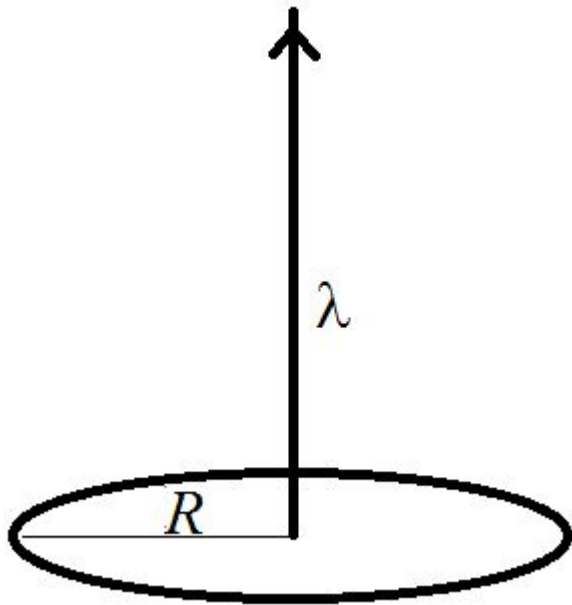


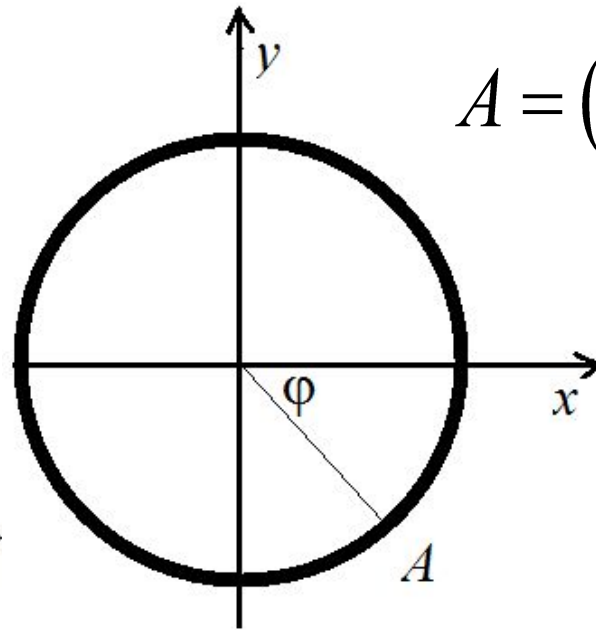
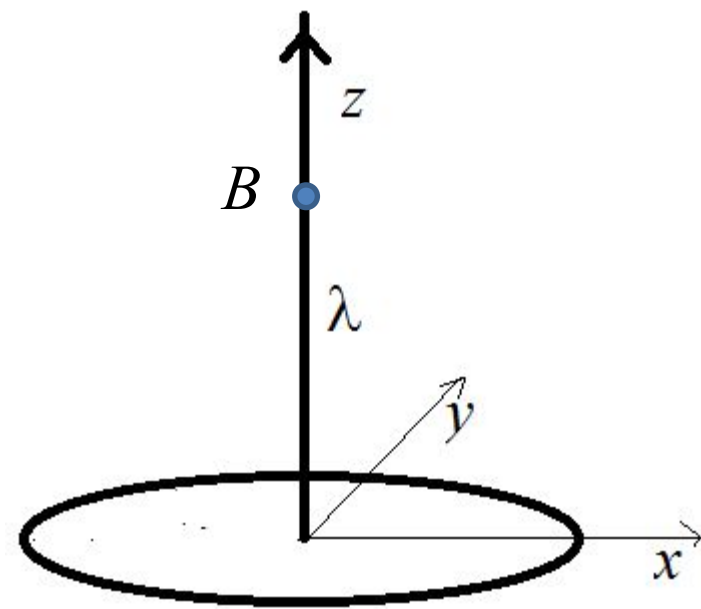
ТЕОРЕМА

