Кафедра «Информационные технологии»

Исследование операций

Курс лекций по дисциплине
«Исследование операций»
для специальности направления
1-40 01 02-01 «Информационные системы и технологии
(в проектировании и производстве)»

Е.Г. Стародубцев, доцент, канд. физ.-мат. наук

Постановка задач исследования операций, основы математического программирования и методов оптимизации

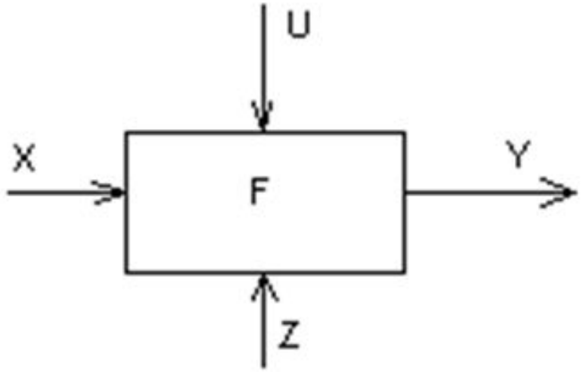
Вопросы

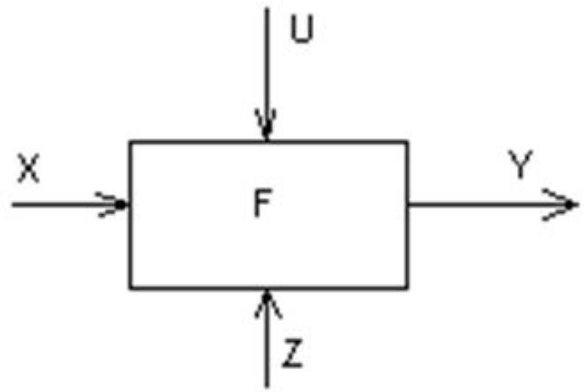
1. Основные понятия
2. Задачи математического программирования (МП)
   2.1. Общая постановка задачи МП
   2.2. Постановка задач линейного программирования
      2.2.1. Задачи о раскрое
      2.2.2. Задачи о смесях
      2.2.3. Задачи планирования выпуска продукции
   2.3. Решение задач линейного программирования графическим методом

1. Основные понятия

Математические модели позволяют проводить анализ процессов функционирования объектов, получать оценки выходных данных на основе различных входных воздействий, сравнивать их между собой, выбирать те, которые обеспечивали бы наилучшие результаты.

Например, широко используется модель кибернетического «черного ящика», которую можно представить в следующем виде:





U – вектор входных управляющих воздействий, X – вектор неуправляемых воздействий, Z – вектор случайных воздействий, Y – вектор откликов исследуемой системы. Если множество U (входных управляющих воздействий) не пусто, то, задавая различные значения U, можно изменить поведение объекта. При этом часто приходится среди всех возможных значений U выбирать такие, которые обеспечивали бы некоторые высокие показатели эффективности и качество функционирования объекта.

Процесс поиска наилучшего решения называется **оптимизацией**. Формализация понятия «наилучшее решение» приводит к необходимости задания предпочтения, на основе которого одно решение считается «более лучшим», чем другое. Основой такого предпочтения выбирается численная характеристика объекта, описывающая уровень эффективности конкретного решения. Так как данная характеристика определяет уровень эффективности конкретного решения, то она является функцией, зависящей от параметров, определяющих это решение. Этими параметрами являются управляющие воздействия (описываются вектором U), т.к. изменяя их, мы можем изменить поведение объекта.

Задача параметрической оптимизации заключается в выборе таких значений управляющих параметров U, которые обеспечивали бы экстремальное (самое лучшее) значение характеристической функции задачи оптимизации.

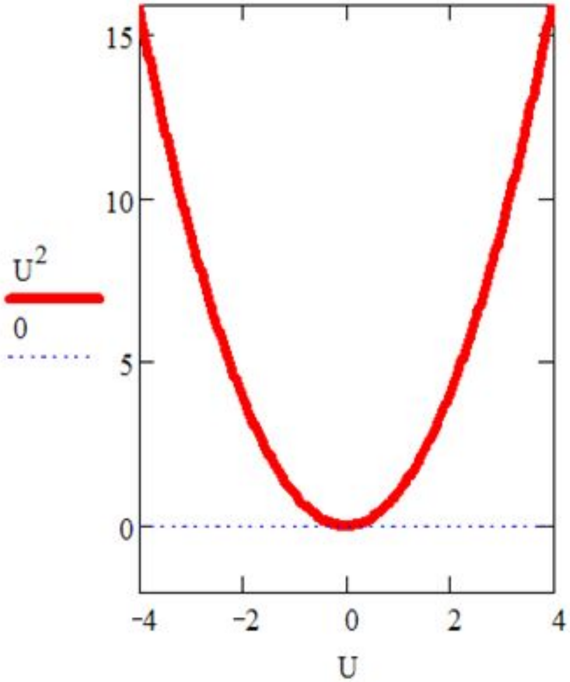
Дадим определения некоторым основным терминам.

Характеристическая функция, экстремум которой мы обеспечиваем, называется **целевой функцией.**

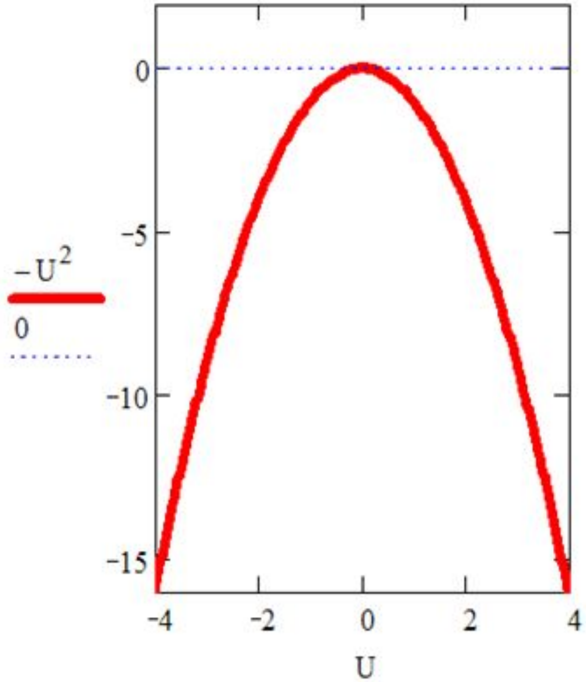
Параметры (управляющие воздействия), при которых обеспечивается экстремум целевой функции, называются **экстремальными.** Если с улучшением качества решения целевая функция возрастает, то оптимальное значение параметров соответствует её максимуму, в противном случае – её минимуму.

Если целевую функцию обозначить W(U), то решение осуществляется в n-мерном пространстве $U=(U_1,\ldots,U_n)$. Функцию W(U) называют **функцией отклика** на воздействие $(U_1,\ldots,U_n)$.

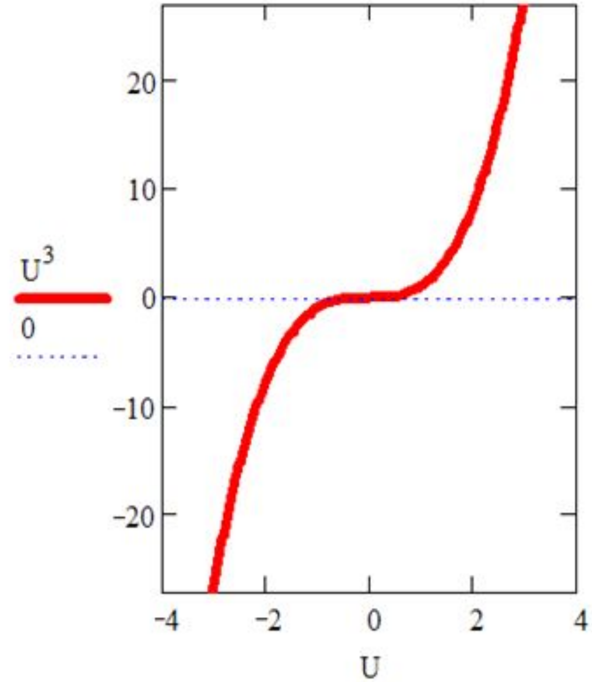
Примеры простейших целевых функций.



