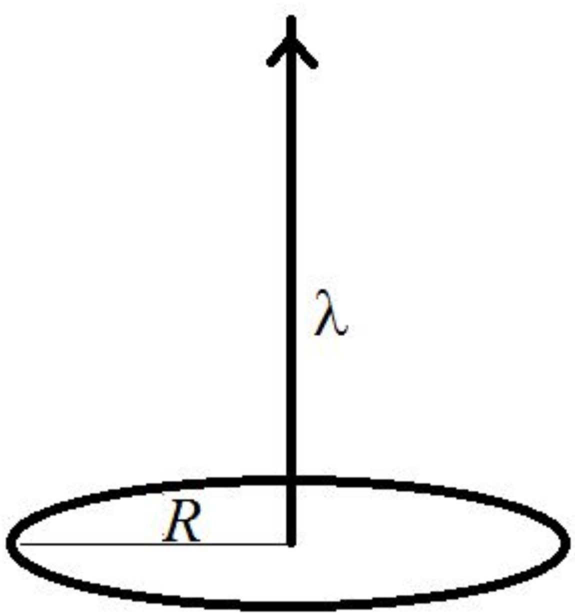
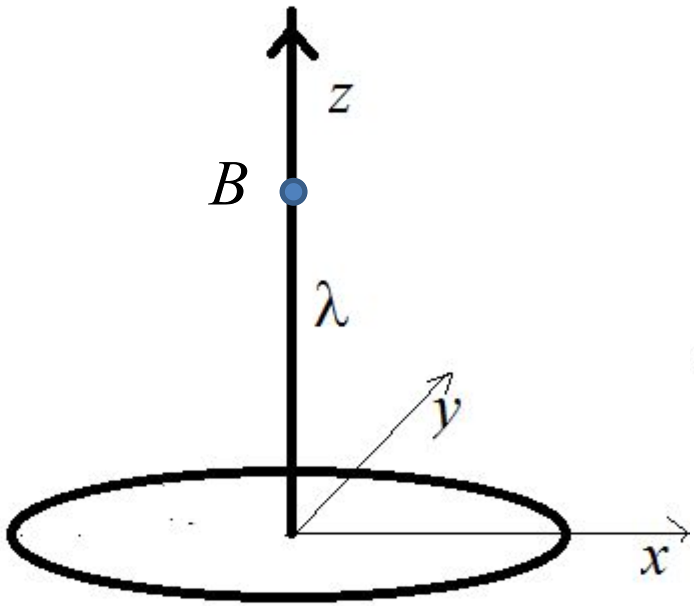
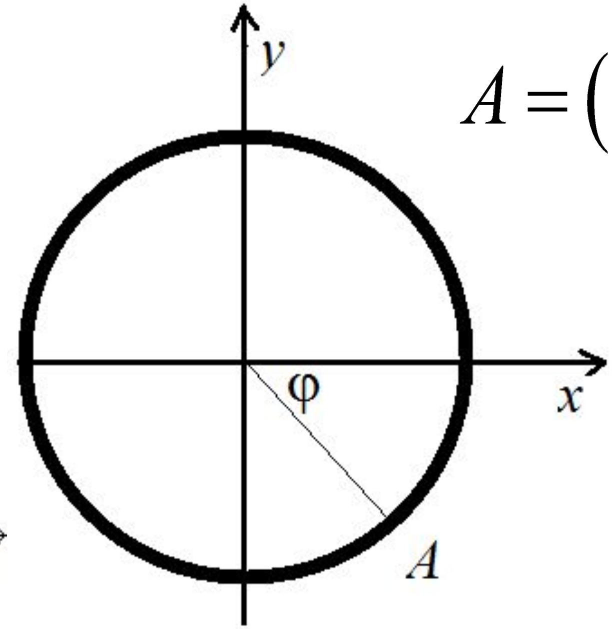
ТЕОРЕМА ГАУССА

Проверочная работа

Система состоит из тонкого заряженного проволочного кольца радиуса R и очень длинной равномерно заряженной нити, расположенной по оси кольца так, что один из ее концов совпадает с центром кольца. Последнее имеет заряд q. На единицу длины нити приходится заряд λ. Найти силу взаимодействия кольца и нити.