ГАУССА

Проверочная работа

Система состоит из тонкого заряженного проволочного кольца радиуса R и очень длинной равномерно заряженной нити, расположенной по оси кольца так, что один из ее концов совпадает с центром кольца. Последнее имеет заряд q . На единицу длины нити приходится заряд λ . Найти силу взаимодействия кольца и нити.





$$A = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0)$$

$$dq_A = \frac{q}{2\pi} d\varphi$$

$$B(0, 0, z)$$

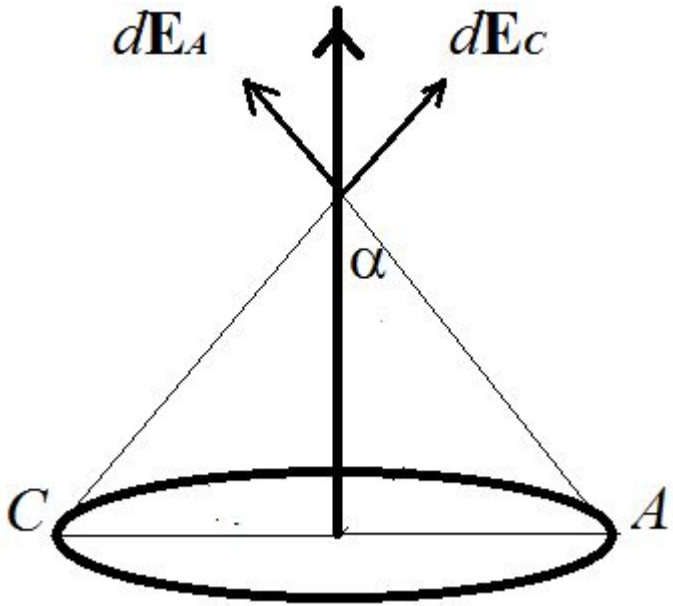
$$\mathbf{r}_{AB} = (-R \cos \varphi, -R \sin \varphi, z),$$

$$d\mathbf{E} = \frac{k dq_A}{r_{AB}^3} \mathbf{r}_{AB}$$

$$dE_x = -\frac{kq d\varphi}{2\pi r_{AB}^3} R \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad E_x = -\frac{kq}{2\pi r_{AB}^3} R \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$$

$$dE_y = -\frac{kq d\varphi}{2\pi r_{AB}^3} R \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad E_y = -\frac{kq}{2\pi r_{AB}^3} R \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$$

$$dE_z = \frac{kq d\varphi}{2\pi r_{AB}^3} z \quad \Rightarrow \quad E_z = \frac{kq}{2\pi r_{AB}^3} z \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{kq}{r_{AB}^3} z$$



$$E_z = \frac{kq}{r_{AB}^2} \cos \alpha$$

$$dF = E_z(z) dq_B$$

$$u = r_{AB}^2 = R^2 + z^2$$

$$F = \int_0^{+\infty} E_z(z) \lambda dz = \int_0^{+\infty} \frac{kq}{r_{AB}^3} z \lambda dz = kq \lambda \int_0^{+\infty} \frac{z dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$F = \frac{kq\lambda}{2} \int_{R^2}^{+\infty} \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{kq\lambda}{2} 2u^{-1/2} \Big|_{+\infty}^{R^2} = \frac{kq\lambda}{R}$$

Оператор ∇

$$\mathbf{q} = \mathbf{i}q_x + \mathbf{j}q_y + \mathbf{k}q_z$$

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\varphi \mathbf{q} = \mathbf{i}q_x \varphi + \mathbf{j}q_y \varphi + \mathbf{k}q_z \varphi$$

$$\nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{grad} \varphi$$

Дивергенция и ротор

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{q} = q_x a_x + q_y a_y + q_z a_z$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\mathbf{q} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ q_x & q_y & q_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \quad \operatorname{rota} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Символический метод

