НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ОСНОВЫ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ. ЛЕКЦИЯ 10:

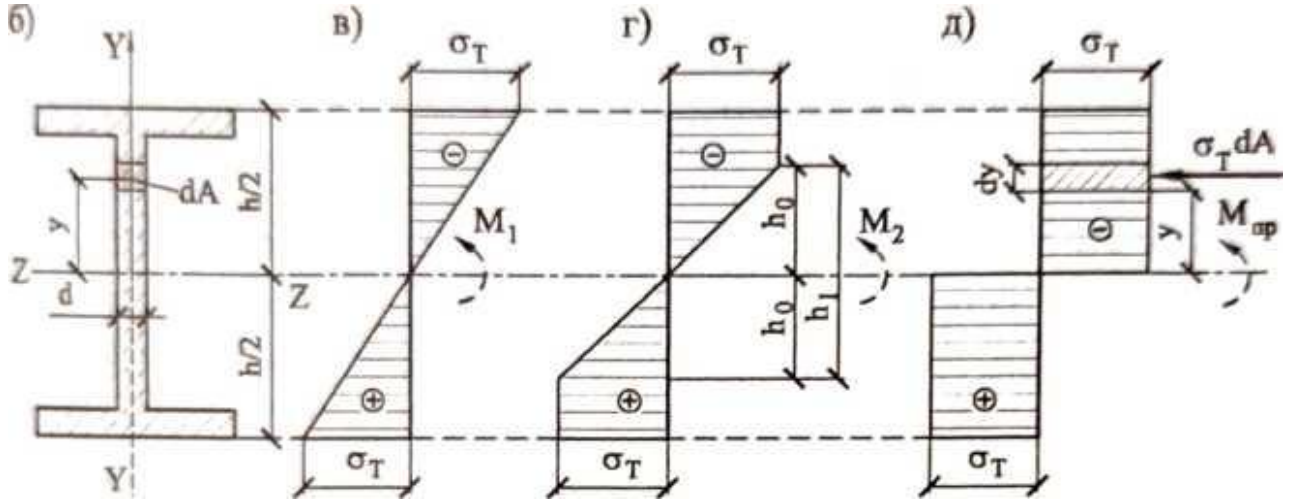
МЕТОД ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

Савин Сергей Юрьевич
Доцент кафедры ЖБК, к.т.н.

1921-2021 МГСУ

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ. ПЛАСТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Рассмотрим шарнирно опертую по концам металлическую балку с сечением в виде двутавра, нагруженную поперечной нагрузкой, и проследим за изменением нормальных напряжений в ее наиболее опасном сечении при постепенном возрастании внешней нагрузки.



При некотором значении внешней нагрузки в опасном сечении балки в крайних волокнах возникнут нормальные напряжения, равные пределу текучести σ(т).

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ. ПЛАСТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Величину изгибающего момента M1 в сечении в этом случае можно найти по формуле

$$M_1 = \sigma_T W,$$

где W - момент сопротивления сечения. Это состояние конструкции не является предельным, поскольку все средние волокна балки работают в упругой стадии.
При дальнейшем возрастании нагрузки средние волокна постепенно переходят в пластическое состояние. При вовлечении в зону пластичности всех волокон рассматриваемого поперечного сечения в нем возникает так называемый ***пластический шарнир***. Отличие пластического шарнира от простого заключается в том, что в простом шарнире изгибающий момент всегда равен нулю, а пластический шарнир передает изгибающий момент, равный предельному M = Мпр.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ. ПЛАСТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Предельный изгибающий момент Мпр можно определить, рассматривая состояние сечения, когда предел текучести достигнут по всей высоте сечения

$$M_{пр} = 2\int_0^{h/2} \sigma_т dA \cdot y = 2\sigma_т \int_0^{h/2} y dA = 2\sigma_т S_0,$$

где So - статический момент половины сечения балки относительно нейтральной оси.

Или

$$M_{пл} = 2\sigma_т S_0 = \sigma_т W_{пл},$$

где Wпл - пластический момент сопротивления сечения.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ. ПЛАСТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Сопоставим пластический и упругий моменты сопротивления на примере прямоугольного сечения bxh:

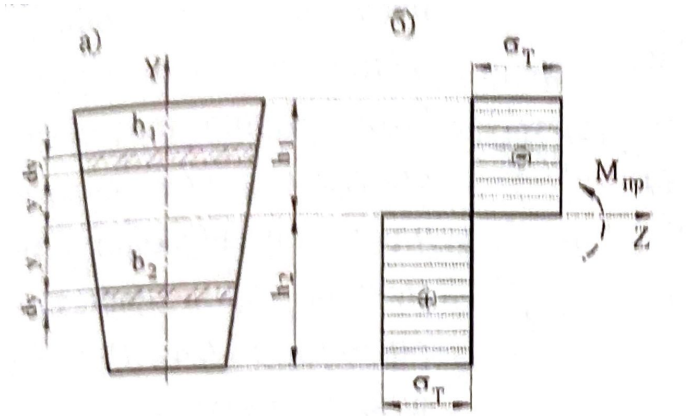
$$W_{пл} = 2S_0 = 2\frac{bh^2}{8} = \frac{bh^2}{4}, \qquad W = \frac{bh^2}{6}, \qquad \frac{W_{пл}}{W} = 1{,}5.$$

Таким образом, для прямоугольного сечения предельный момент больше упругого в 1.5 раза. Для двутавра это отношение намного меньше и равно 1.16, что объясняется рациональностью поперечного сечения двутавра.

Если сечение балки несимметрично относительно горизонтальной оси, то для определения пластического момента сначала необходимо определить положение нейтральной оси из условия равновесия:

$$\sum X = 0, \qquad \sigma_т A_{сж} = \sigma_т A_{рас}, \qquad A_{сж} = A_{рас}.$$

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ. ПЛАСТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ



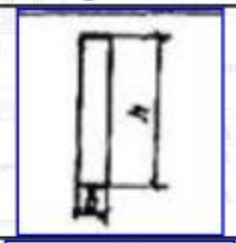
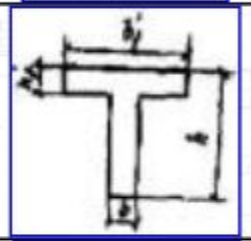
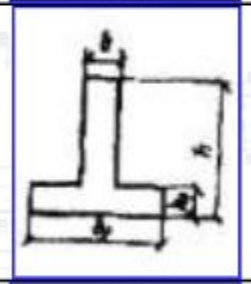
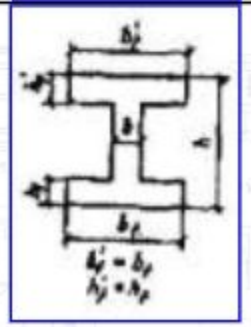
Предельный изгибающий момент найдём как сумму моментов внутренних сил сжатой и растянутой зон сечения относительно нейтральной оси:

$$M_{пр} = \sigma_т \int_0^{h_1} (b_1 dy) y + \sigma_т \int_0^{h_2} (b_2 dy) y = \sigma_т (S_1 + S_2) = \sigma_т W_{пл}.$$

Отсюда получим:

$$W_{пл} = S_1 + S_2.$$

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ. ПЛАСТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ

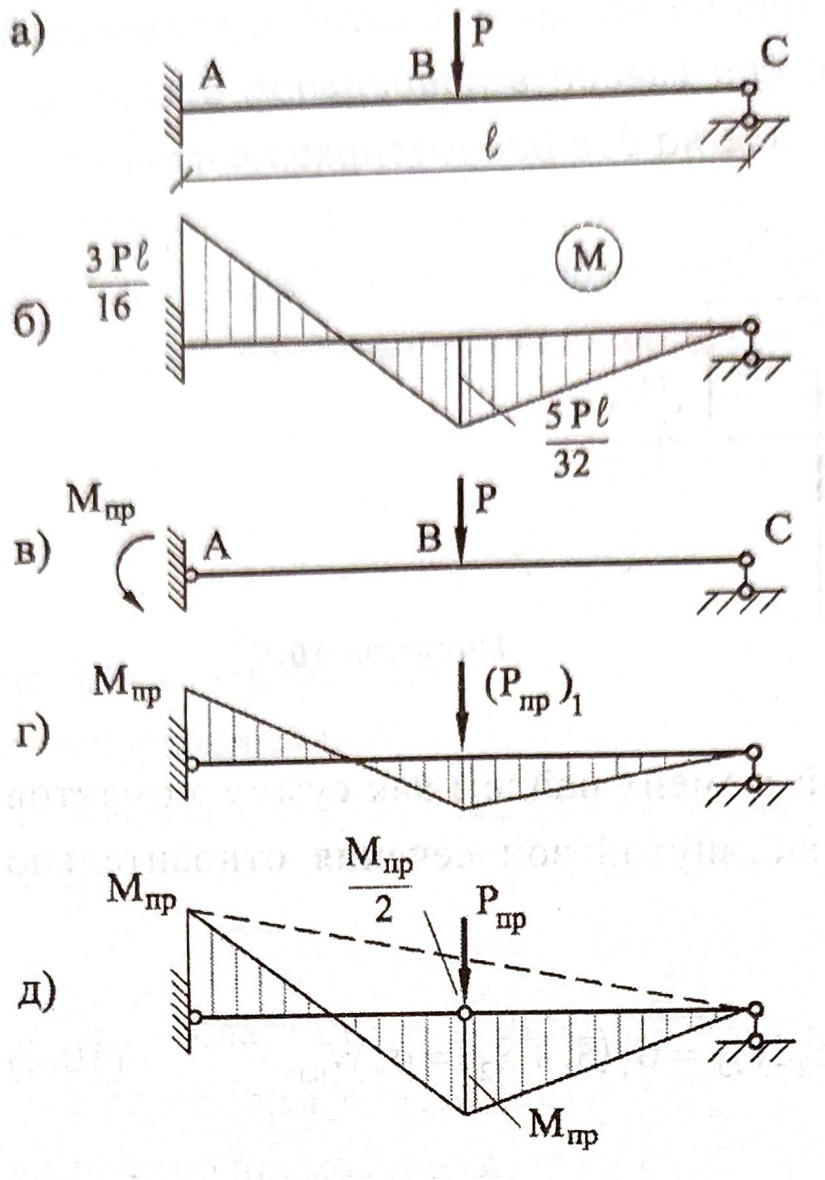
Сечение	Коэффициент γ	Форма поперечного сечения
1. Прямоугольное	1,30	
2.Тавровое с полкой, расположенной в сжатой зоне	1,30	
3. Тавровое с полкой (уширением), расположенной в растянутой зоне:		
а) при $b_f/b \le 2$ независимо от отношения h_f/h	1,25	
б) при $b_f/b > 2$ и $h_f/h \ge 0,2$	1,25	
в) при $b_f/b > 2$ и $h_f/h < 0,2$	1,20	
4.Двутавровое симметричное (коробчатое):		
а) при $b'_f/b = b_f/b \le 2$ независимо от отношения $h'_f/h = h_f/h$	1,30	
б) при $2 < b'_f/b = b_f/b \le 6$ независимо от отношения $h'_f/h = h_f/h$	1,25	
в) при $b'_f/b = b_f/b > 6$ и $h'_f/h = h_f/h \ge 0,2$	1,25	
г) при $6 < b'_f/b = b_f/b \le 15$ и $h'_f/h = h_f/h < 0,2$	1,20	
д) при $b'_f/b = b_f/b \ge 15$ и $h'_f/h = h_f/h < 0,2$	1,15	

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТАТИЧЕСКОГО СПОСОБА

Рассмотрим однопролётную один раз статически неопределимую балку, изображённую на рисунке, в середине пролёта которой приложена сосредоточенная сила, Проведя упругий расчёт этой балки, построим эпюру изгибающих моментов, из которой видно, что при постепенном возрастании внешней нагрузки пластические шарниры сначала образуются в заделке А, а затем в сечении В.

При возникновении пластического шарнира в сечении А несущая способность балки еще не исчерпана. Этой стадии нагружения системы соответствует эпюра изгибающих моментов, приведенная на рисунке г. Предельную нагрузку $(P_{пр})_1$ найдем, приравнивая предельный момент к изгибающему моменту на опоре А:

$$M_{пр} = \frac{3}{16}(P_{пр})_1 \ell, \qquad (P_{пр})_1 = \frac{16}{3}\frac{M_{пр}}{\ell}.$$