Минимум



Максимум



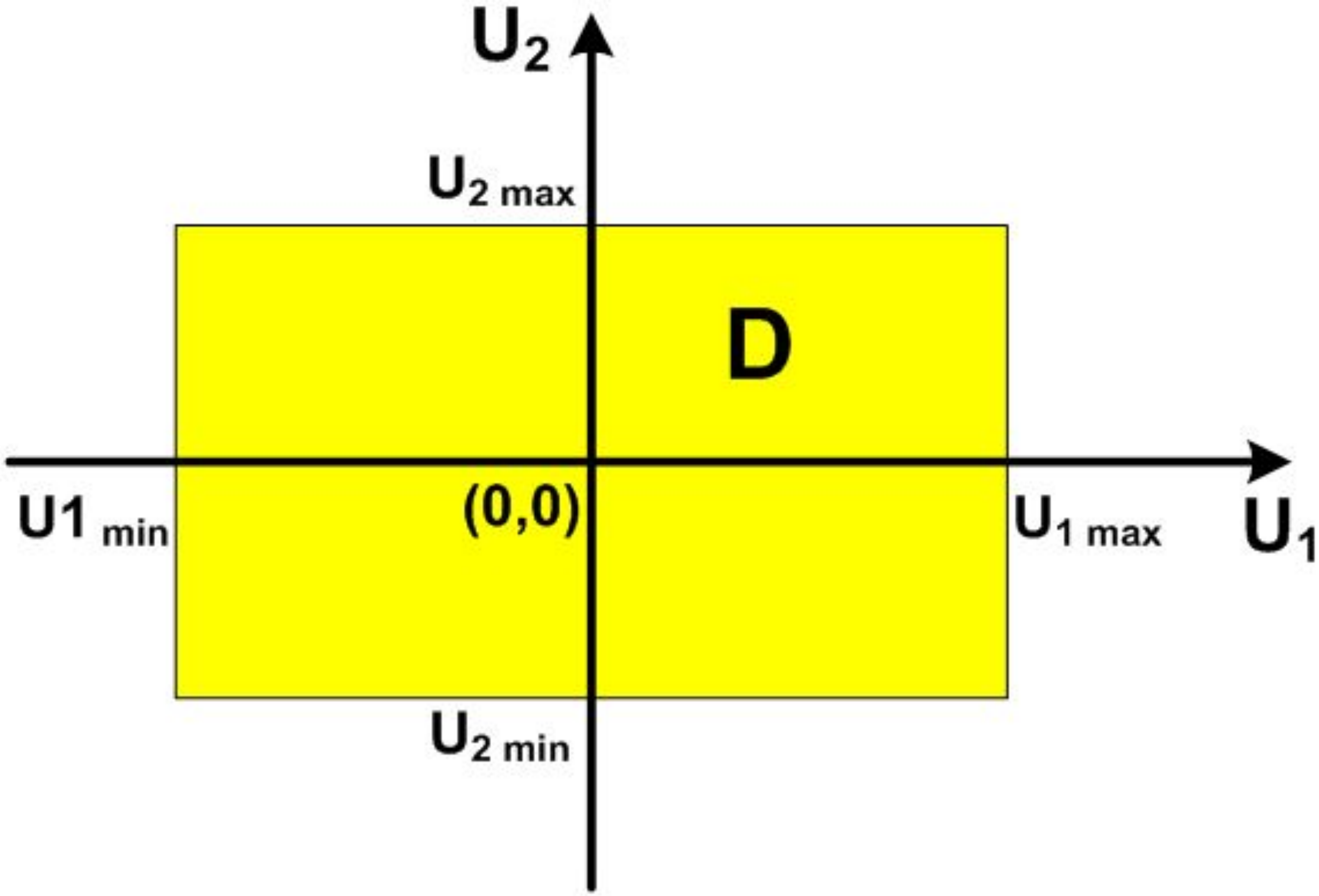
Точка перегиба
(нет max и min)

Если целевая функция имеет несколько экстремумов, то ищется обычно **глобальный экстремум** (так как это самое лучшее решение), а сама задача называется **многоэкстремальной**. Если экстремум ищется в неограниченной области (на изменение $U_1,\ldots,U_n$ не накладывается никаких ограничений), то экстремум называется **безусловным**, а методы его поиска – методами **безусловной оптимизации**.

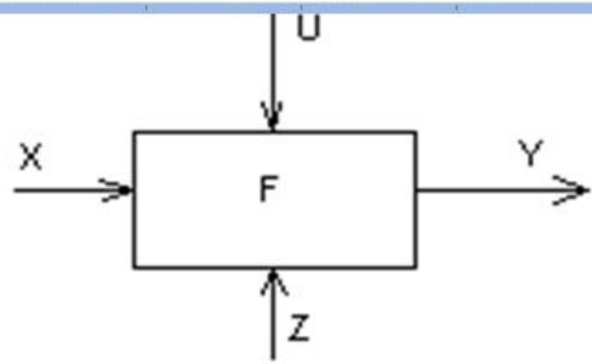
Если же в задаче оптимизации присутствуют ограничения (условия) на значения параметров, то экстремум будет **условным**. Область D, которая удовлетворяет ограничениям, называется **допустимой областью** или **областью допустимых решений**.

Простой пример ограничений - условия вида:

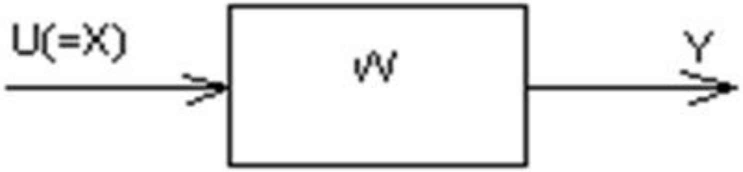
$$U_{1min} \le U_1 \le U_{1max}, \quad U_{2min} \le U_2 \le U_{2max}$$



Если в модели «черного ящика»



убрать случайные воздействия (Z) и неуправляемые воздействия (X), то получим задачу подбора таких значений $U_1, \ldots U_n$,



при которых обеспечивается наилучшее решение W(U), при заданных ограничениях на области D (в этом случае U=X). Этими задачами занимается область математики – **математическое программирование**.

2. Задачи математического программирования (МП)
2.1. Общая постановка задачи МП

Математическое программирование (МП) – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многоэкстремальных задач с ограничениями.

В самом общем виде постановка задачи МП имеет следующий вид:

Найти неизвестные величины x_1, x_2, ..., x_n, доставляющие экстремум функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow max(min) \qquad (2.1)$$

при условии выполнения следующих ограничений:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\{\le, =, \ge\}\,b_i \quad (i = \overline{1, m}), \qquad (2.2)$$

где n – количество переменных, m – количество ограничений. Запись $\{\le, =, \ge\}$ в ограничениях означает, что возможен один из указанных знаков.

Величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются ***переменными задачи***. Их смысл может быть различным. Например, если предприятие выпускает три вида продукции и нужно найти оптимальный план производства, то x_1, x_2, x_3 – количество продукции каждого вида, которое необходимо производить. Если в задаче необходимо найти наилучший состав рациона, в который могут входить несколько компонентов (например, сено и силос в рационе коров), то x_1 и x_2 – количество каждого компонента, которое нужно включить в рацион (в данном случае, количество сена и силоса).

Система ограничений (2.2) вытекает из ограниченности доступных материальных и трудовых ресурсов, технологических и других требований. Для задачи составления рациона ограничения заключаются в необходимости того, чтобы рацион был полноценным (содержал питательные вещества, витамины и микроэлементы, необходимые для жизнедеятельности животных).

Очень часто (например, для экономических задач) в систему ограничений включаются условия неотрицательности переменных: $x_j \geq 0, (j = \overline{1, n})$, которые также называют ***физическими ограничениями***. Например, объем производимой продукции не может быть отрицательной величиной.

Набор значений переменных $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий всем ограничениям, называется ***допустимым решением***, или ***планом***. Совокупность всех планов задачи образует ***область допустимых решений*** (*ОДР*).

Для выбора оптимального (т.е. наилучшего) плана нужно определить, что будет лежать в основе этого выбора, т. е. определить критерий оптимальности. *Критерий оптимальности* – это показатель, на основании которого сравниваются решения и осуществляется выбор лучшего из них. Критерии оптимальности бывают натуральные и стоимостные, максимизируемые и минимизируемые. Например, для экономических задач: максимизируемые критерии – это прибыль, рентабельность, валовой объем продукции, минимизируемые критерии – это себестоимость, затраты производства.

Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *целевой функцией* (*ЦФ*) и представляет собой математический вид критерия оптимальности.

План (допустимое решение), при котором ЦФ принимает экстремальное значение, называется *оптимальным*. Оптимальные значения переменных обычно обозначаются надстрочным знаком «*». Оптимальных планов в задаче может быть несколько, возможно также бесконечное множество оптимальных планов.

В зависимости от вида ЦФ и функций системы ограничений среди задач МП можно выделить следующие:

- ***Задачи линейного программирования***, в которых ЦФ и ограничения линейны относительно переменных x_j (нет степеней, произведений переменных и других нелинейных функций). К этому типу обычно приводятся задачи планирования выпуска продукции, составления смесей, раскроя материалов, планирования грузопотоков, распределения финансирования.

- ***Задачи нелинейного программирования***, в которых ЦФ и (или) хотя бы одна из функций системы ограничений нелинейные. К таким задачам относятся задача определения экономически выгодной партии поставки товара, многие задачи проектирования. Не существует единого метода решения задач нелинейного программирования, решение каждой конкретной задачи ориентируется на ее особенности.
- ***Задачи дискретного***, в частности, ***целочисленного программирования***, в которых на все или некоторые переменные наложено условие дискретности или целочисленности. Дискретность означает, что переменная может принимать не все возможные значения на числовой прямой, а только некоторые.

- ***Задачи динамического программирования***, процесс решения которых носит многошаговый характер. На каждом шаге выбирается какое-либо решение, от которого зависит выигрыш не только на данном шаге, но и всей операции в целом. Как правило, в таких задачах целевая функция имеет один из двух видов:

   1. Аддитивный: $F(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + ... + f_n(x_n)$.

   2. Мультипликативный: $F(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot ... \cdot f_n(x_n)$.

  Если параметры ЦФ или ограничений изменяются во времени, то в таких задачах заложена многошаговость, и они являются задачами динамического программирования

- ***Задачи стохастического программирования***, в которых параметры ЦФ или ограничений являются случайными величинами. Эти задачи также возникают и в условиях неполной, недостоверной информации.

Важно, что ЦФ может иметь любой вид и во всей области определения может не иметь экстремума в строгом математическом смысле (математического анализа).

Пример. z= $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$. Данная функция достигает max(min) при условиях:

$$x_1 \to \infty$$

$$x_2 \to \infty$$

Производные этой функции нигде не обращаются в ноль: $\partial f / \partial x_1 = 1$, $\partial f / \partial x_2 = 1$, поэтому данная функция не достигает максимума на всей плоскости (x_1, x_2). Но если ввести ограничения на область значений переменных:

$$0 \le x_1 \le 1$$

$$0 \le x_2 \le 1$$

то максимум функции z достигается в точке (1,1) и будет равен – 2. Для решения подобных задач и применяются методы МП.