$$A = \left(R\cos\varphi,\ R\sin\varphi,\ 0 \right)$$

$$dq_A = \frac{q}{2\pi} d\varphi$$

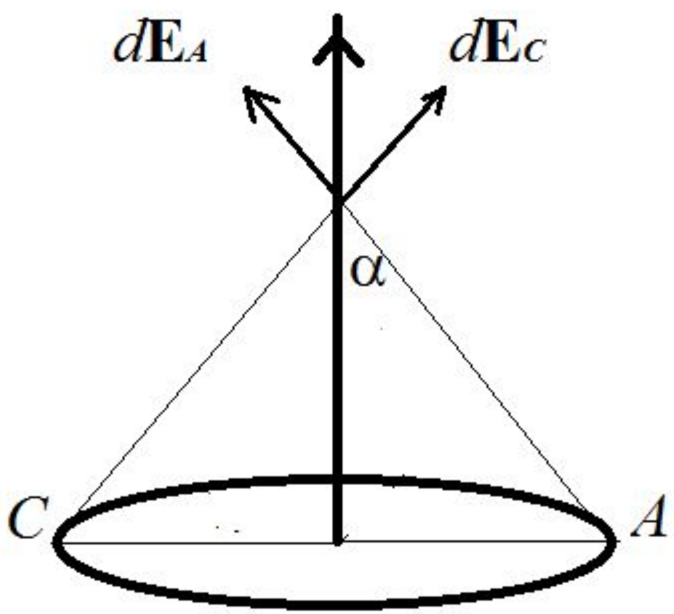
$$B\left(0,\ 0,\ z\right)$$

$$r_{AB} = \left(-R\cos\varphi,\ -R\sin\varphi,\ z \right), \qquad d\mathbf{E} = \frac{k\,dq_A}{r_{AB}^3}\mathbf{r}_{AB}$$

$$dE_x = -\frac{kq\,d\varphi}{2\pi r_{AB}^3} R\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad E_x = -\frac{kq}{2\pi r_{AB}^3} R\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0$$

$$dE_y = -\frac{kq\,d\varphi}{2\pi r_{AB}^3} R\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad E_y = -\frac{kq}{2\pi r_{AB}^3} R\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 0$$

$$dE_z = \frac{kq\,d\varphi}{2\pi r_{AB}^3} z \quad \Rightarrow \quad E_z = \frac{kq}{2\pi r_{AB}^3} z \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{kq}{r_{AB}^3} z$$



$$E_z = \frac{kq}{r_{AB}^2} \cos\alpha$$

$$dF = E_z(z)\,dq_B$$

$$u = r_{AB}^2 = R^2 + z^2$$

$$F = \int_0^{+\infty} E_z(z)\lambda dz = \int_0^{+\infty} \frac{kq}{r_{AB}^3} z\lambda dz = kq\lambda \int_0^{+\infty} \frac{zdz}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

$$F = \frac{kq\lambda}{2}\int_{R^2}^{+\infty}\frac{du}{u^{3/2}} = \frac{kq\lambda}{2}2u^{-1/2}\Big|_{+\infty}^{R^2} = \frac{kq\lambda}{R}$$

Оператор ∇

$$\mathbf{q} = \mathbf{i}q_x + \mathbf{j}q_y + \mathbf{k}q_z$$

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\varphi\mathbf{q} = \mathbf{i}q_x\varphi + \mathbf{j}q_y\varphi + \mathbf{k}q_z\varphi$$

$$\nabla\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = grad\varphi$$

Дивергенция и ротор

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{q}=q_x a_x+q_y a_y+q_z a_z$$

$$div\,\mathbf{a}=\nabla\cdot\mathbf{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\mathbf{q}\times\mathbf{a}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ q_x & q_y & q_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$$

$$rot\mathbf{a}=\nabla\times\mathbf{a}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$$

Символический метод

$$div\ rot\mathbf{a} = \nabla \cdot \left[\nabla \times \mathbf{a}\right] = \mathbf{a}\left[\nabla \times \nabla\right] = 0$$

$$rot\ grad\varphi = \nabla \times \left(\nabla \varphi\right) = \left[\nabla \times \nabla\right]\varphi = 0$$

