S0}$  – температура на левой границе;  $T_{SL}$  – температура на правой границе;  $L$  – длина объекта вдоль оси  $x$ .

Уравнения граничных условий второго рода

$$\left. \begin{array}{l} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{S0} = \Psi_1(t) \text{ и } \text{дè } x = 0; \\ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{SL} = \Psi_2(t) \text{ и } \text{дè } x = L. \end{array} \right\} \quad (55)$$



Если какая-либо из границ (правая или левая) теплоизолирована, то

для этой границы.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

Граничные условия третьего рода при конвективном теплообмене

$$\left. \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha_0 (T_{c0} - T_{S0}) = 0 \text{ при } x = 0 \right\} \quad (56)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha_L (T_{cL} - T_{SL}) = 0 \text{ при } x = L$$

при генерировании теплового потока на граничных поверхностях

температура окружающей среды, соответственно,

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + qS_0 = 0 \text{ и } \text{д} \text{е } x = 0; \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + qS_L = 0 \text{ и } \text{д} \text{е } x = L, \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

при теплообмене излучением

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \varepsilon_0 \sigma (T_{c0}^4 - T_{S0}^4) &= 0 \text{ при } x = 0 \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \varepsilon_L \sigma (T_{cL}^4 - T_{SL}^4) &= 0 \text{ при } x = L \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

где  $T_{c0}$  и  $T_{cL}$  – температура окружающей среды, соответственно, на левой и правой границах;  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_L$  – степень черноты левой и правой граничных поверхностей. Отметим, что на левой и правой граничных поверхностях могут быть различные виды теплообмена.

Многие теплотехнические объекты выполняются многослойными. Обычно один из слоев обеспечивает несущую способность, а другие выполняют роль теплоизолирующих или фрикционных элементов. В многослойном объекте наряду с теплопроводностью имеет место теплообмен соприкасающихся твердых тел. Математическая модель объекта должна включать описание условий этого теплообмена.

При анализе температурных полей все части объекта необходимо рассматривать совместно. Для каждой части (слоя) записывают свое уравнение теплопроводности, а краевыми условиями будут условия сопряжения, выражающие равенство температур и равенство плотностей тепловых потоков на поверхностях соприкасающихся частей:

$$T_1 S = T_2 S \quad (59)$$

$$\lambda_1 \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_S = \lambda_2 \left( \frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_S \quad (60)$$

Уравнения (59) и (60) описывают граничные условия четвертого рода. Кроме рассмотренных встречаются и другие виды граничных условий. Например, на поверхностях соприкосновения возможны фазовые превращения вещества, требующие учета затрат тепловой энергии.

Если внешние воздействия на объект, характеризуемые функциями краевых условий, непостоянны, процесс теплопередачи будет нестационарным. Для получения однозначного решения уравнений математической модели в этом случае надо кроме краевых условий задать и начальные условия.

При этом задается распределение температуры по всей области определения объекта  $\Omega$  в начальный момент времени при  $t_0 = 0$ :

$$T_{\Omega 0} = \Phi(x, y, z), \quad x, y, z \in \Omega. \quad (61)$$

Совокупность уравнений теплопроводности и граничных условий составляет математическую модель теплового объекта на микроуровне. Результатом решения этих уравнений является температурное поле объекта, на основании которого можно судить о его работоспособности. Ограничение работоспособности наступает при достижении предельных значений температуры и напряжений, допускаемых для материала, из которого изготовлен объект. Напряжения в тепловом объекте определяются суммой напряжений от механической нагрузки и термических напряжений, обусловленных градиентом температуры. Температурное поле позволяет определить термические напряжения.

# Пример разработки модели

# Моделирование систем управления секциями бумагоделательной машины

**Цель работы:** исследование систем стабилизации скорости и соотношения скоростей секций бумагоделательной машины, изучение состава технических средств систем.

