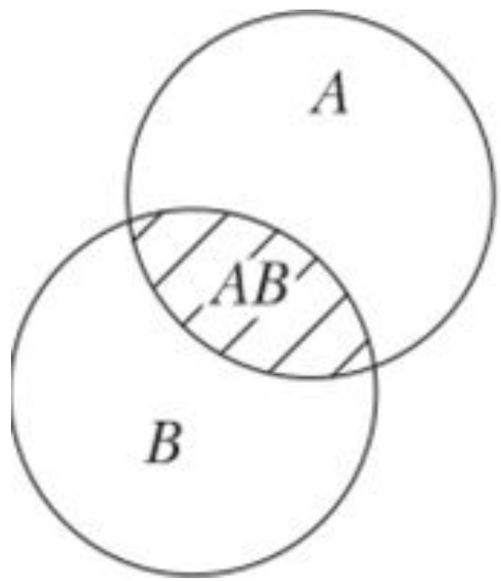
Произведение событий. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей.

КСК-318, КСК-318д

Произведение событий

Произведением АВ событий А и В называется событие, состоящее в том, что произошли оба события.



Условная вероятность вычисляется по следующей формуле:

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Замечание: В общем случае **нельзя** считать, что вероятность $P(A|B)=P(B|A)$!

Условная вероятность обладает следующими свойствами:

1) $P(\varnothing|B) = 0$; $P(\Omega|B) = 1$;

2) $P(A|A) = 1$;

3) если $A \subset B$, то $P(B|A) = 1$. Действительно, так как $A \subset B$, то $AB = A$ и $P(AB) = P(A)$. Поэтому $P(B|A) = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$;

4) для несовместных событий $A_1 A_2 = \varnothing$ справедливо $P_B(A_1 + A_2) = P_B(A_1) + P_B(A_2)$.

Теорема *Вероятность совместного появления событий A и B равна произведению вероятности одного события на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло* (*ключевое слово «**и**»*), *и находится по формуле*

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A).$$

Событие A называется *независимым* от события B, если появление события B не изменит вероятность появления события A, т.е. $P(A|B) = P(A)$. Если A не зависит от B, то, согласно формуле (1.14), событие B не зависит от A, т.е. они *попарно* (*взаимно*) *независимы*. Тогда $P(A|B) = P(A|\overline{B})$.

Пример. В трамвайном парке имеются 15 трамваев маршрута №1 и 10 трамваев маршрута №2. Какова вероятность того, что вторым по счету на линию выйдет трамвай маршрута №1?

Решение. Пусть *A* - событие, состоящее в том, что на линию вышел трамвай маршрута №1, *B* - маршрута №2.

Рассмотрим все события, которые могут при этом быть (в условиях нашей задачи): $AA,\ AB,\ BA,\ BB$. Из них нас будут интересовать только первое и третье, когда вторым выйдет трамвай маршрута №1.

Так как все эти события совместны, то:

$$P(AA) = P(A) \cdot P(A \mid A) = \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24};$$

$$P(BA) = P(B)\,P(A \mid B) = \frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24};$$

отсюда искомая вероятность

$$P = P(AA) + P(BA) = \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} + \frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24} = 0,6$$

Пример. Какова вероятность того, что 2 карты, вынутые из колоды в 36 карт, окажутся одной масти?

Решение. Сначала подсчитаем вероятность того, что две карты окажутся одной определенной масти (например «пики»). Пусть *A* - появление первой карты такой масти, *B* - появление второй карты той же масти. Событие *B* зависит от события *A*, т.к. его вероятность меняется от того, произошло или нет событие *A*. Поэтому придется воспользоваться теоремой умножения в ее общей форме:

$$P(AB) = P(A)P(B\,|\,A),$$

где $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B\,|\,A) = \frac{8}{35}$ (после вынимания первой карты осталось 35 карт, из них той же масти, что и первая - 8).

Получаем

$$P(AB) = P(A)P(B\,|\,A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{35} = \frac{2}{35}.$$

События, состоящие в том, что будут вынуты две карты масти «пики», масти «треф» и т.д., несовместны друг с другом. Следовательно, для нахождения вероятности их объединения воспользуемся теоремой сложения:

$$P = \frac{2}{35} + \frac{2}{35} + \frac{2}{35} + \frac{2}{35} = \frac{8}{35}.$$

Пример. В урне находятся 3 белых шара и 2 черных. Из урны вынимается один шар, а затем второй. Событие *B* – появление белого шара при первом вынимании. Событие *A* – появление белого шара при втором вынимании.