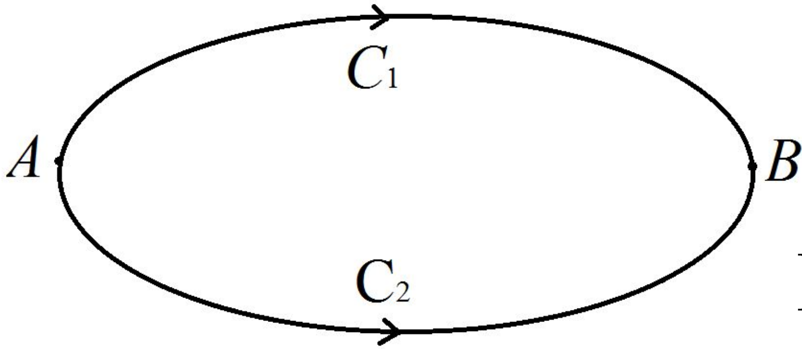
$$div(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla_{\mathbf{a}} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \nabla_{\mathbf{b}} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) =$$

$$= \mathbf{b} \cdot \nabla_{\mathbf{a}} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{b}} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot rot\mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot rot\mathbf{b}$$

$$rot\ rot\mathbf{a} = \nabla \times \left[\nabla \times \mathbf{a}\right] = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - a(\nabla \mathbf{a}) =$$

$$= grad\ div\,\mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a}$$

Потенциальное (безвихревое) поле



$$W_A - W_B = \int_{C_1} \mathbf{F}d\mathbf{l} = \int_{C_2} \mathbf{F}d\mathbf{l}$$

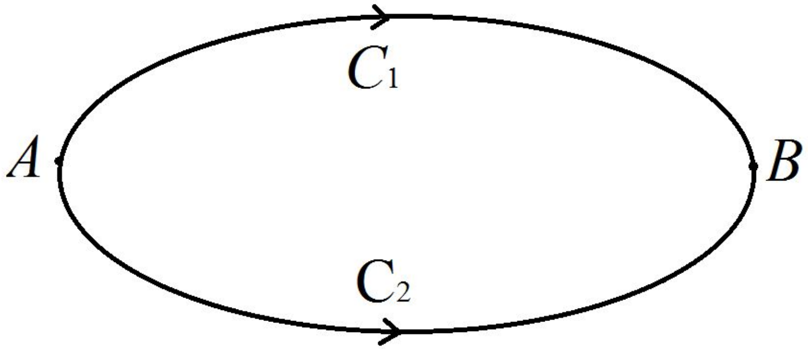
$$\mathbf{F}d\mathbf{l} \equiv F_x dx + F_y dy + F_z dz =$$

$$= -dW \equiv -\left(\frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz \right)$$

$$\mathbf{F} = -\nabla W$$

$$W_A - W_A = \oint \mathbf{F}d\mathbf{l}$$

Электростатический потенциал



$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}, \ \varphi = \frac{W}{q}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

$$\varphi_A - \varphi_B = \int\limits_{C_{AB}} \mathbf{Edl}$$

Независимое определение ротора

$$rot\mathbf{a} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint\!\!\!\oint_{\partial V} \mathbf{a}\times d\mathbf{S}}{V}$$

$$rot\mathbf{a} = \nabla\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$$\left(rot\mathbf{a}\right)_n = \lim_{S\to 0}\frac{\oint_{\partial S} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{l}}{S}$$

$$\left(\rho,\varphi,z\right):\quad rot\mathbf{a} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_\rho & \rho a_\varphi & a_z \end{vmatrix}$$

Случай цилиндрической симметрии $\left(\dfrac{\partial}{\partial \varphi} = 0,\ \dfrac{\partial}{\partial z} = 0 \right):$