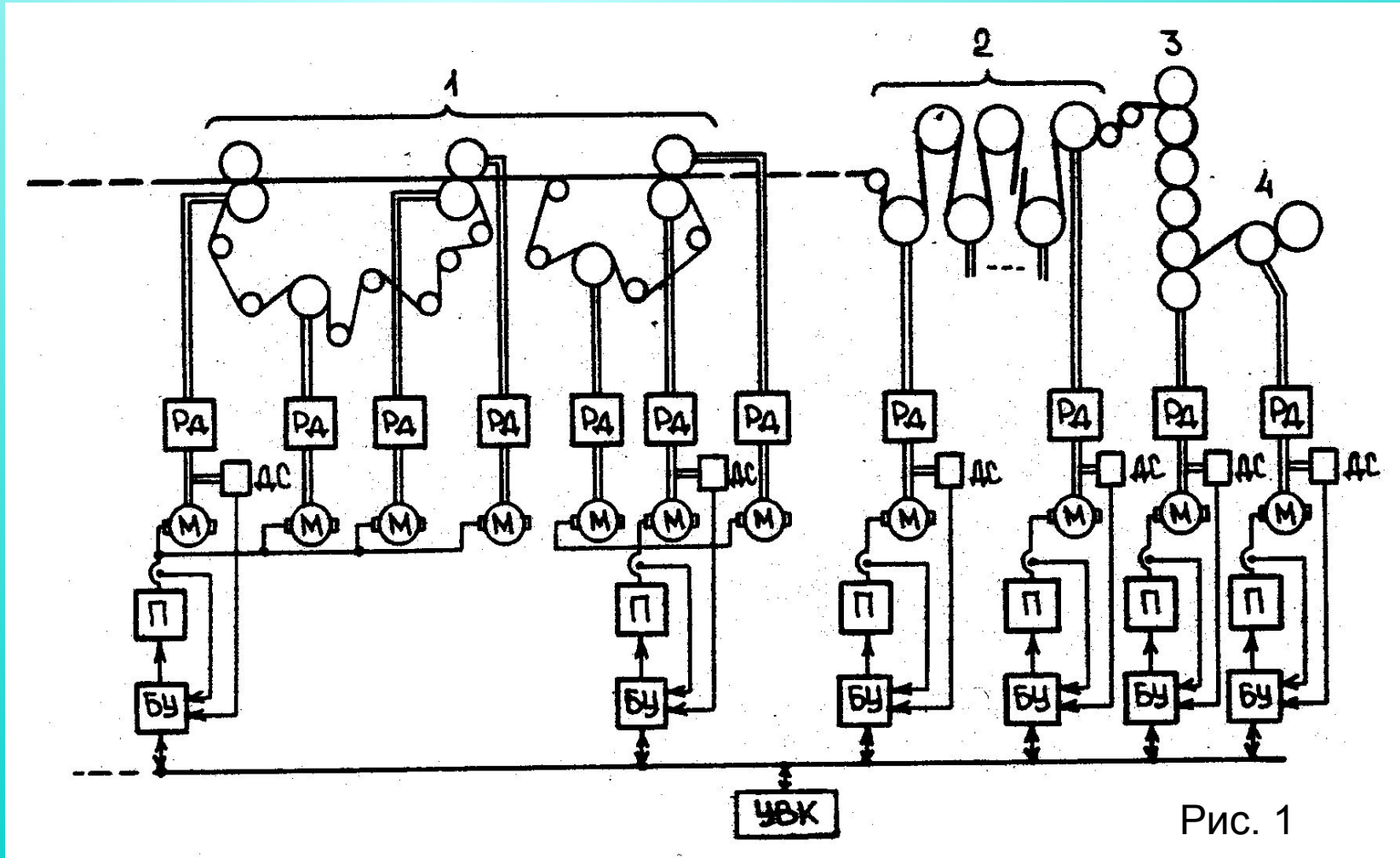


Рис. 1

**Описание объекта моделирования** (Рис. 1 ). Бумажное полотно формируется из бумажной массы в результате нескольких непрерывно протекающих технологических операций. Эти операции осуществляются в секциях машины, управление движением которых производится с помощью систем многодвигательных электроприводов. Системы оснащаются устройствами задания скорости и соотношения скоростей и имеют обратные связи по скоростям и токам секционных электродвигателей.

На функциональной схеме системы управления взаимосвязанными электроприводами бумагоделательной машины оказана часть секций машины, выполняющих технологические операции удаления влаги с помощью вакуумных устройств и прессования - 1, сушки бумаги - 2, каландрирования - 3 и намотки бумаги в рулон - 4. В соответствии с заданным технологическим режимом работы машины необходимо выполнить математические описания, расчеты и исследования на ПЭВМ систем управления двумя смежными секциями с учетом упругих свойств бумажного полотна. Упругими деформациями в приводах, редукторах, муфтах и валах кинематических передач от двигателей до механизмов секций можно пренебречь.