Решение. Очевидно, что вероятность события A, если событие B произошло, будет

$$P(A\,|\,B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Вероятность события A при условии, что событие B не произошло, будет

$$P(A\,|\,\overline{B})=\frac{3}{4}.$$

Теорема . *Вероятность произведения независимых событий A и B равна произведению их вероятностей*:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Полученное равенство может служить определением независимых событий. Если два события не являются независимыми, то они называются *зависимыми*. Заметим, что если событие A зависит от исхода события B, то $P(A|B) \neq P(A)$.

Пусть дано некоторое множество событий $A = \{A_1, \dots, A_k\}$. Элементу $A_p \in A$ поставим в соответствие множество B_p, составленное из произвольных комбинаций (произведений) из числа оставшихся событий, где каждое представлено не более одного раза. Тогда события $A_1, \dots, A_k$ называются *независимыми в совокупности*, если для любого $p \leq k$ и любого события $C \in B_p$ события A_p и C попарно независимы.

Следствие 1. Если события $A_1, \dots, A_k$ независимы в совокупности, то любое их подмножество независимо в совокупности. Соответственно любая пара независима попарно.

Следствие 2. Если события $A_1, ..., A_k$ независимы в совокупности, то вероятность их совместного осуществления равна произведению их вероятностей, т.е.

$$P(A_1A_2...A_k) = P(A_1)P(A_2)...P(A_k).$$

Следствие 3. Вероятность совместного осуществления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже произошли:

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)...P_{A_1...A_{n-1}}(A_n).$$

Заметим, что порядок осуществления событий роли не играет.

Задача 1.17. В денежно-вещевой лотерее из 1000 билетов на 24 выпадают денежные выигрыши и на 10 — вещевые. Вы приобрели два билета. Какова вероятность выиграть *хотя бы* по одному билету?

Решение. Пусть A — выигрыш по первому билету, B — по второму билету. Так как выигрышных 24 + 10 = 34 билета, то $P(A) = 0{,}034$, а вероятность проигрыша по первому билету $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0{,}966$. Чтобы найти вероятность выигрыша хотя бы по одному из двух билетов, от единицы вычитаем вероятность проигрыша сразу по двум билетам $P(\bar{A}\bar{B})$ (**и** по первому, **и** по второму). Так как приобретены два билета, то вероятность проигрыша по второму билету при условии, что первый проиграл, есть условная вероятность (так как теперь могут выиграть 34 билета из 999).

Поэтому $P(B|\bar{A}) = \dfrac{34}{999}$, а $P(\bar{B}|\bar{A}) = \dfrac{965}{999}$.

Тогда $P = 1 - P(\bar{B}\bar{A}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A}) = 1 - \dfrac{966}{1000} \cdot \dfrac{965}{999} \approx 0{,}067.$

Задача 1.18. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,95; второй — 0,9. Какова вероятность того, что при аварии сработает *только* один сигнализатор?

Решение. Обозначим буквой A событие «сработает только один сигнализатор», B — «сработает первый», C — «сработает второй сигнализатор». Тогда $P(B) = 0{,}95$; $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$; $P(C) = 0{,}9$; $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Получить желаемый результат можно двумя способами: ***или*** сработает первый, а второй при этом не сработает, ***или*** сработает только второй, ***и*** при этом первый не сработает. Операции между событиями при этом имеют вид: $A = B\bar{C} + \bar{B}C$. Тогда вероятность того, что сработает только один сигнализатор:

$$P(A) = P(B)P(\bar{C}) + P(\bar{B})P(C) = 0{,}95 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}05 = 0{,}14.$$

Формула умножения вероятностей. Основной задачей теории вероятностей является вычисление вероятностей сложных событий с использованием вероятностей более простых событий.

Теорема. *Вероятность одновременного появления событий* $A_1, \dots, A_n$ *выражается* ***формулой умножения вероятностей:***

$$\mathbf{P}(A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_n|A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}),$$

в которой вероятность каждого следующего по порядку события вычисляется при условии, что в рассматриваемом опыте произошли все предыдущие события.