2.2. Постановка задач линейного программирования

Задачей линейного программирования (*ЗЛП*) называется такая задача МП, целевая функция которой имеет линейный вид, а ограничения заданы в виде линейных уравнений или неравенств. Методы решения таких задач являются наиболее разработанными.

Математическая постановка ЗЛП имеет следующий вид:

Переменные $x_j\ (j=\overline{1,n})$, доставляющие экстремум целевой функции вычисляются по формуле

$$F=\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max(\min) \qquad (2.3)$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le, =, \ge\} b_i, \quad (i=\overline{1,m}), \qquad (2.4)$$

$$d_j \le x_j \le D_j, \quad (j=\overline{1,n}). \qquad (2.5)$$

Часто граничные условия сводятся к требованиям неотрицательности переменных: $x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n})$. Здесь параметры задачи $C_j, a_{ij}, b_i, d_j, D_j$ – это некоторые константы, известные для каждой конкретной задачи.

Ограничения (2.4) также называют ***функциональными***, а ограничения (2.5) – ***прямыми***.

При разработке математической модели ЗЛП можно использовать следующую схему, состоящую из трех шагов:

- *1 шаг* – выбор переменных, заданием числовых значений которых однозначно определяется состояние исследуемого объекта;
- *2 шаг* – количественное выражение выбранного критерия оптимальности в виде ЦФ, формулировка требования достижения экстремума ЦФ;
- *3 шаг* – выражение ограничений на рост или уменьшение ЦФ в виде уравнений или неравенств, которые образуют систему ограничений.

Рассмотрим некоторые классические ЗЛП.

2.2.1. Задачи о раскрое

К этому виду задач относятся задачи оптимального раскроя материала, которые встречаются, в частности:

- в швейной промышленности, тарном производстве - раскрой материала;
- в машиностроении и литейной промышленности - раскрой труб, листов, прутьев.

Постановка задачи

Есть материал определенной формы. Из него необходимо вырезать заготовки З1, З2,…Зm. Даны возможные варианты Vj раскроя (*либо их необходимо составить*). По каждому варианту раскроя даны: количество заготовок каждого вида, которые можно вырезать из единицы измерения материала, и количество отходов, полученных по этому варианту раскроя из единицы измерения материала. Согласно плановому заданию нам известно, что всего необходимо приготовить заготовок:

З1 не менее b_1

З2 не менее b_2

………………

Зm не менее b_m

Необходимо обеспечить такой план выпуска изделий, в состав которых входят заготовки З1, З2,…Зm в количестве $N_1 \ldots N_m$ на единицу, чтобы суммарное количество отходов было минимальным. Дополнительные условия к решению – условия физичности: количество материала, взятого в раскрой по каждому из вариантов раскроя, не может быть отрицательным.

Переведем данную постановку задачи в формальный математический вид.

Переведем данную постановку задачи в формальный математический вид.

Пусть

x_j – количество единиц материала, взятого в раскрой по варианту Vj;

b_1, b_2,…, b_m – план на количество заготовок типов З1…Зm, полученных по всем вариантам раскроя;

a_{ij} – количество заготовок типа i, вырезаемых при раскрое одной единицы материала, по варианту раскроя Vj;

Cj – количество единиц отходов, получаемых при раскрое одной единицы материала по j-му варианту раскроя.

Получим таблицу:

Получим таблицу:

Раскрой / Заготовки	1	2	…	n	Ограничения
	x_1	x_2	…	x_n	b
З1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
З2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
Зm	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Отходы	C_1	C_2	…	C_n	

и соотношения

$$F = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \min ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \ge b_1, ,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \ge b_m, ,$$

$$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1, n}) .$$

ЦФ F – суммарное количество отходов.

2.2.2. Задачи о смесях

К этому виду задач относятся задачи составления шихты, смесей (в нефтяной, литейной промышленности, строительстве, медицине).

Цель решения задачи – получить смесь (а затем продукцию) с заданными свойствами при наименьших затратах на исходные сырьевые ресурсы.

Постановка задачи. Имеются ингредиенты (x_1, …, x_n). Они содержат различные элементы (e_1, …, e_m).

В задаче о шихте: ингредиенты – различные минералы ($NaCl$, KCl); элементы - Na, Cl, K.

В задаче о диете: ингредиенты - сахар, соль, молоко, мясо; элементы - белки, углеводы, жиры, микроэлементы.

Пусть x_j – количество единиц j-го ингредиента, взятого для приготовления смеси $x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n})$;

C_j - стоимость единицы j-го ингредиента;

a_{ij} – количество единиц микроэлемента i, содержащегося в одной единице измерения j-го ингредиента;

Смесь, (продукт, шихта) состоит из ингредиентов и должна содержать не менее

$(\geq)$ b_1 микроэлемента e_1

$(\geq)$ b_2 микроэлемента e_2

. . . .

$(\geq)$ b_m микроэлемента e_m

Получим таблицу:

Ингредиенты Элементы	1 x_1	2 x_2	… …	n x_n	Ограничения b
e_1 …… e_m	a_{11} a_{m1}	a_{12} a_{m2}		a_{1n} a_{mn}	b_1 …… b_m
Стоимость единицы ингредиента	C_1	C_2	…	C_n	

и соотношения

$$F = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \min ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \ge b_1, ,$$

$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \ge b_m, ,$$

$$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1, n}) .$$

ЦФ F – суммарная стоимость смеси.

2.2.3. Задачи планирования выпуска продукции

Постановка задачи (пример). Цех может выпускать два вида продукции: шкафы и тумбы для телевизора. На каждый шкаф расходуется 3,5 м^2 стандартных ДСП, 1 м^2 листового стекла и 1 человеко-день трудозатрат. На тумбу – 1м^2 ДСП, 2 м^2 листового стекла и 1 человеко-день трудозатрат.

Прибыль от продажи 1 шкафа составляет 200 усл. ед., от 1 тумбы – 100 усл. ед. Материальные и трудовые ресурсы ограничены. В цехе работают 150 рабочих, в день нельзя израсходовать больше 350 м^2 ДСП и более 240 м^2 стекла.

Требуется определить, какое количество шкафов и тумб должен выпускать цех за день, чтобы прибыль была максимальной. Составить математическую модель задачи.

Решение. Представим условие задачи в виде таблицы:

Данные о нормах затрат, запасах ресурсов и прибыли от производства шкафов и тумб

Ресурсы	Шкаф	Тумба	Запасы
ДСП, $м^2$	3,5	1	350
Стекло, $м^2$	1	2	240
Трудовые, человеко-дни	1	1	150
Прибыль, усл. ед.	200	100	

Решаем задачу с применением пошаговой схемы формирования линейной модели.

1 шаг. Введем следующие переменные: x_1 – количество шкафов, x_2 – количество тумб, которые нужно производить за день.

2 шаг. Запишем целевую функцию. В задаче ее экономический смысл – ежедневная прибыль цеха. Поскольку прибыль от всех производимых шкафов составит $200x_1$, а прибыль от всех производимых тумб равна $100x_2$, то общая ежедневная прибыль цеха выражается в виде следующей функции:

$$F = 200x_1 + 100x_2 \to \max.$$

3 шаг. Если бы ресурсы не были ограничены, прибыль росла бы беспредельно. Однако существуют ограничения на объем доступных ресурсов. Так, в цехе работают 150 рабочих. Каждый рабочий за день может произвести либо 1 шкаф, либо 1 тумбу. Поэтому общее число выпущенных изделий не должно превышать числа рабочих в цехе. Данные ограничения можно выразить следующим неравенством:

$$x_1 + x_2 \leq 150.$$

Количество ДСП, затрачиваемых на все шкафы, составляет $3{,}5x_1$, а количество ДСП, затрачиваемых на все тумбы, – x_2. Общий расход ДСП за день может быть представлен выражением $3{,}5x_1 + x_2$. Этот расход не должен превышать имеющегося запаса ДСП. Следовательно, получаем ограничение:

$$3{,}5x_1 + x_2 \leq 350\,.$$

Аналогично рассматривается ограниченность запасов стекла и выражается следующим неравенством:

$$x_1 + 2x_2 \le 240 .$$

По смыслу переменных $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ (т. е. количество шкафов и тумб не может быть отрицательным). Кроме того, количество шкафов и тумб должно быть целым.

Таким образом, получаем следующую модель:

$$F = 200x_1 + 100x_2 \to \max ;$$

$$\begin{cases} 3{,}5x_1 + x_2 \le 350; \\ x_1 + 2x_2 \le 240; \\ x_1 + x_2 \le 150; \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; \\ x_1, x_2 - \textbf{целые.} \end{cases}$$

В общем случае ЗЛП может быть решена *симплекс-методом*, а в случае двух переменных – *графическим методом*. Решение ЗЛП может быть автоматизировано с помощью различных прикладных программных пакетов, например, с помощью надстройки *Поиск решения* пакета MS Excel, блока решения *Given* - *Find* пакета Mathcad.

2.3. Решение задач линейного программирования графическим методом

При наличии двух переменных ЗЛП может быть решена графическим методом. В этом случае математическая модель ЗЛП имеет следующий вид:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max(\min);$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{\le, =, \ge\} b_1; \\ \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{\le, =, \ge\} b_m. \end{cases} \qquad (2.6)$$

Любой набор переменных $\overline{X} = (x_1, x_2)$ такой задачи может быть представлен точкой на плоскости $(X_1; 0; X_2)$.