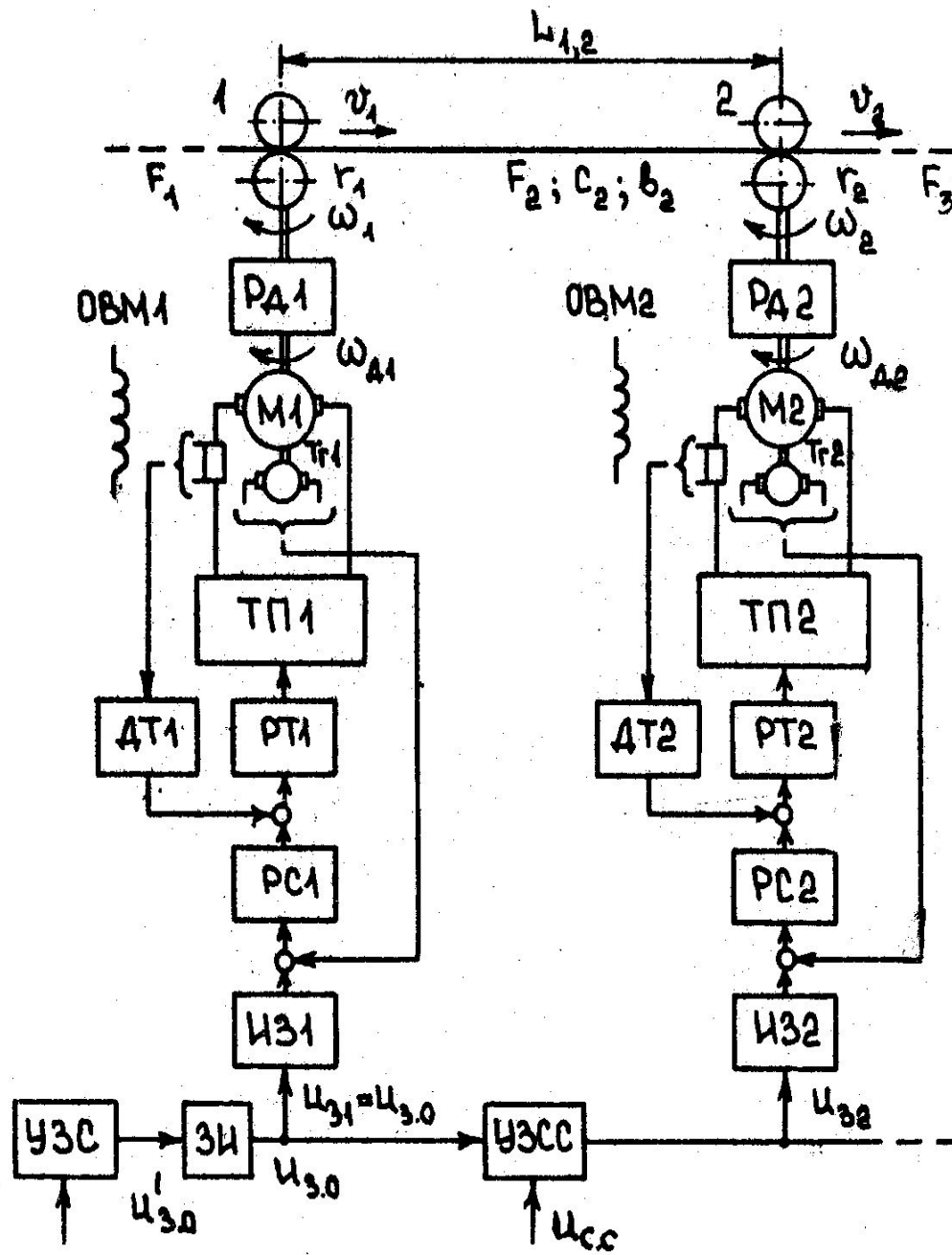


Рис. 2



Функциональная схема системы управления двумя смежными секциями показана на рис. 2. Механизмы секций машины представлены в виде одного ведущего вала, к которому приведены остальные валы секций. Взаимосвязь сепаратных систем управления секциями осуществляется по цепи нагрузки через общее обрабатываемое полотно бумаги и по цепи управления для задания общей скорости электроприводов и соотношения скоростей секций.