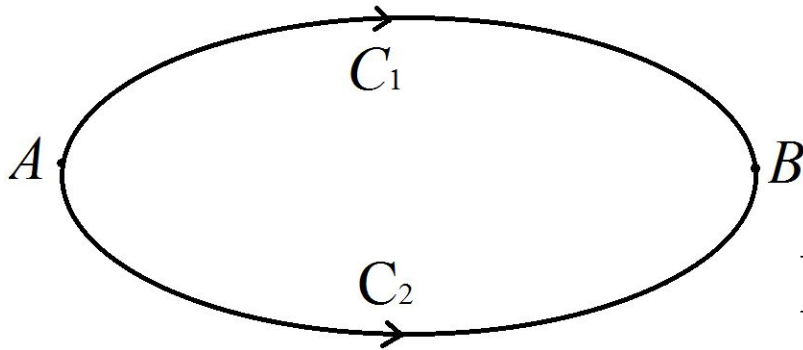
$$\mathit{div} \mathit{rota} = \nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{a}] = \mathbf{a} [\nabla \times \nabla] = 0$$

$$\mathit{rot} \mathit{grad} \varphi = \nabla \times (\nabla \varphi) = [\nabla \times \nabla] \varphi = 0$$

$$\begin{aligned} \mathit{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \nabla_{\mathbf{a}} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \nabla_{\mathbf{b}} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \\ &= \mathbf{b} \cdot \nabla_{\mathbf{a}} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{b}} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathit{rota} - \mathbf{a} \cdot \mathit{rotb} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathit{rot} \mathit{rota} &= \nabla \times [\nabla \times \mathbf{a}] = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \mathit{grad}(\nabla \cdot \mathbf{a}) = \\ &= \mathit{grad} \mathit{div} \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a} \end{aligned}$$

Потенциальное (безвихревое) поле



$$W_A - W_B = \int_{C_1} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \int_{C_2} \mathbf{F} d\mathbf{l}$$

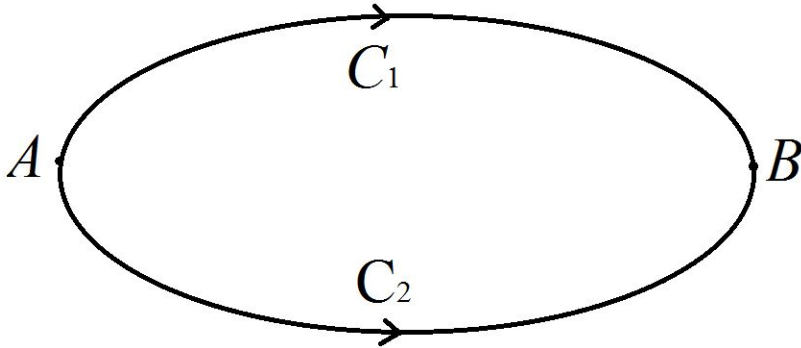
$$\mathbf{F} d\mathbf{l} \equiv F_x dx + F_y dy + F_z dz =$$

$$= -dW \equiv - \left(\frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz \right)$$

$$\mathbf{F} = -\nabla W$$

$$W_A - W_A = \oint \mathbf{F} d\mathbf{l}$$

Электростатический потенциал



$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}, \quad \varphi = \frac{W}{q}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

$$\varphi_A - \varphi_B = \int_{C_{AB}} \mathbf{E} d\mathbf{l}$$

Независимое определение ротора

$$\mathbf{rota} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\partial V} \mathbf{a} \times d\mathbf{S}}{V}$$

$$\mathbf{rota} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$$(\mathbf{rota})_n = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}}{S}$$

$$(\rho, \varphi, z): \quad \mathbf{rota} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_\rho & \rho a_\varphi & a_z \end{vmatrix}$$

Случай цилиндрической симметрии $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial}{\partial z} = 0 \right)$:

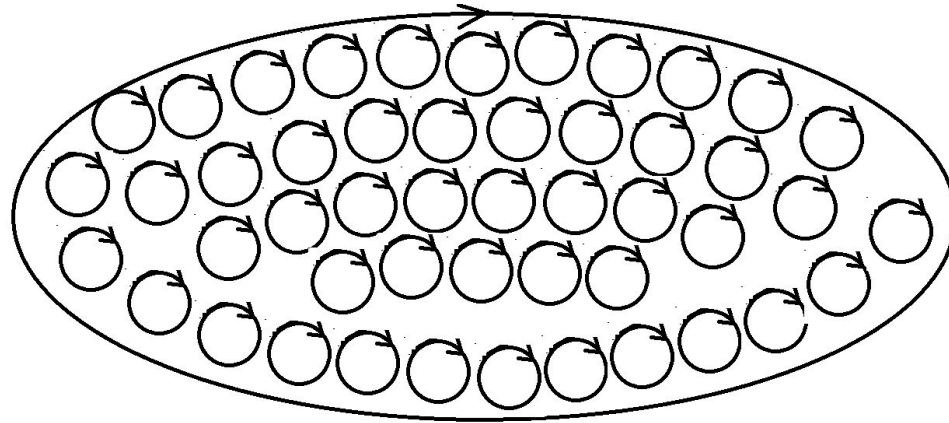
$$\mathit{rota} = \frac{\mathbf{e}_z}{\rho} \frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial \rho} - \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial a_z}{\partial \rho}$$

$$(r, \theta, \varphi): \quad \mathit{rota} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_r & r a_\theta & r \sin \theta a_\varphi \end{vmatrix}$$

Случай сферической симметрии $\left(\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \right)$:

$$\mathit{rota} = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \frac{\partial (ra_\theta)}{\partial r} - \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial (ra_\varphi)}{\partial r}$$

Теорема Стокса



$$\oint_{\partial S} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \text{rot} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$$

Значит для потенциального поля $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$

$$\text{rot} \mathbf{E} = 0.$$

Независимое определение дивергенции

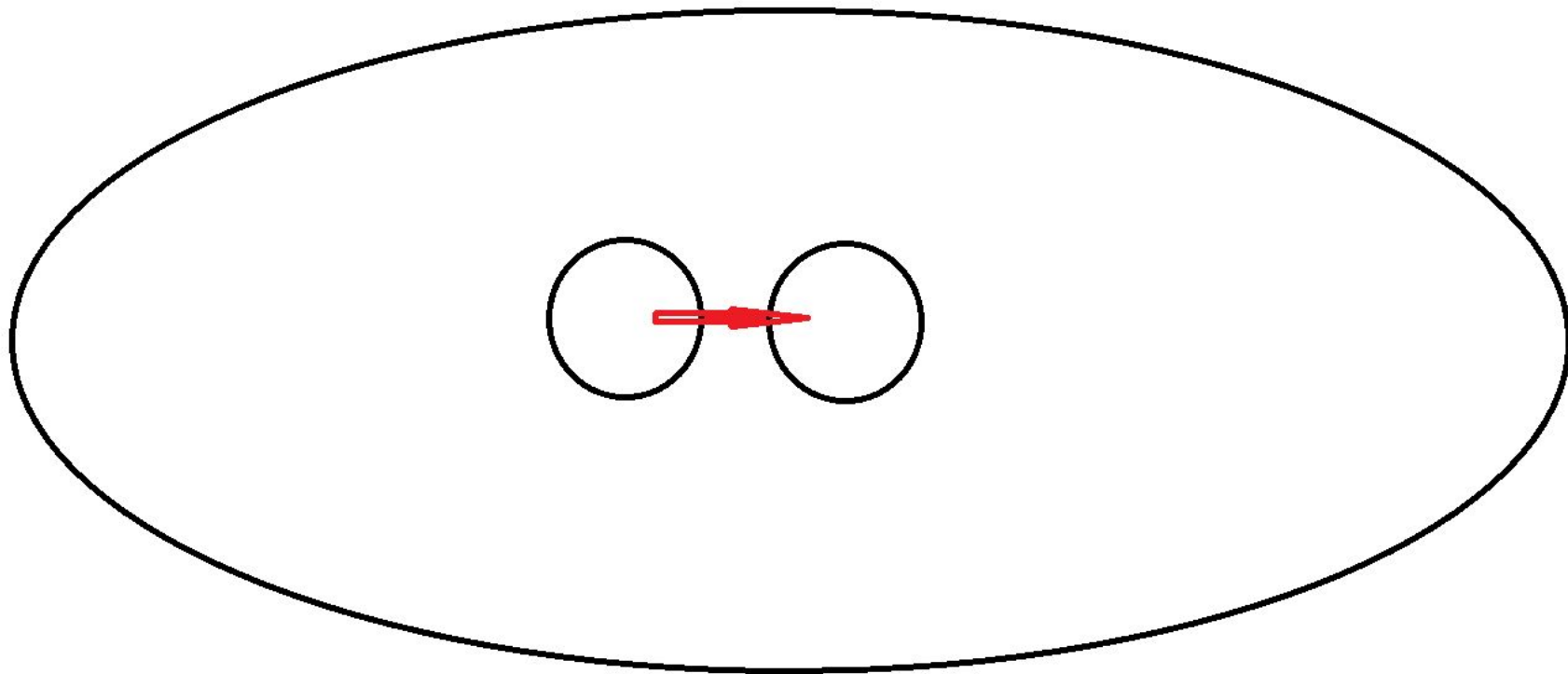
$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \qquad \operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}}{V}$$