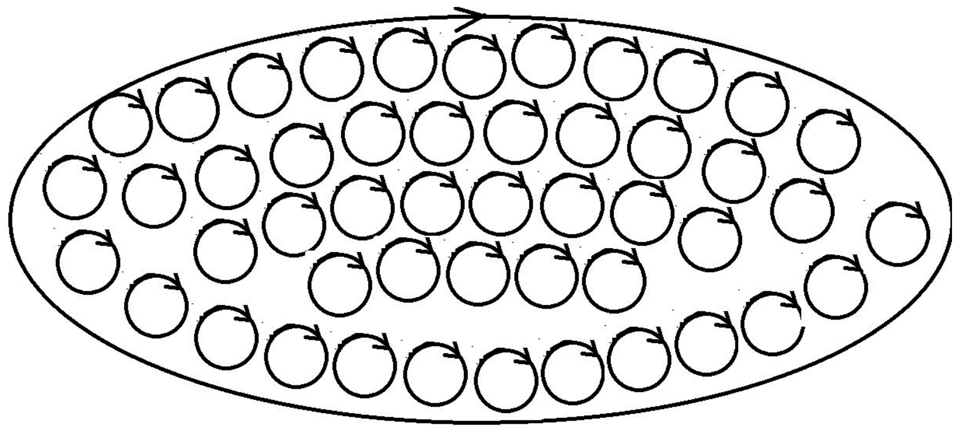
$$rot\mathbf{a} = \frac{\mathbf{e}_z}{\rho} \frac{\partial\left(\rho a_\varphi\right)}{\partial \rho} - \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial a_z}{\partial \rho}$$

$$\left(r,\theta,\varphi\right): \quad rot\mathbf{a} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin\theta\mathbf{e}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_r & ra_\theta & r\sin a_\varphi \end{vmatrix}$$

Случай сферической симметрии $\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta} = \dfrac{\partial}{\partial\varphi} = 0\right)$:

$$rot\mathbf{a} = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r}\frac{\partial\left(ra_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\frac{\partial\left(ra_\varphi\right)}{\partial r}$$

Теорема Стокса



$$\oint\limits_{\partial S} \mathbf{a}\cdot\mathbf{dl} = \iint\limits_{S} rot\mathbf{a}\cdot\mathbf{dS}$$

Значит для потенциального поля $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$

$$rot\mathbf{E} = 0.$$

Независимое определение дивергенции

$$div\,\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

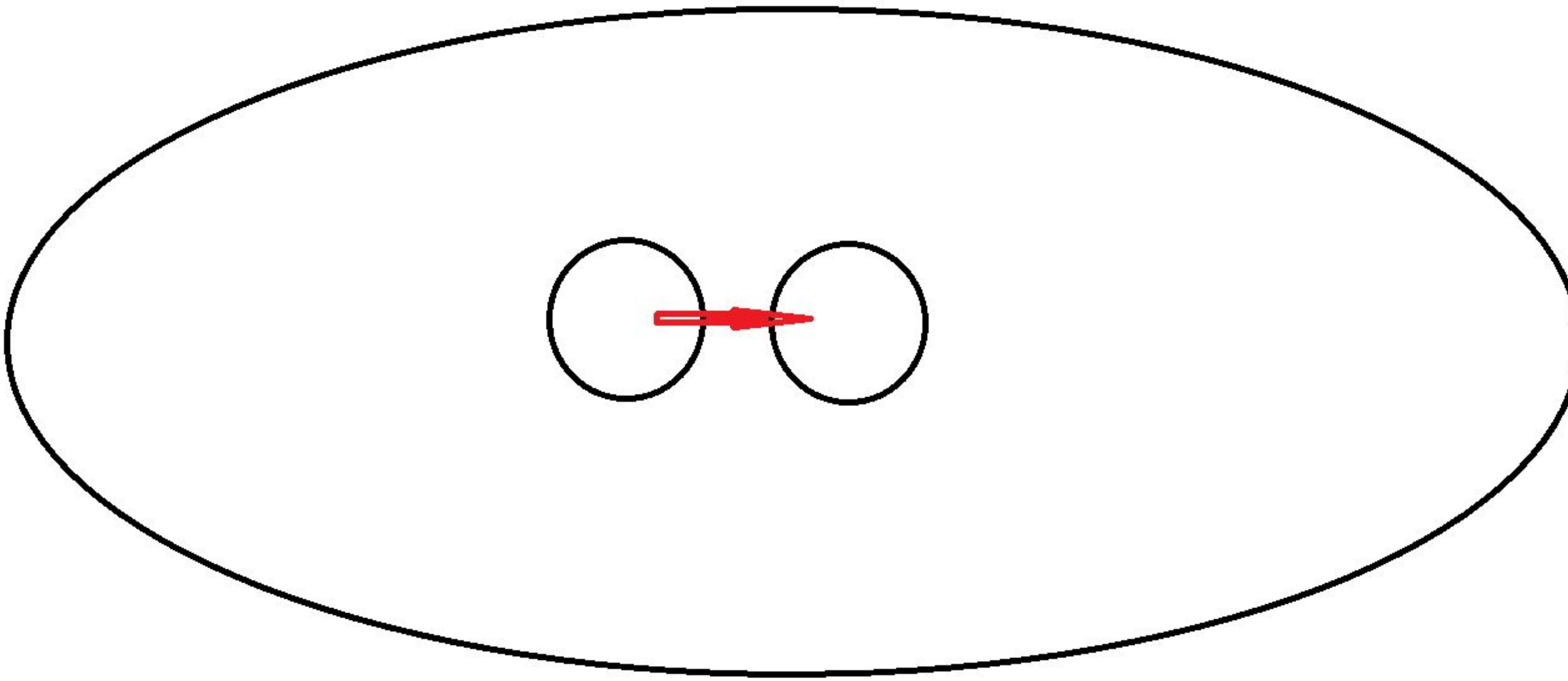
$$div\mathbf{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\oiint_{\partial V} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dS}}{V}$$