Для того чтобы получить структурную схему модели в виде передаточных функций составим модели отдельных подсистем моделируемого объекта: двигателя; тиристорного преобразователя; датчиков, регуляторов тока и скорости и др.

Результат разработки моделей отдельных подсистем моделируемого объекта представим в таблице 1.

В результате этого была разработана структурная схема модели системы управления двумя смежными секциями бумагоделательной машины, представленная на рис. 3.

Таблица 1

N п/п	Элементы СУ	Обозначение	Математичес- кое описание
1	Редуктор	$i_p$	$K$ - число, обозначающее передаточное число редуктора
2	Двигатель постоянного тока	$W_{gb}(p)$	$W_{gb}(p) = \frac{1/R_{гц}}{T_{гц}p + 1}$
3	Тиристорный преобразователь	$W_{тп}(p)$	$W_{тп}(p) = \frac{K_{тп}}{T_{тп}p + 1}$

Продолжение таблицы 1

№ п/п	Элементы с.у	Обозначение	Математичес- кое описание
4	Датчик тока	$W_{гт}(p)$	а) $W_{гт}(p) = K_{гт}$ б) $W_{гт}(p) = \frac{K_{гт}}{T_{гт}p + 1}$
5	Резистор тока (пн)	$W_{рт}(p)$	$W_{рт}(p) = \beta_{рт} \frac{T_{рт} + 1}{T_{рт}p}$
6	Датчик скорости	$W_{ге}(p)$	а) $W_{ге}(p) = K_{ге}$ б) $W_{ге}(p) = \frac{K_{ге}}{T_{ге}p + 1}$

## Окончание таблицы 1

N n/n	Элементы суд	Обозначение	Математическое описание
7	Регулятор скорости (ПК)	$W_{pc}(p)$	$W_{pc}(p) = \beta_{pe} \frac{T_{pe} p + 1}{T_{pe} p}$
8	Инерционное звено	$W_{из}(p)$	$W_{из}(p) = \frac{K_{из}}{T_{из} p + 1}$
9	Свойства бу- ланского по- лотка	$W_{он}(p)$	Описывается дву- мя звеньями а) $\frac{c_2}{p} + b_2$ б) $\frac{1/K_{1,2} c_2}{(b_2/c_2)p + 1}$