Рассмотрим ОДР задачи, т.е. множество всех точек, удовлетворяющих системе ограничений. Каждое ограничение вида $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ задает на плоскости прямую, а аналогичное ограничение-неравенство – полуплоскость, границей которой является эта прямая.

Чтобы легко было определить, какую выбрать полуплоскость, достаточно взять произвольную точку, через которую не проходит граничная прямая, и проверить, удовлетворяет ли эта пробная точка ограничению-неравенству. Если удовлетворяет, то данное неравенство выполняется во всей полуплоскости, содержащей пробную точку. В противном случае берется полуплоскость, не содержащая пробной точки. Обычно в качестве пробной точки берут точку с координатами (0; 0).

Пересечение всех полуплоскостей и прямых, соответствующих ограничениям, является выпуклым множеством. Это может быть многоугольник, неограниченная выпуклая область, пустое множество, а также точка, отрезок или луч.

Пример 1. Построим ОДР для задачи планирования производства шкафов и тумб. Математическая модель этой задачи имеет следующий вид:

$$F = 200x_1 + 100x_2 \to \max;$$ **прибыль цеха за день**

$$\begin{cases} 3{,}5x_1 + x_2 \le 350; \\ x_1 + 2x_2 \le 240; \\ x_1 + x_2 \le 150; \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

ограничения по дневным запасам ДСП и стекла на складе

ограничение по количеству работников

количества шкафов и тумб – положительные

Первому ограничению соответствует полуплоскость, границей которой является прямая $3{,}5x_1 + x_2 = 350$, обозначим ее (I). Построим эту прямую по двум точкам: $x_1^{\mathrm{I}} = (100;\ 0)$ и $x_2^{\mathrm{I}} = (60;\ 140)$ (рис. 2.1).

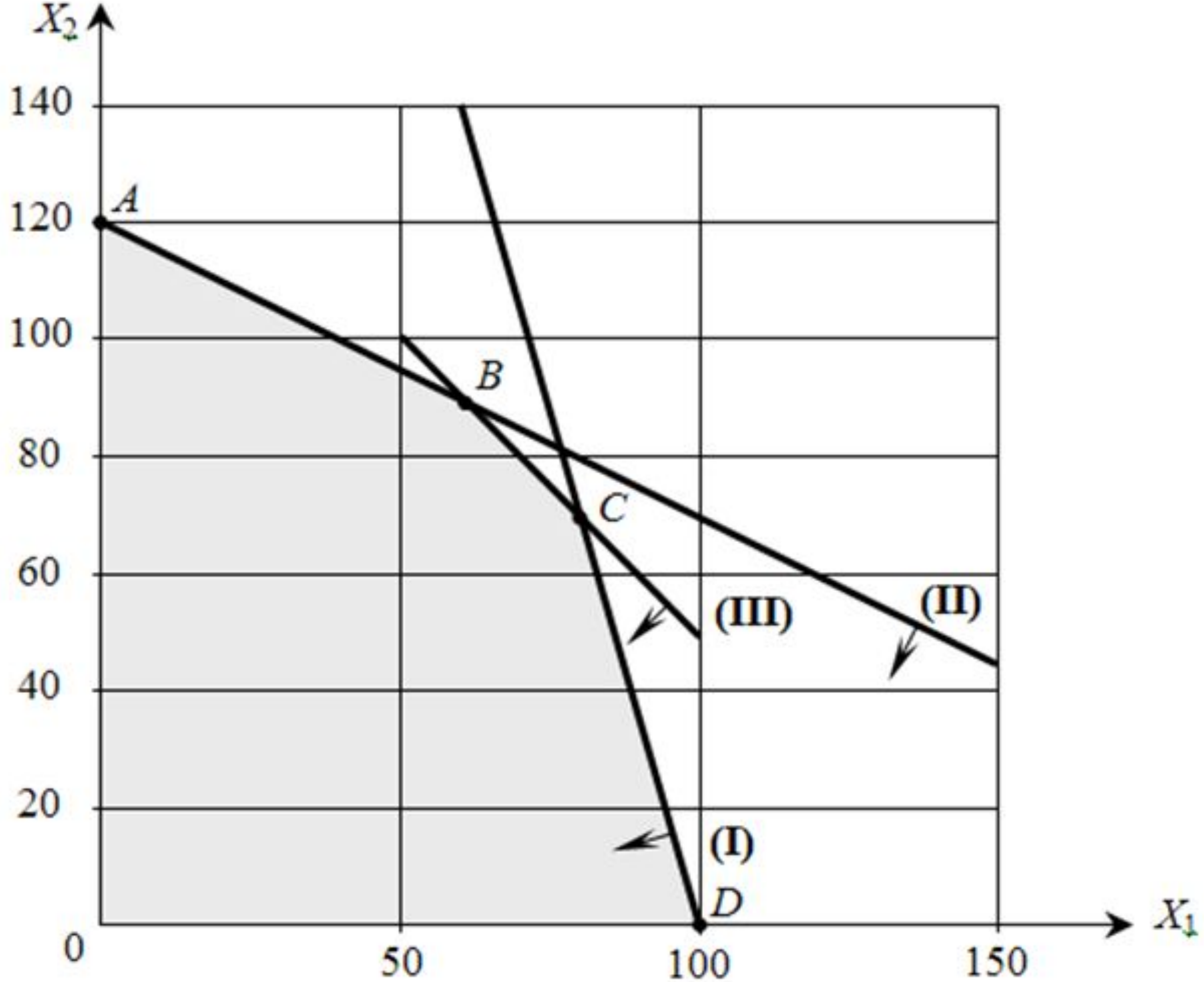


Рис. 2.1. **ОДР задачи планирования производства шкафов и тумб**

Чтобы определить, какая полуплоскость соответствует неравенству, проверим точку (0; 0): $3{,}5 \cdot 0 + 0 \le 350$ – истинное неравенство. Этому неравенству соответствует левая полуплоскость, которая содержит точку (0; 0).

Аналогично построим границу полуплоскости второго ограничения (II) и границу полуплоскости третьего ограничения (III), которые будут иметь вид:

$$(\text{II})\ x_1 + 2x_2 = 240 \qquad X_1^{\text{II}} = (0;\ 120); \quad X_2^{\text{II}} = (150;\ 45);$$

$$(\text{III})\ x_1 + x_2 = 150 \qquad X_1^{\text{III}} = (100;\ 50); \quad X_2^{\text{III}} = (50;\ 100).$$

Второму ограничению соответствует нижняя полуплоскость, поскольку она содержит точку (0; 0), и координаты этой точки дают истинное неравенство: $0 + 2 \cdot 0 \le 240$. По той же причине третьему ограничению соответствует полуплоскость левее и ниже прямой (III).

Ограничениям неотрицательности соответствуют полуплоскости вверх от прямой $(0X_1)$ и вправо от прямой $(0X_2)$.

Пересечение всех полуплоскостей, соответствующих ограничениям, есть ОДР. Таким образом, в данной задаче областью допустимых решений является выпуклый многоугольник $0ABCD$ (на рис. 2.1 он закрашен серым цветом).

Линией уровня ЦФ $F = c_1x_1 + c_2x_2$ называется прямая на плоскости (X_10X_2), в каждой точке которой значение целевой функции одинаково, т. е. $c_1x_1 + c_2x_2 = F_0$, где $F_0 = const$. Линии уровня целевой функции образуют семейство параллельных прямых.

Вектором-градиентом некоторой функции называется вектор, составленный из частных производных этой функции. Вектор-градиент ЦФ $\nabla = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}; \frac{\partial F}{\partial x_2}\right) = (c_1; c_2)$ перпендикулярен к линии уровня и показывает направление наискорейшего возрастания ЦФ.