$$(\rho, \varphi, z): \quad div\mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$(r, \theta, \varphi):$$

$$div\mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial(\sin\theta\, a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

Формула Остроградского



$$\iiint\limits_V div\,\mathbf{a}dV = \oiint\limits_{\partial V} \mathbf{a}d\mathbf{S}$$

Формулы Остроградского и Стокса

$$\iiint\limits_V div\,\mathbf{a}dV = \oiint\limits_{\partial V} \mathbf{a}d\mathbf{S}$$

$$\iint\limits_S rot\mathbf{a}\cdot d\mathbf{S} = \oint\limits_{\partial S} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{l}$$

Приецип суперпозиции

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots$$

Поле системы зарядов равно векторной сумме полей подсистем.

Действует только в средах, в которых линейны уравнения Максвелла.

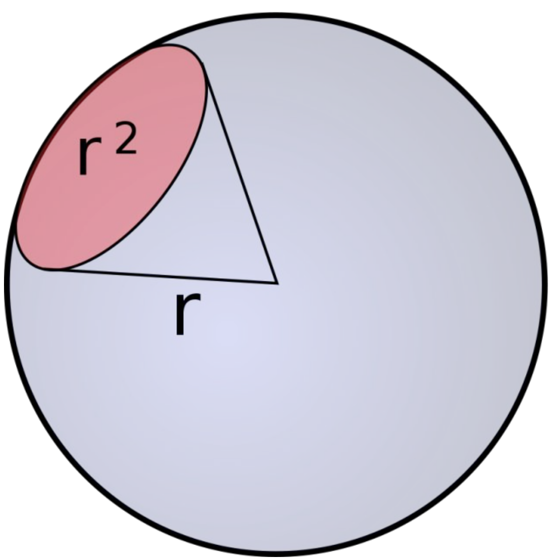
Мы можем им пользоваться если исследуемые