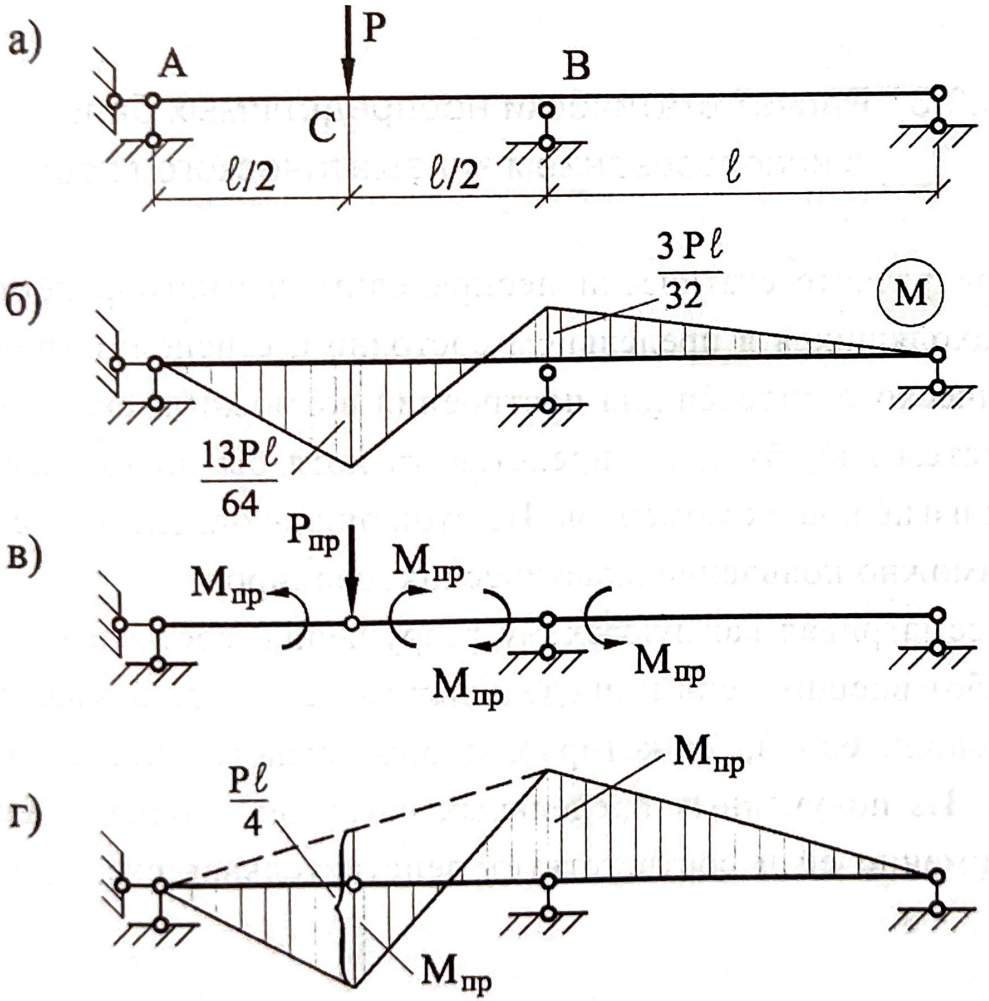
РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТАТИЧЕСКОГО СПОСОБА

Расчёт многопролётных балок ведется аналогичным образом. Пусть необходимо найти предельную нагрузку для двухпролётной статически неопределимой балки, изображённой на рисунке.

Проведя упругий расчёт этой балки» построим эпюру изгибающих моментов Муп (рис. б). Из этой эпюры видно, что при постепенном возрастании внешней нагрузки пластические шарниры сначала образуются в сечении С под сосредоточенной силой, а затем в сечении над опорой В.

Эпюра изгибающих моментов, соответствующая предельному состоянию системы, приведена на рисунке г. По этой эпюре найдём предельную нагрузку Рпр:

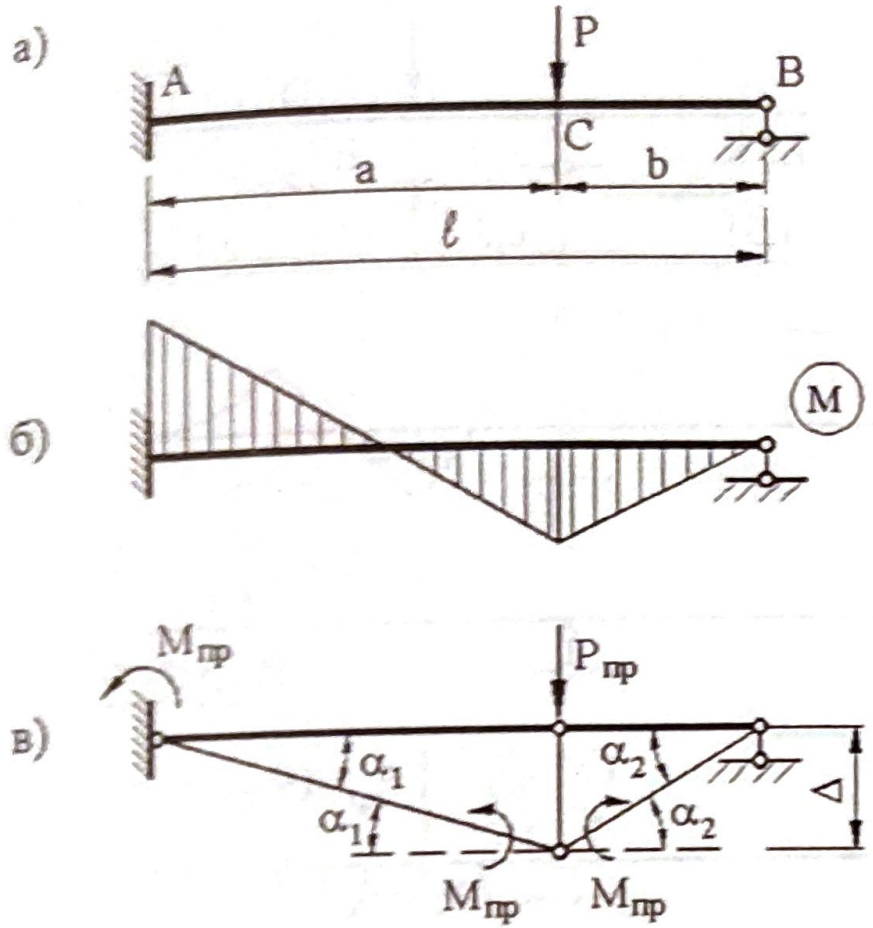
$$\frac{P_{пр}\ell}{4} - \frac{1}{2}M_{пр} = M_{пр}, \qquad P_{пр} = \frac{6M_{пр}}{\ell}$$



РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КИНЕМАТИЧЕСКОГО СПОСОБА

При расчёте статически неопределимых многопролётных балок, находящихся в предельном состоянии, с использованием кинематического способа для построения возможных схем разрушения системы необходимо представить хотя бы приближенно вид эпюры изгибающих моментов. По этой эпюре определяют сечения, где возможно появление пластических шарниров.

Рассматривая каждую схему разрушения, составляют уравнения работ внешних сил и предельных моментов на возможных перемещениях балки, из которых и определяются предельные нагрузки. Из полученных предельных нагрузок выбирают наименьшую, именно ей и соответствует действительная схема разрушения.



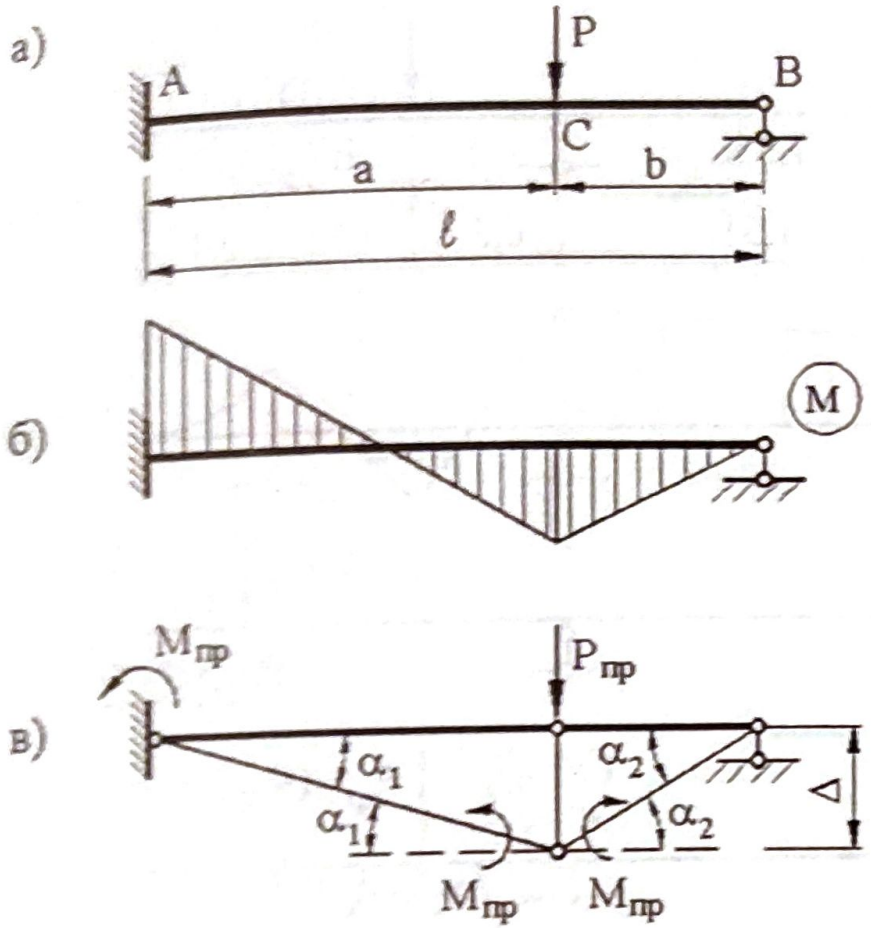
РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КИНЕМАТИЧЕСКОГО СПОСОБА

Решение. Вид эпюры изгибающих моментов для заданной балки, которой будет соответствовать только одна возможная схема разрушения, приведен на рисунке б. Внешняя сила P будет совершать работу на перемещении Δ; два предельных момента (один в шарнире A и один в шарнире C) - на углах поворота $\alpha_1 = \Delta/a$, а второй предельный момент в шарнире C - на угле поворота $\alpha_2 = \Delta/b$.