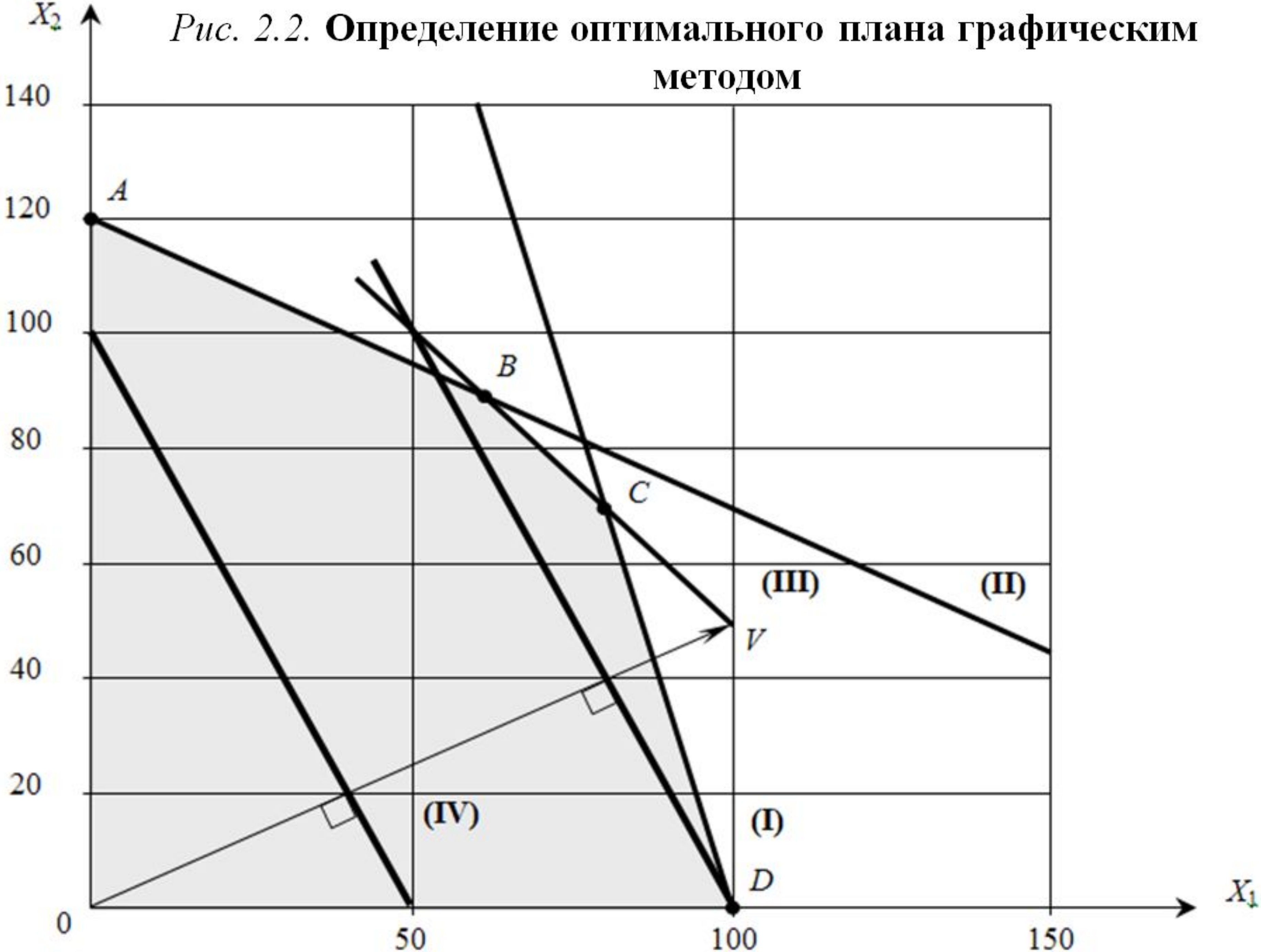
Если перемещать линию уровня параллельно самой себе в направлении вектора-градиента, то значение ЦФ в каждой точке на этой прямой будет возрастать. Последняя точка ОДР, которой коснется линия уровня, будет оптимальным решением задачи, так как в этой точке значение ЦФ наибольшее из всех допустимых. Таким образом, в ЗЛП оптимальный план лежит на границе ОДР, чаще всего – в угловой точке.

Пример 2. Построим линию уровня для задачи про шкафы и тумбы. Для этого зададим произвольное значение ЦФ (прибыли от производства шкафов и тумб), например, равное 10 000. Такому значению прибыли соответствует прямая (IV), уравнение которой:

$$200x_1 + 100x_2 = 10\,000.$$

Если взять любую точку на этой прямой и ее координаты подставить в ЦФ, то значение ЦФ будет равно 10 000. Упростим уравнение прямой, разделив обе его части на 100 ($2x_1 + x_2 = 100$), и построим линию уровня по двум точкам (0; 100) и (50; 0) (рис. 2.2).

Рис. 2.2. **Определение оптимального плана графическим методом**



Если задать другое значение прибыли, то получим линию уровня, которая параллельна построенной. Например, задав значение 20000, получим прямую $2x_1 + x_2 = 200$. Эти прямые параллельны, так как имеют одинаковые коэффициенты при переменных x_1 и x_2.

Вектор-градиент целевой функции данной задачи имеет координаты $\nabla = (200; 100)$. Можно для удобства рассмотреть другой вектор, имеющий такое же направление, если разделить координаты вектора-градиента на одно и то же число (например, на 2). Получим вектор $V = (100; 50)$. Построим этот вектор на графике.

Если перемещать линию уровня (IV) в направлении вектора-градиента, то значение ЦФ (прибыль от продажи шкафов и тумб) будет возрастать. Последней точкой ОДР, которой коснется линия уровня, является точка C. Из всех планов задачи именно в ней достигается максимальное значение ЦФ, т.е. точка C соответствует оптимальному плану.

Найдем координаты точки C, которая образована пересечением прямых (I) и (III). Для этого решим систему, составленную из соответствующих уравнений прямых:

$$\begin{cases} 3{,}5x_1 + x_2 = 350; & \text{(I)} \\ x_1 + x_2 = 150. & \text{(III)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1^* = 80; \\ x_2^* = 70. \end{cases}$$

Примечание. Оптимальное значение переменных обозначается надстрочным знаком «*».

Оптимальное значение целевой функции в точке (80; 70) равно

$$F^* = 200 \cdot 80 + 100 \cdot 70 = 23\,000.$$

Таким образом, графическим методом был найден оптимальный план производства шкафов и тумб: 80 шкафов и 70 тумб. Прибыль при этом будет максимально возможной и составит 23 000 усл. ед.

Порядок решения ЗЛП графическим методом следующий:

1. Построить ОДР.

2. Построить линию уровня ЦФ. Осуществить параллельное перемещение линии уровня в направлении вектора-градиента (в случае решения задачи на минимум линию следует перемещать в направлении, противоположном вектору-градиенту). Определить оптимальную точку как последнюю точку ОДР, которой коснется линия уровня.

3. Вычислить координаты оптимальной точки (решить систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными).

При решении ЗЛП графическим методом возможны следующие случаи:

1. ОДР задачи – пустое множество. Такая задача не имеет допустимых решений, так как ее система ограничений противоречива.

Например, на рис 2.3 показана попытка построить ОДР следующей задачи:

$$x_1 + x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 20; \\ 2x_1 + x_2 \ge 20; \\ 2x_1 + x_2 \le 10; \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

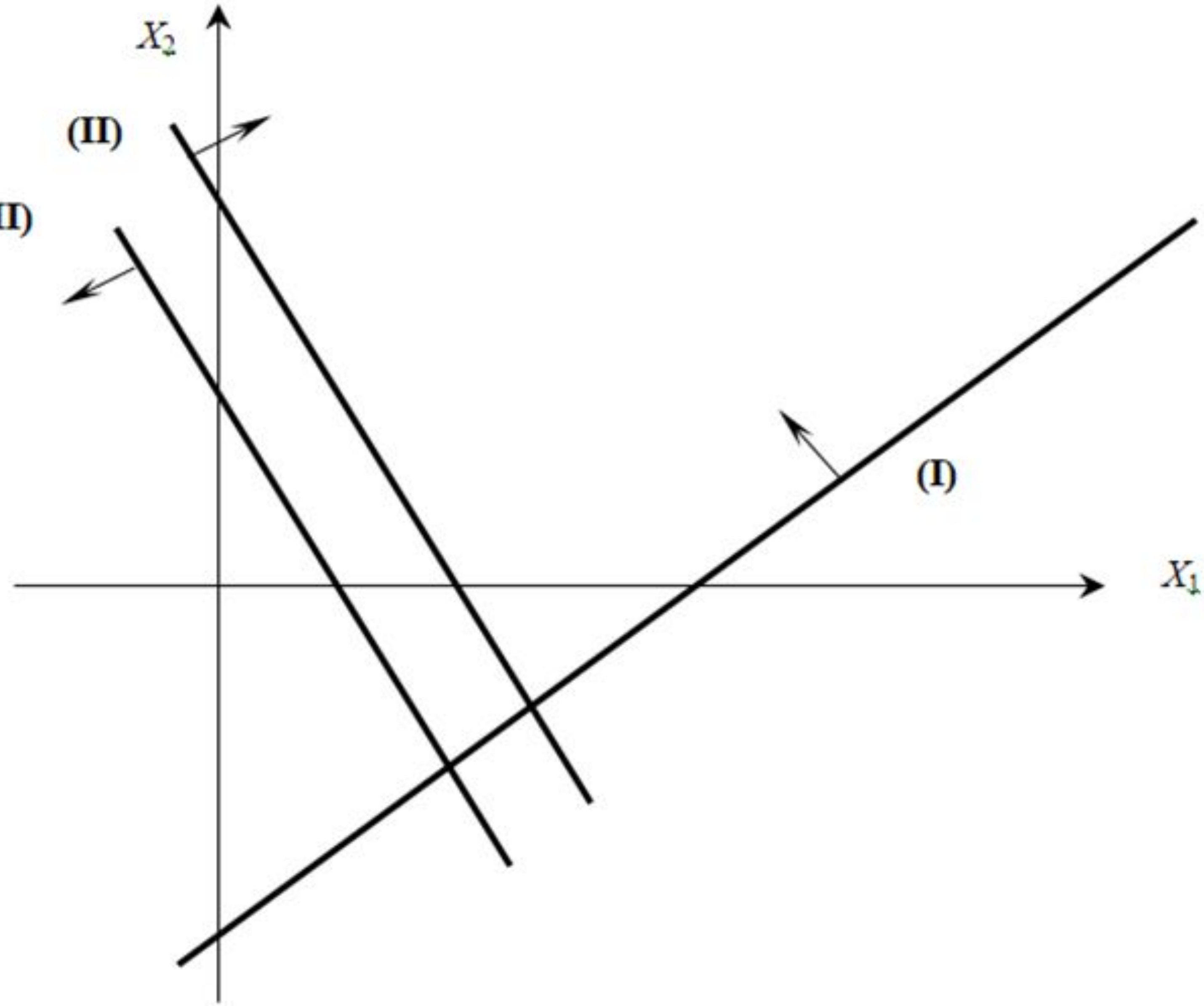


Рис. 2.3. **ОДР является пустым множеством**

2. ОДР задачи не ограничена в направлении возрастания или убывания ЦФ. Задача имеет допустимые решения, но не имеет оптимального решения.