$$(\rho, \varphi, z): \quad \operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$(r, \theta, \varphi):$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

Формула Остроградского



$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \oiint_{\partial V} \mathbf{a} dS$$

Формулы Остроградского и Стокса

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \oiint_{\partial V} \mathbf{a} d\mathbf{S}$$

$$\iint_S \operatorname{rota} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}$$

Принцип суперпозиции

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots$$

Поле системы зарядов равно векторной сумме полей подсистем.

Действует только в средах, в которых линейны уравнения Максвелла.

Мы можем им пользоваться если исследуемые

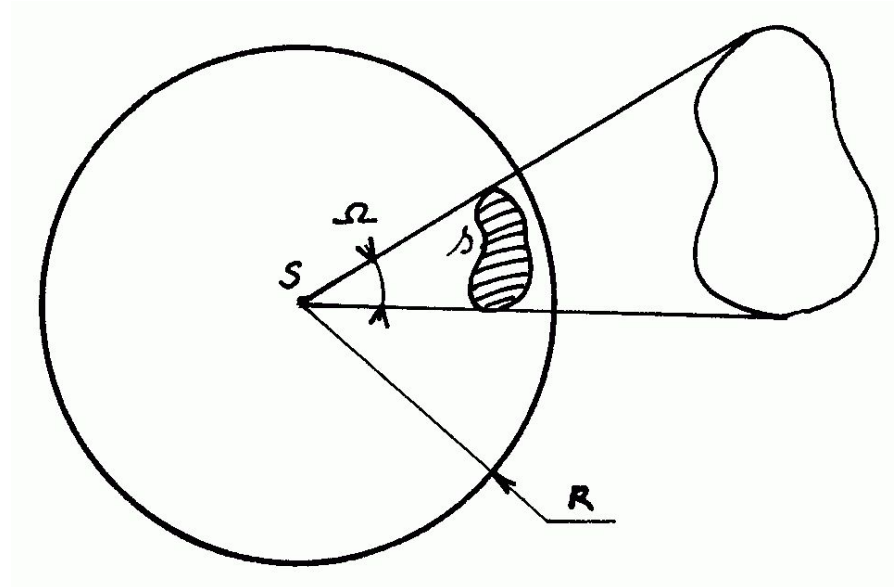
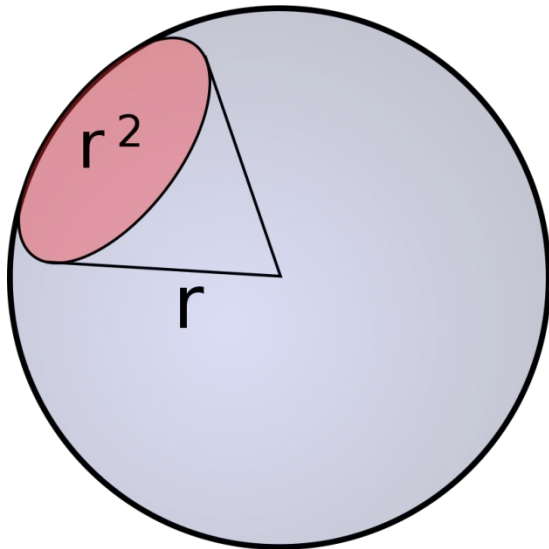
поля много меньше внутриатомных (макроскопические поля много меньше микроскопических).