Составляя условие равенства работ внешних и внутренних сил, получим:

$$P_{пр}\cdot\Delta = 2M_{пр}\cdot\alpha_1 + M_{пр}\cdot\alpha_2, \qquad P_{пр}\cdot\Delta = M_{пр}\Delta\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right);$$

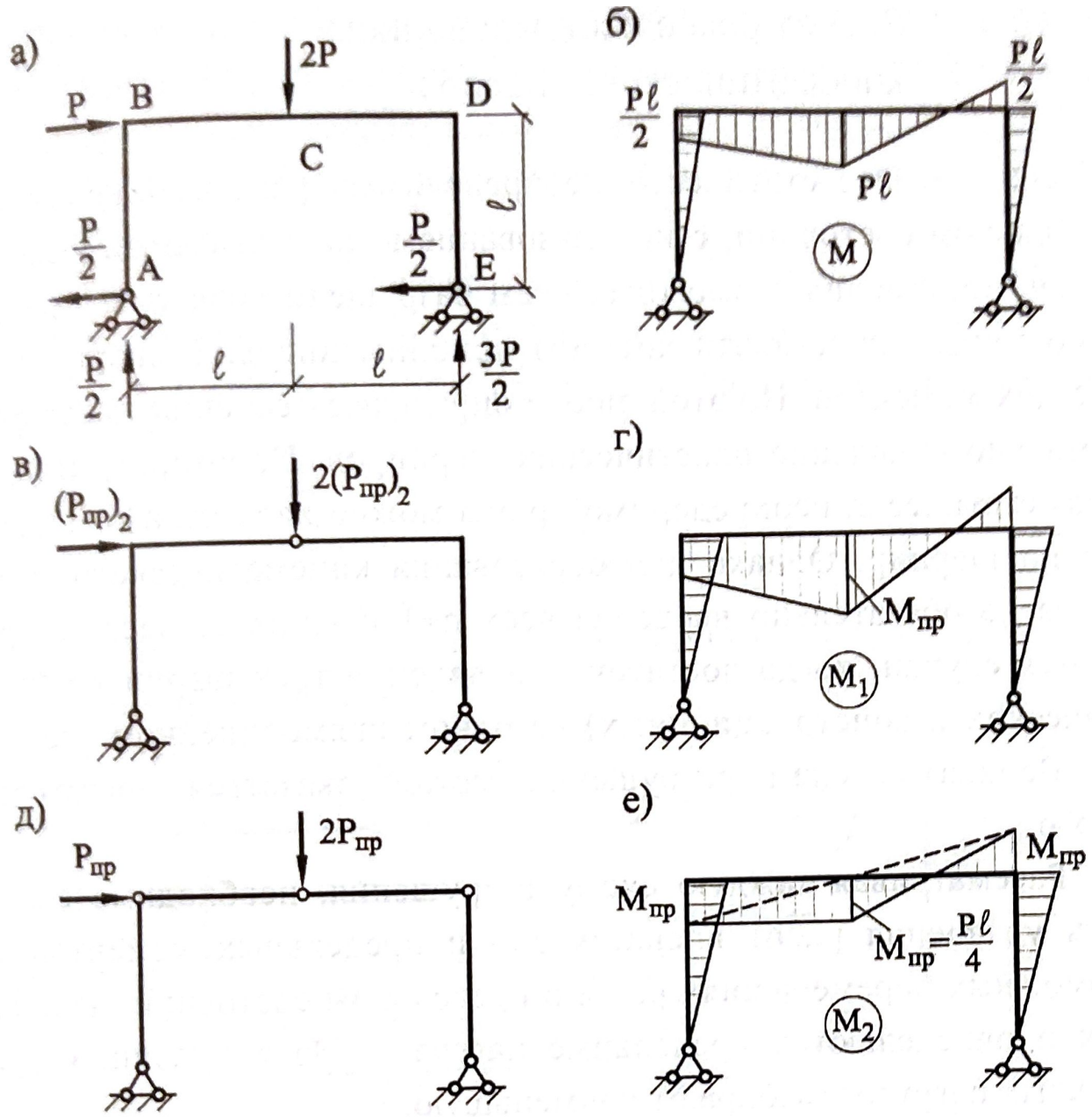
$$P_{пр} = M_{пр}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right).$$



РАСЧЁТ РАМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТАТИЧЕСКОГО СПОСОБА

Рассмотрим один раз статически неопределимую раму, изображенную на рисунке а. Проведя упругий расчёт этой рамы, построим эпюру изгибающих моментов (рис. б), из которой видно, что при постепенном возрастании внешней нагрузки первый пластический шарнир образуется в сечении С, а затем одновременно могут образоваться пластические шарниры в сечениях В и D.
При возникновении пластического шарнира в сечение С (рис. в) несущая способность рамы ещё не исчерпана. Этой стадии нагружения системы соответствует эпюра изгибающих моментов, приведённая на рисунке г.
Предельную нагрузку (Рпр)1 найдём, приравнивая предельный момент к изги

$$M_{пр} = (P_{пр})_1 \ell, \qquad (P_{пр})_1 = M_{пр} / \ell.$$



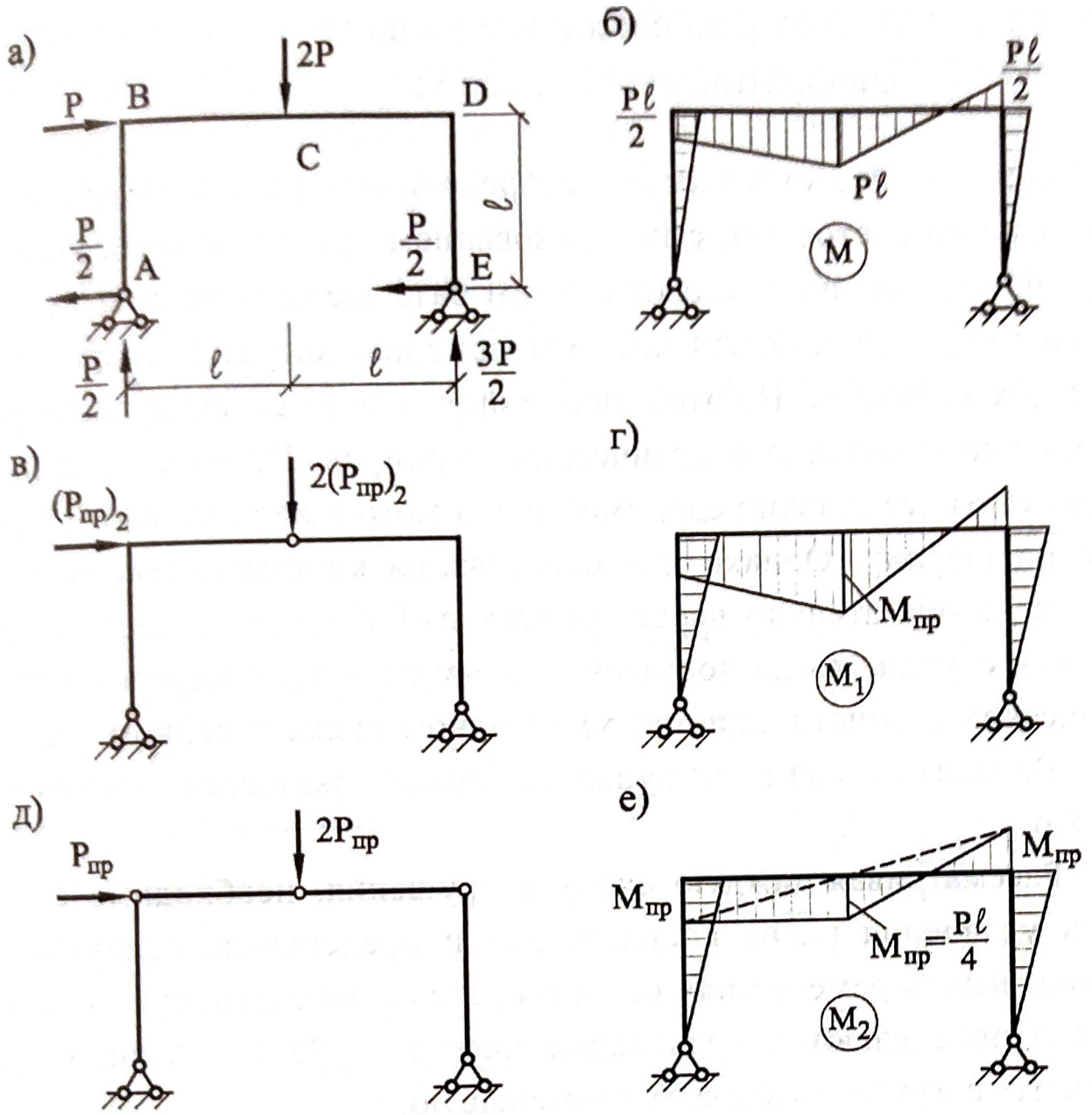
РАСЧЁТ РАМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТАТИЧЕСКОГО СПОСОБА

Второй стадии нагружения, когда образуются пластические шарниры в сечениях B и D (рис. д), соответствует эпюра изгибающих моментов, приведённая на рисунке е. С учётом этой эпюры, составляя условие равенства изгибающего момента в сечении C предельному моменту Мпр, найдём предельную нагрузку Рпр:

$$\frac{P_{пр}\ell}{4} = M_{пр}, \qquad P_{пр} = \frac{4M_{пр}}{\ell}.$$

Сопоставляя полученные выше предельные нагрузки, имеем:

$$P_{пр} / (P_{пр})_1 = 4.$$



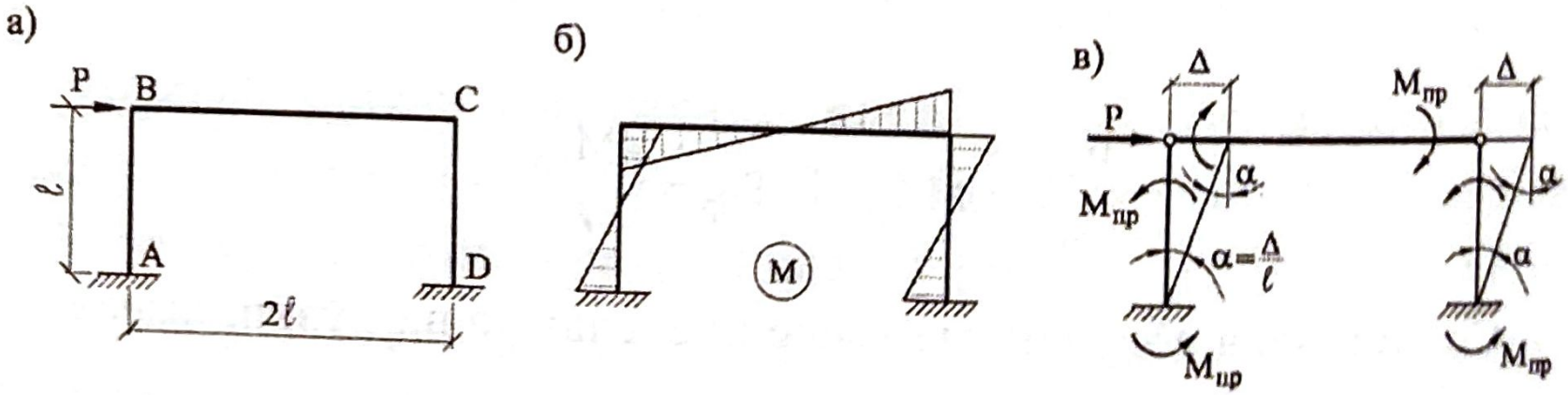
РАСЧЁТ РАМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КИНЕМАТИЧЕСКОГО СПОСОБА

При расчете статически неопределимых рам, находящихся в предельном состоянии, с использованием кинематического способа для построения возможных схем разрушения системы необходимо также представить хотя бы приближенно вид эпюры изгибающих моментов. По этой эпюре определяют сечения, в котором возможно появление пластических шарниров. Напомним, что для n раз статически неопределимой рамы можно вводить n+1 пластический шарнир. Однако для образования кинематического механизма не обязательно введение всех n+1 шарниров; часто встречаются случаи, когда достаточно появления трёх шарниров (пластических и конструкционных) на одном прямолинейном элементе. Вариантов схем разрушения может оказаться достаточно много.

Рассматривая каждую схему разрушения, необходимо составить уравнения работ внешних сил и предельных моментов на возможных перемещениях рамы в предельном состоянии, из которых и определяются предельные нагрузки. Из полученных предельных нагрузок выбирают наименьшую.

РАСЧЁТ РАМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КИНЕМАТИЧЕСКОГО СПОСОБА

Рассмотрим трижды статически неопределимую, раму, изображённую на рисунке а.



Решение. Вид эпюры изгибающих моментов для этой рамы приведен на рисунке б, которой будет соответствовать только одна возможная схема разрушения, когда пластические шарниры образуются в сечениях A, B, C и D, а заданная рама превращается в шарнирный четырехугольник (рис. в).

Внешняя сила P будет совершать работу на перемещении Δ, а четыре предельных момента (по одному в каждом шарнире) - на углах поворота α = Δ/ℓ. Составляя условие равенства работ внешних и внутренних

$$P_{пр} \cdot \Delta = 4M_{пр} \cdot \alpha, \qquad P_{пр} \cdot \Delta = 4M_{пр} \Delta \ \ell; \qquad P_{пр} = 4M_{пр} \ \ell.$$

СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