Приведем пример решения для следующей задачи с неограниченной ОДР (рис. 2.4):

$$F = x_1 + x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 20; & \text{(I)} \\ 2x_1 + x_2 \ge 20; & \text{(II)} \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

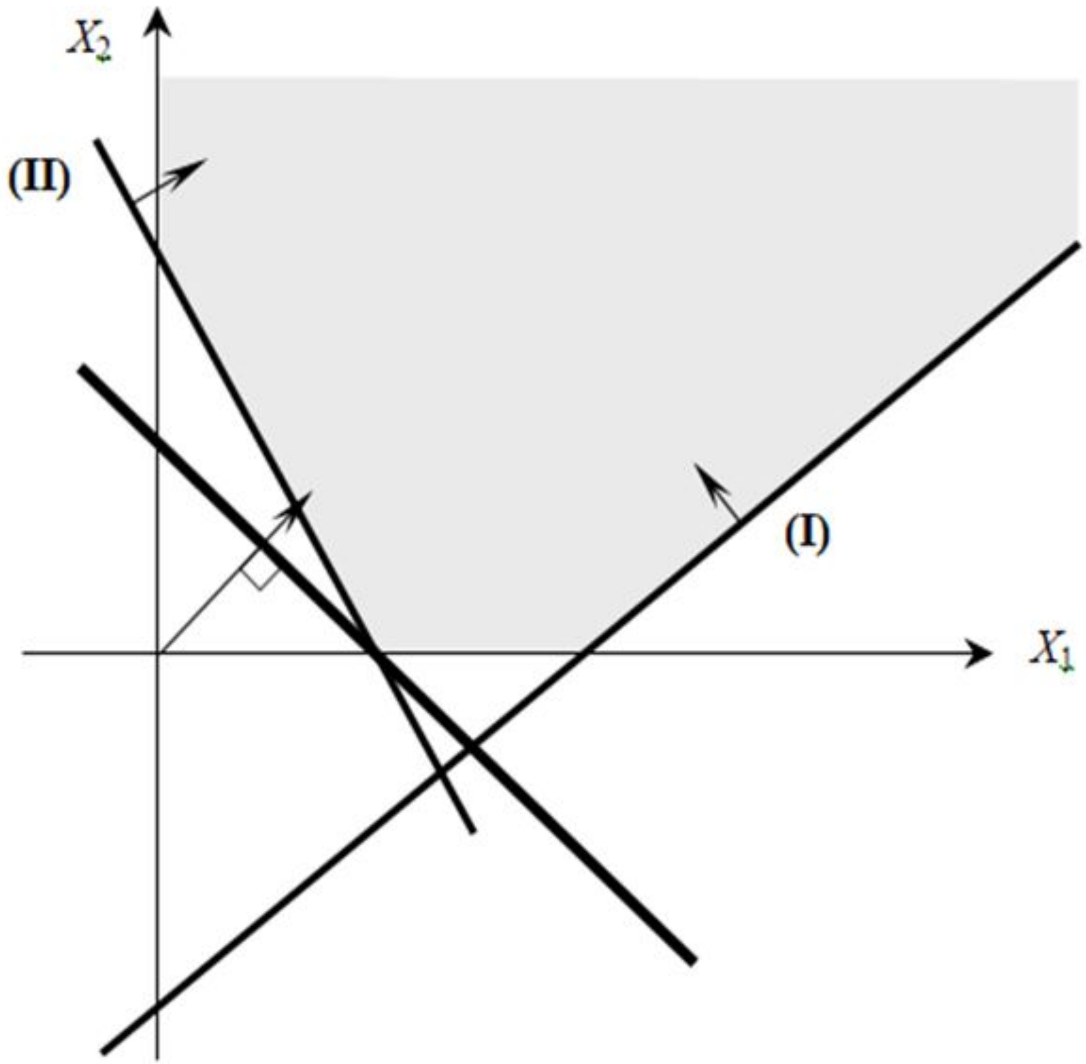


Рис. 2.4. **ОДР не ограничена в направлении возрастания ЦФ**

3. Линия уровня при перемещении совпадает с ребром ОДР. Множество решений задачи бесконечно. Решением является любая точка указанного ребра.

Например, на рис. 2.5 приведено решение следующей задачи:

$$F = x_1 + x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 20; & \text{(I)} \\ 2x_1 + x_2 \ge 20; & \text{(II)} \\ x_1 + x_2 \le 30; & \text{(III)} \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Оптимальным решением является любая точка отрезка $[AB]$.

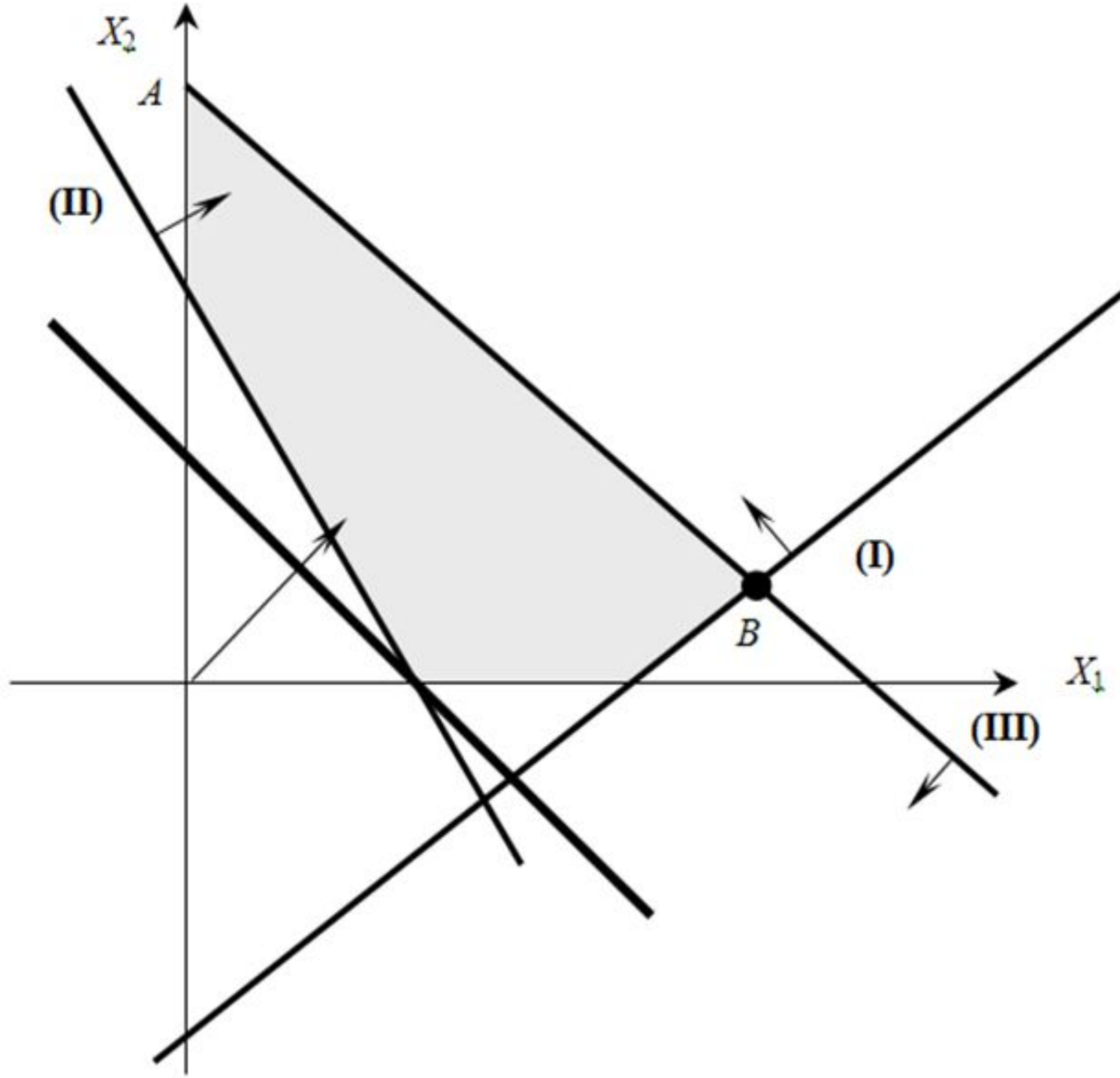
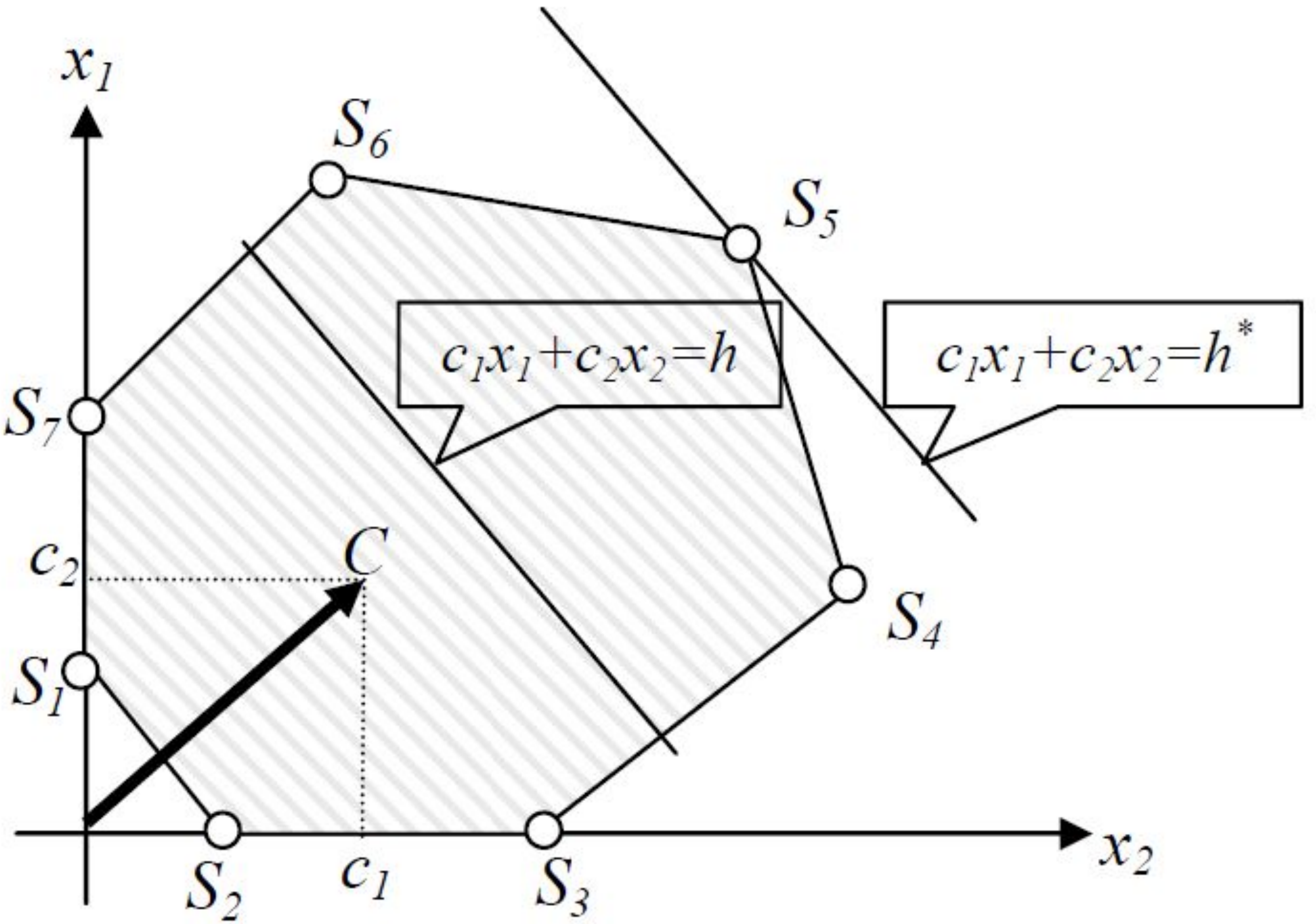