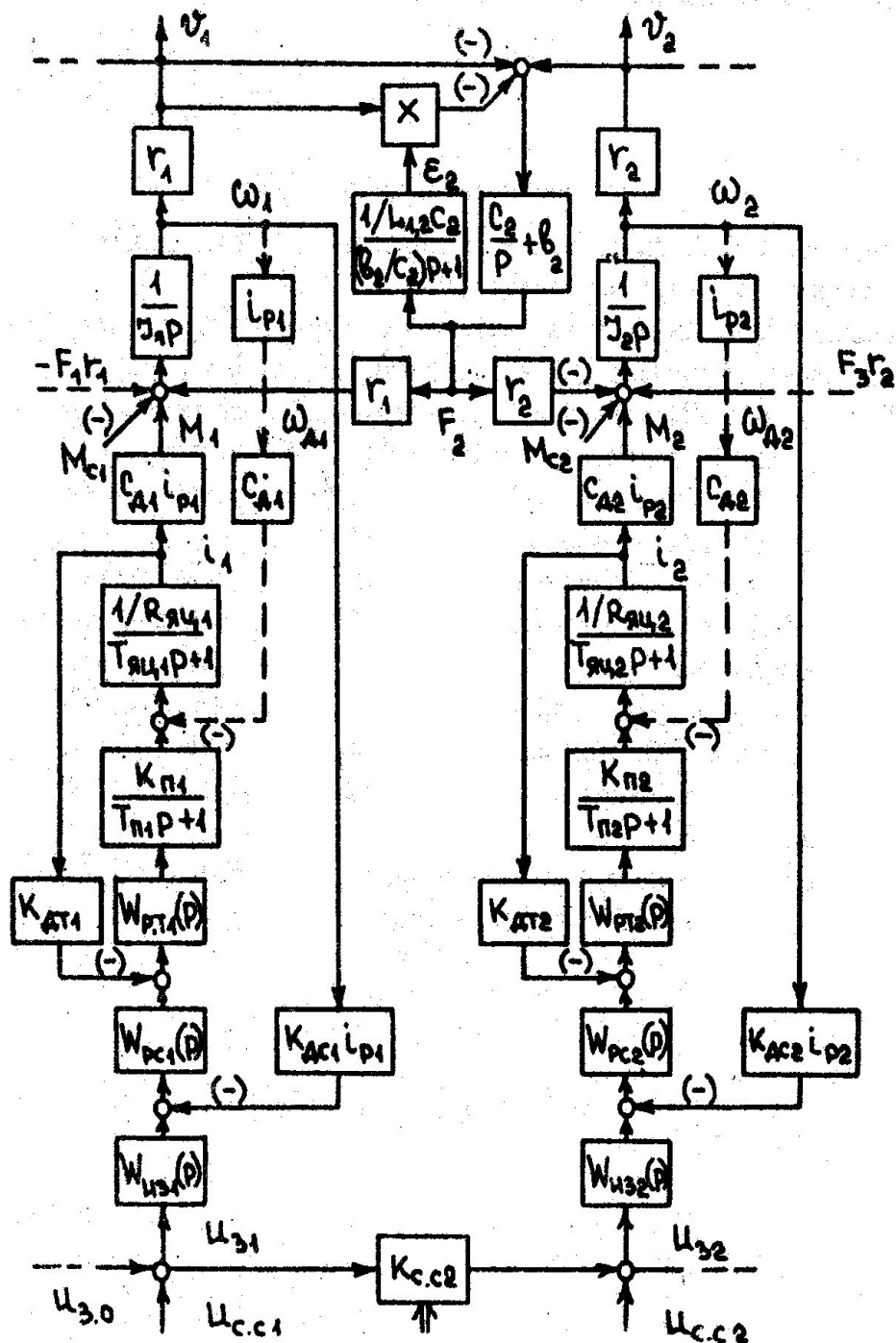


Рис. 3.

Исходными данными к выполнению работы являются данные секций и режим работы машины, состав технических средств (комплектных электроприводов, датчиков и задающих устройств) систем управления, параметры, характеризующие упругие свойства полотна.

**Технические средства:** Комплектный электропривод серии КТЭ. Датчики – фотоэлектрические импульсные датчики

**Воздействия на системы управления:**

*Управляющие:*

- **ступенчатые**  $U_{cc1}(t)=0$ , при  $t < 0$  и  $U_{cc1}(t)=0,5$  В, при  $t \geq 0$

$U_{cc2}(t)=0$ , при  $t < 0$  и  $U_{cc2}(t)=0,5$  В, при  $t \geq 0$

- **линейные**  $U_{3.0}(t)=U_{30}+U'_{30}t$  при  $t = 0 \dots 5$  с;

$U'_{30}=0,2$ ;  $U_{30}=0$

*Возмущающие:*

- ступенчатые  $M_{c1}(t)=0$  при  $t < 0$ ;  $M_{c1}(t)=100$  Нм при  $t \geq 0$

$M_{c2}(t)=0$  при  $t < 0$ ;  $M_{c2}(t)=100$  Нм при  $t \geq 0$

- волновые  $M_{c1}(t)= C_0+C_1 \sin \omega_1 t+C'_1 \cos \omega_1 t+C_2 \sin \omega_2 t+C'_2 \cos \omega_2 t$ , где  $C_0 = 80$

Нм,  $C_1 = C'_1 = 40$  Нм,  $\omega_1=12$  рад/с,  $C_2 = C'_2 = 20$  Нм,  $\omega_2 = 50$  рад/с.

$M_{c2}(t)= C'_0+C'_1 \sin \omega'_1 t+C''_1 \cos \omega'_1 t+C'_2 \sin \omega'_2 t+C''_2 \cos \omega'_2 t$ , где  $C_0 = 60$  Нм,  $C'_1 = C''_1 = 30$

Н,  $\omega'_1 = 15$  рад/с,  $C'_2 = C''_2 = 15$  Нм,  $\omega'_2 = 60$  рад/с.