Телесный угол

Телесный угол измеряется отношением площади той части сферы с центром в вершине угла, которая вырезается этим телесным углом, к квадрату радиуса

сферы:

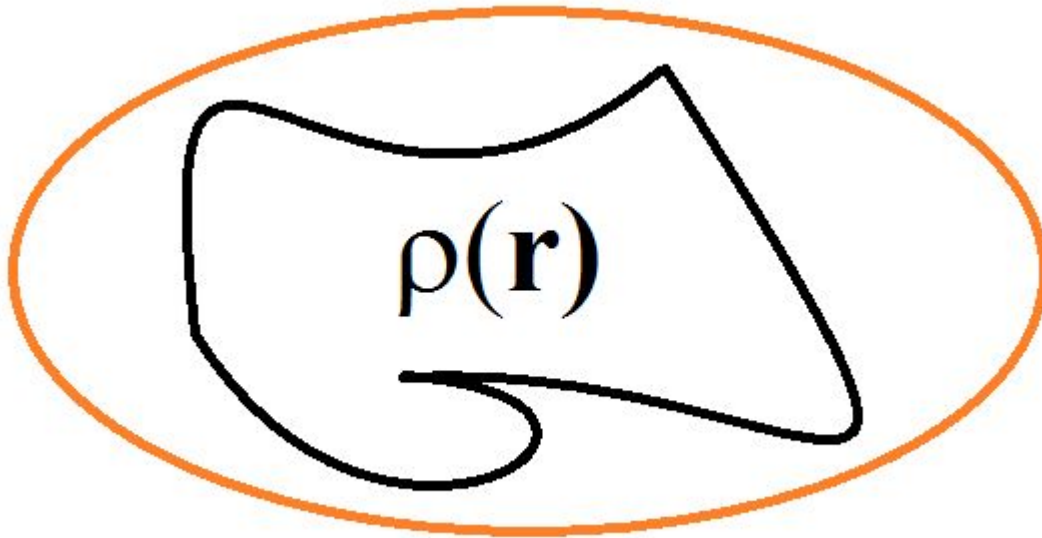
$$d\Omega = \frac{dS_0}{r^2} = \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{dS \cos\theta}{r^2} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{dS}}{r^3}, \quad \mathbf{dS} = \mathbf{n}dS$$



Теорема Гаусса

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\Phi_E \equiv \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S \frac{\mathbf{r}d\mathbf{S}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$



$$\Phi_E \equiv \oiint_{\partial V} \mathbf{E}d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Поле равномерно заряженного шара

$$\left. \begin{array}{l} R, Q \\ \hline E|_{r < R} \\ E|_{r > R} \end{array} \right|$$

$$\Phi_E \equiv \oiint_{\partial V} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$r < R: \quad \Phi_E \equiv 4\pi r^2 E = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0} r^3 \rho =$$

$$= \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} R^3 \varepsilon_0} = Q \frac{r^3}{\varepsilon_0 R^3}$$

$$E = Q \frac{r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$$r > R: \quad \Phi_E \equiv 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