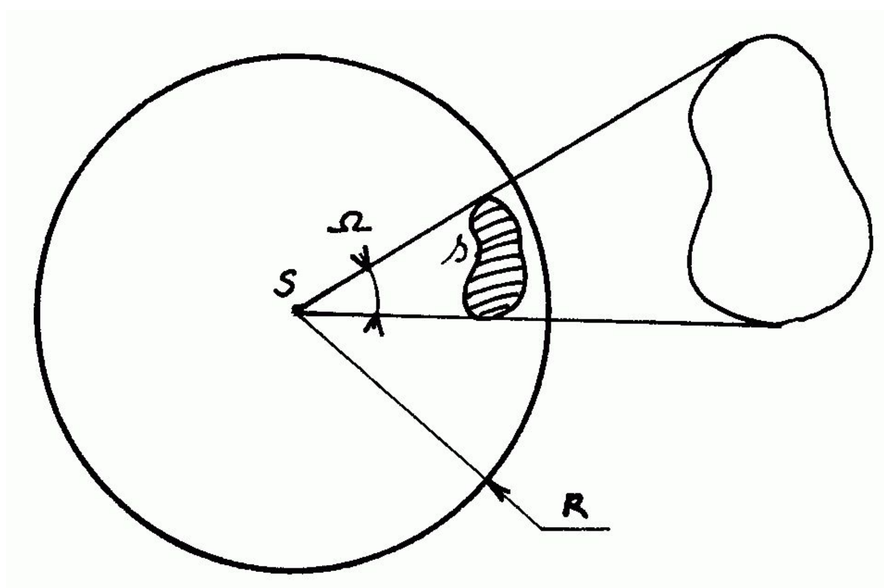
поля много меньше внутриатомных (макроскопические поля много меньше микроскопических).

Телесный угол

Телесный угол измеряется отношением площади той части сферы с центром в вершине угла, которая вырезается этим телесным углом, к квадрату радиуса сферы:

$$d\Omega = \frac{dS_0}{r^2} = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{dS}}{r^3}, \quad \mathbf{dS} = \mathbf{n}\,dS$$

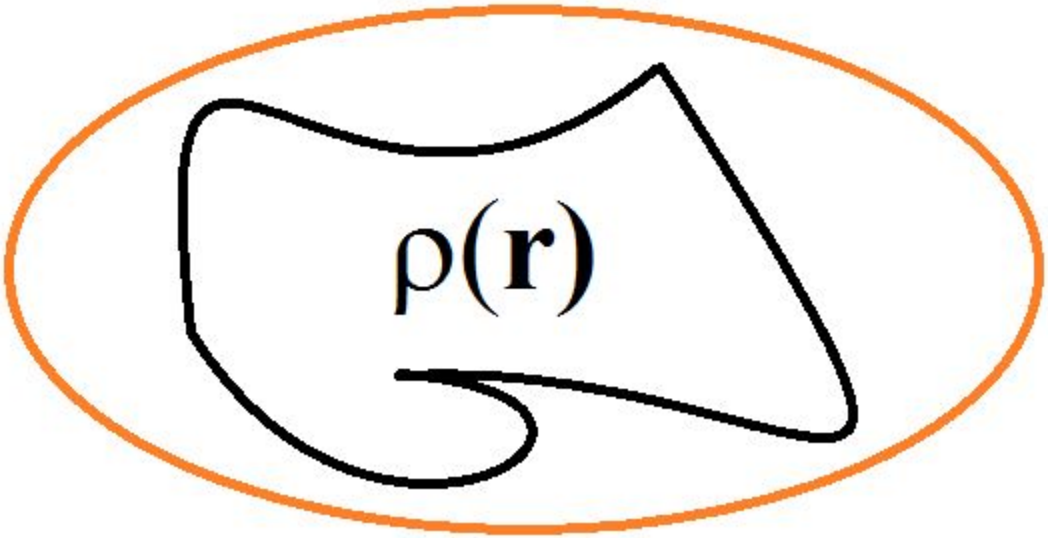




Теорема Гаусса

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\Phi_E \equiv \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{r}d\mathbf{S}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



$$\Phi_E \equiv \oint_{\partial V} \mathbf{EdS} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Поле равномерно заряженного шара

$$\left.\begin{array}{l} R,\ Q \\ \hline E\big|_{r<R} \\ E\big|_{r>R} \end{array}\right|$$