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{J_1} (-F_1 r_1 + r_1 + c_{д1} i_{p1} x_2 - M_{с1})$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{T_{яц1}} \left( -x_2 + \frac{1}{R_{яц1}} (x_3 - c_{д1} i_{p1} x_1) \right)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{T_{п1}} (-x_3 + K_{п1} (x_4 - \beta_{рп1} + x_5 - K_{дт1} x_2))$$

$$\dot{x}_4 = \frac{\beta_{рп1}}{\tau_{рп1}} (-K_{дт1} x_2 - \beta_{рс1} (-K_{дс1} i_{p1} x_1 + x_6 - \beta_{из1} (u_{3.0} + u_{с.с1})))$$

$$\dot{x}_5 = \frac{\beta_{рс1}}{\tau_{рс1}} (-K_{дс1} i_{p1} x_1 + x_6 - \beta_{из1} (u_{3.0} + u_{с.с1}))$$

$$\dot{x}_6 = \frac{\beta_{из1}}{\tau_{из1}} (u_{3.0} - u_{с.с1})$$

$$\dot{x}_7 = \frac{1}{J_1} (-F_2 r_2 - r_2 + c_{д2} i_{p2} x_2 - M_{C2})$$

$$\dot{x}_8 = \frac{1}{T_{ЯЦ2}} \left( -x_8 + \frac{1}{R_{ЯЦ2}} (x_9 - c_{д2} i_{p2} x_7) \right)$$

$$\dot{x}_9 = \frac{1}{T_{П2}} \left( -x_9 + K_{П2} \left( x_{10} - \beta_{РП2} \left( x_{11} - K_{ДТ2} x_8 - \beta_{РП2} \left( -K_{ДС2} i_{p1} x_7 + x_{12} - \beta_{ИЗ2} (u_{3.2} + u_{C.C2}) \right) \right) \right) \right)$$

$$\dot{x}_{10} = \frac{\beta_{РП2}}{\tau_{РП2}} \left( -K_{ДТ2} x_8 - \beta_{РП2} \left( -K_{ДС2} i_{p2} x_7 + x_{12} - \beta_{ИЗ2} (u_{3.2} + u_{C.C2}) \right) \right)$$

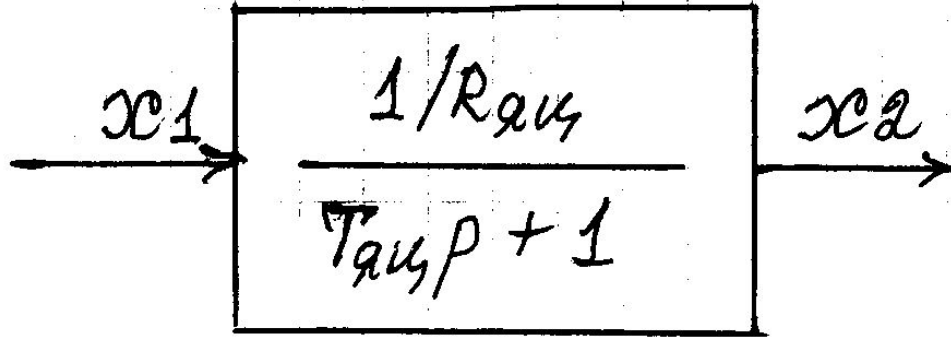
$$\dot{x}_{11} = \frac{\beta_{РС2}}{\tau_{РС2}} \left( -K_{ДС2} i_{p2} x_7 + x_{12} - \beta_{ИЗ2} (u_{3.2} + u_{C.C2}) \right)$$

$$\dot{x}_{12} = \frac{\beta_{ИЗ2}}{\tau_{ИЗ2}} (u_{3.2} - u_{C.C2})$$

$$\dot{x}_{13} = c_2 \left( -v_1 + v_2 - r_1 x_1 - \frac{1}{L_{12} c_2} x_{13} + b_2 \right)$$



Переход от передаточной функции к дифференциальному уравнению поясним на следующем примере.



$p = \frac{d}{dt}$  —  
функция Лапласа

$$x_2 = x_1 \cdot \frac{1/R_{qu}}{T_{qu}p + 1} \Rightarrow x_2(T_{qu}p + 1) = x_1 \cdot \frac{1}{R_{qu}}$$

$$x_2 T_{qu}p + x_2 = x_1 \cdot \frac{1}{R_{qu}} \Rightarrow$$

$$T_{qu} \frac{dx_2}{dt} = x_1 \cdot \frac{1}{R_{qu}} - x_2 \Rightarrow \dot{x}_2 = \left( x_1 \cdot \frac{1}{R_{qu}} - x_2 \right) \frac{1}{T_{qu}}$$