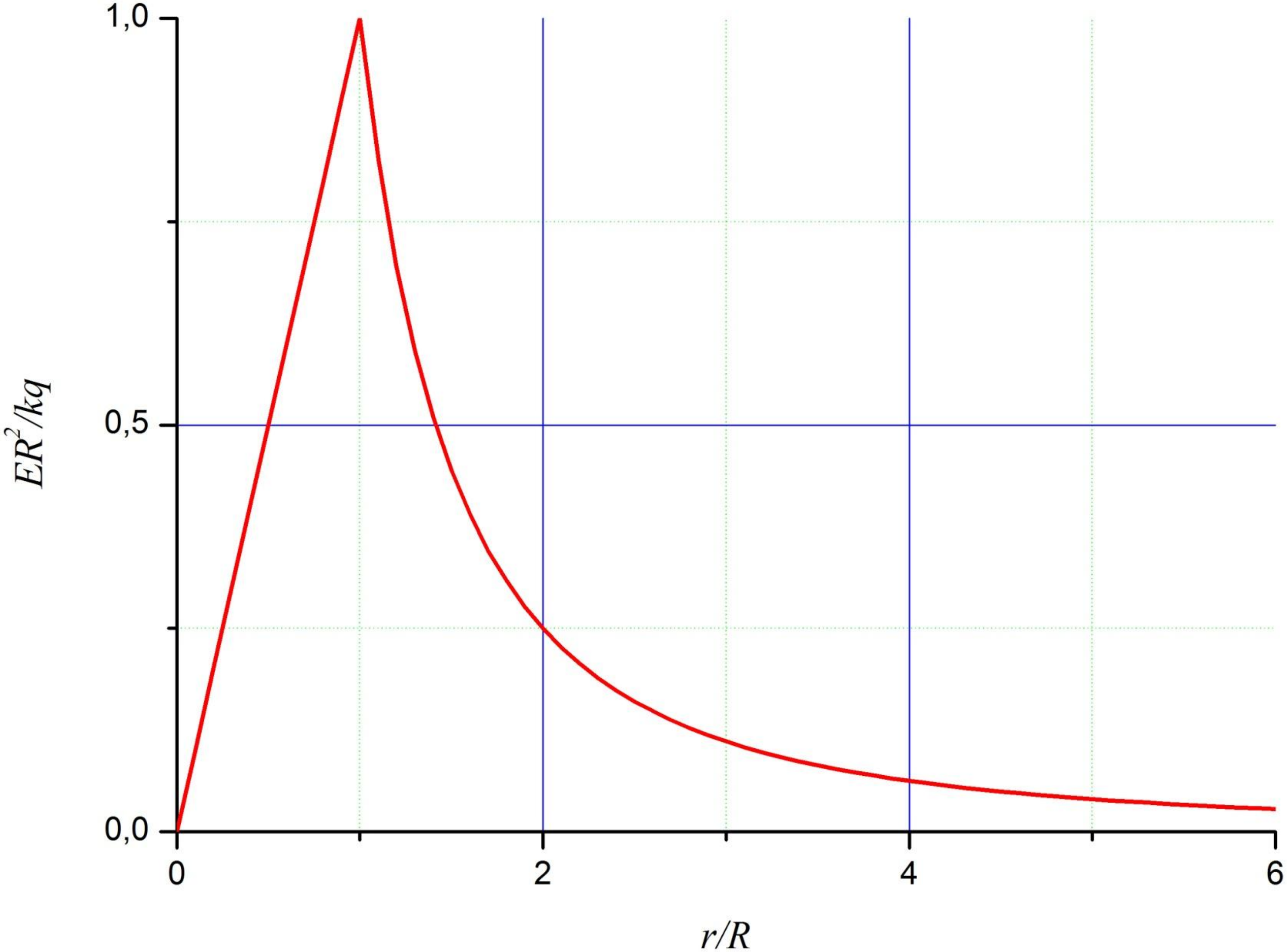
$$\Phi_E \equiv \oiint\limits_{\partial V} \mathbf{EdS} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint\limits_{V} \rho\, dV = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$r < R: \quad \Phi_E \equiv 4\pi r^2 E = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0} r^3 \rho =$$

$$= \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} R^3 \varepsilon_0} = Q \frac{r^3}{\varepsilon_0 R^3}$$

$$E = Q \frac{r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$$r > R: \quad \Phi_E \equiv 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$



1,0
0,5
0,0
0
2
4
6
ER^2/kq
r/R