Рис. 2.5. **Бесконечное множество оптимальных планов**

Еще примеры
на графическую интерпретацию ЗЛП

Предположим, что множество D – ограниченное множество и представляет собой выпуклый многогранник с вершинами S_1, $S_2,\ldots,S_7$ (рис.1.7).



Из геометрических соображений ясно, что задача линейного программирования может иметь бесконечное множество оптимальных решений (рис.1.8). Кроме того, задача может иметь оптимальное решение и при неограниченном допустимом множестве (рис.1.9).

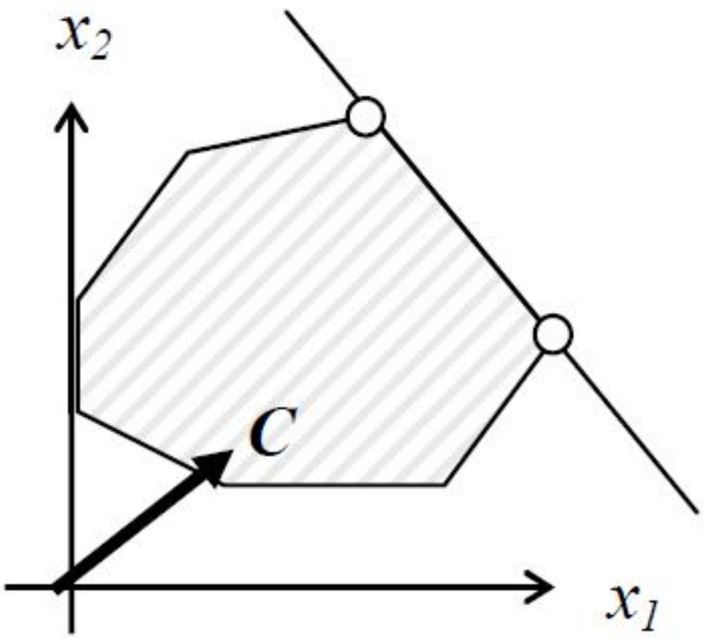


Рис.1.8. Пример задачи с бесконечным числом оптимальных решений

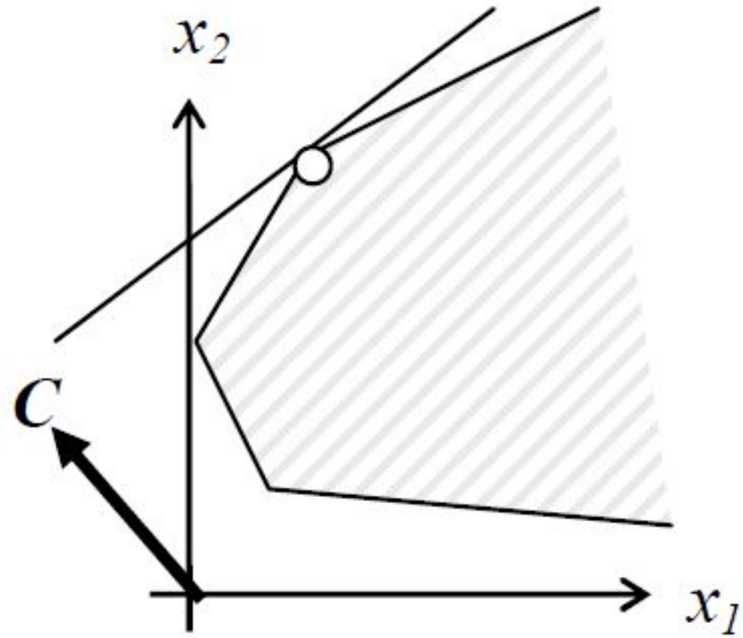
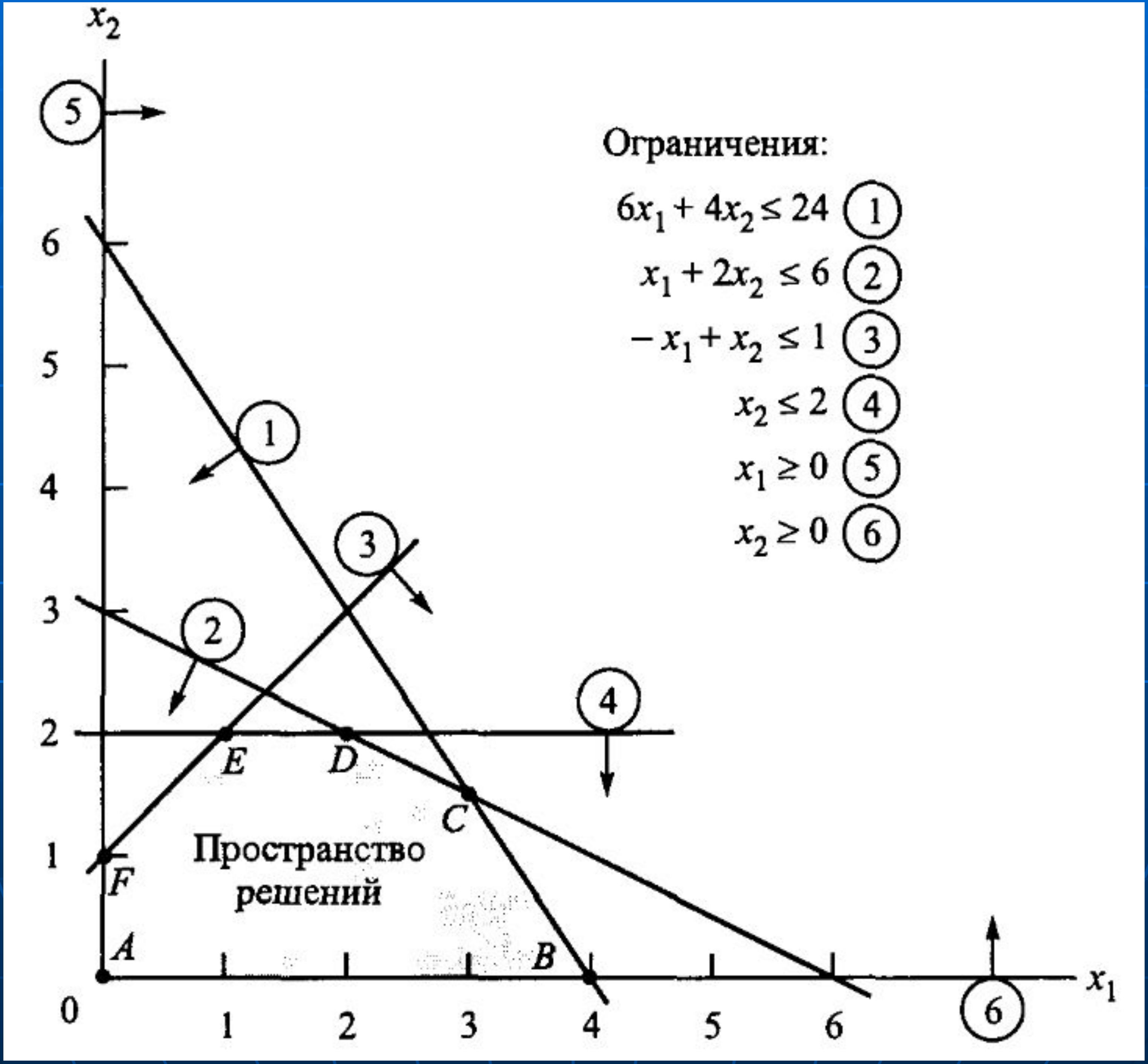
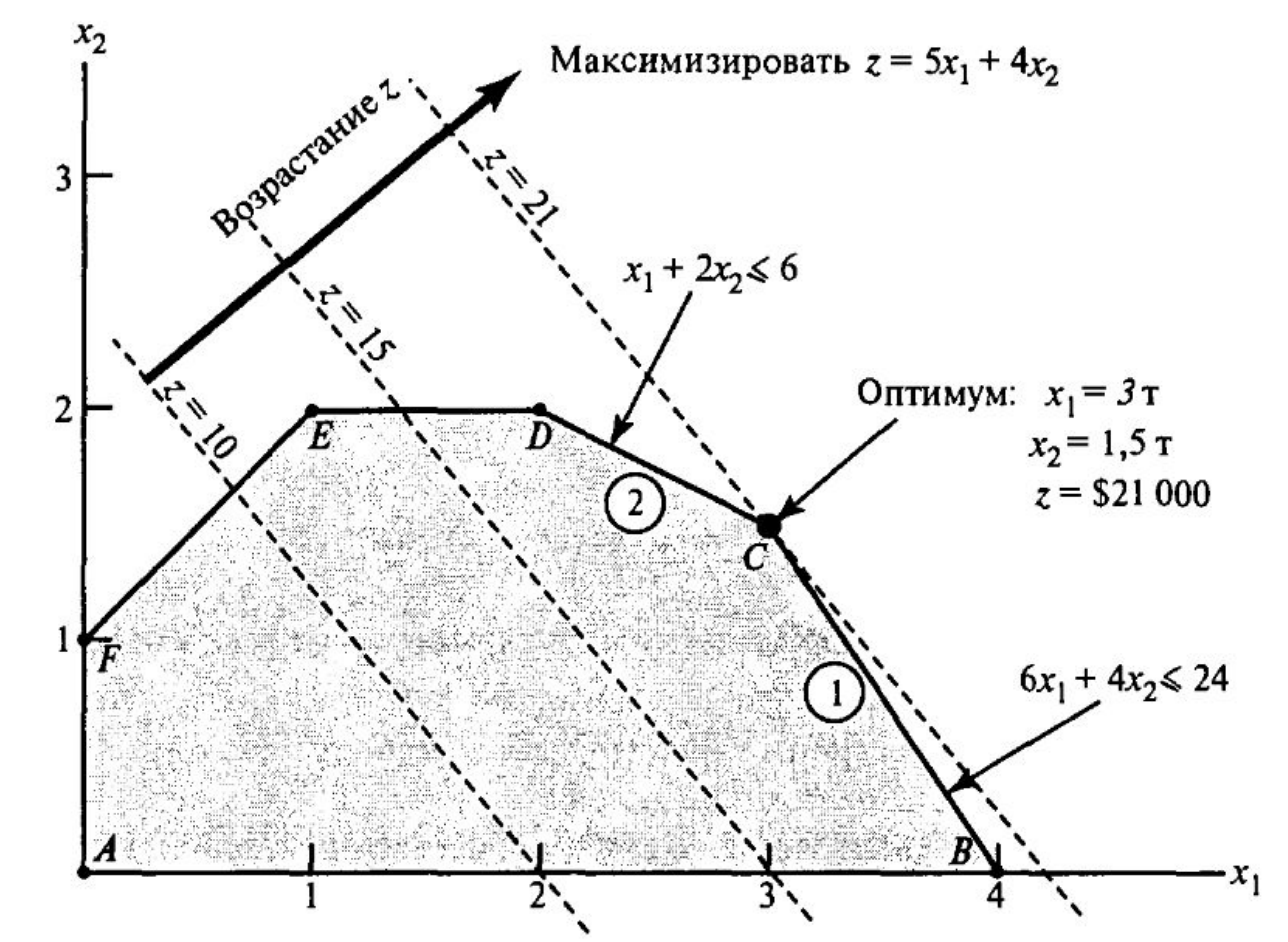
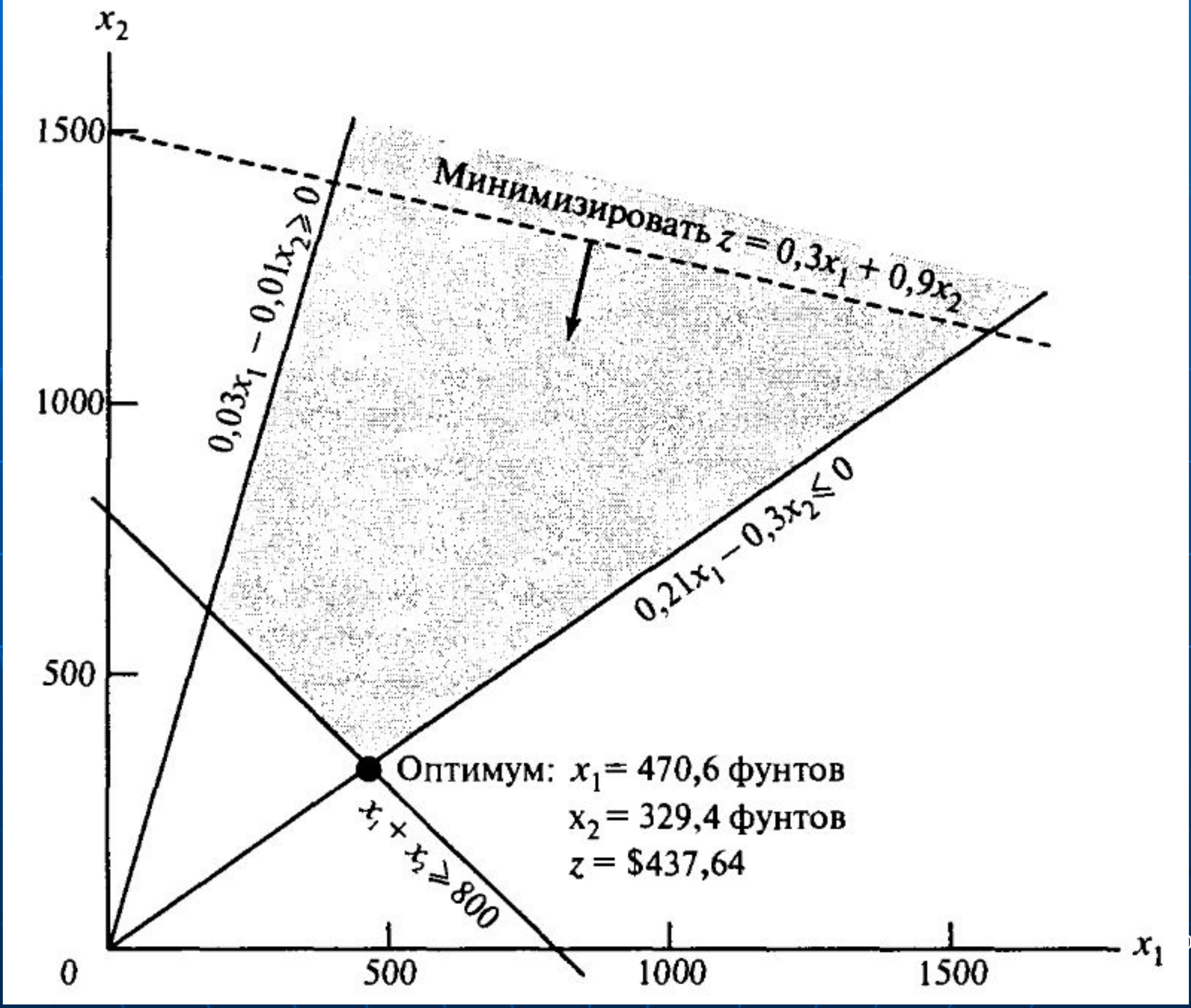


Рис.1.9. Пример оптимального решения задачи на бесконечном множестве


Ограничения:
$6x_1 + 4x_2 \leq 24$ ①
$x_1 + 2x_2 \leq 6$ ②
$-x_1 + x_2 \leq 1$ ③
$x_2 \leq 2$ ④
$x_1 \geq 0$ ⑤
$x_2 \geq 0$ ⑥
Пространство решений
x_1
x_2
A
B
C
D
E
F



x_2
Максимизировать $z = 5x_1 + 4x_2$
Возрастание z
$z = 21$
$z = 15$
$z = 10$
$x_1 + 2x_2 \leqslant 6$
Оптимум: $x_1 = 3$ т
$x_2 = 1,5$ т
$z = \$21\,000$
$6x_1 + 4x_2 \leqslant 24$
A
B
C
D
E
F
1
2
3
4
x_1



x_2
1500
1000
500
0
500
1000
1500
x_1
Минимизировать $z = 0,3x_1 + 0,9x_2$
$0,03x_1 - 0,01x_2 \geq 0$
$0,21x_1 - 0,3x_2 \leq 0$
$x_1 + x_2 \geq 800$
Оптимум: $x_1 = 470,6$ фунтов
$x_2 = 329,4$ фунтов
$z = \$437,64$

Графический способ решения задач линейного программирования целесообразно использовать для решения задач:

– с двумя переменными, когда ограничения выражены неравенствами;

– со многими переменными при условии, что их можно свести к задачам с двумя переменными.

Пусть задача линейного программирования имеет следующий вид:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max(\min), \tag{1.16}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

Каждое из неравенств (1.17) системы ограничений с геометрической точки зрения определяет на плоскости X_1OX_2 полуплоскость, ограниченную прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \ (i = \overline{1,m})$.

Поскольку полуплоскость является выпуклым множеством, а пересечение конечного числа выпуклых множеств также выпукло, то ***область допустимых решений*** Ω задачи ЛП является выпуклым множеством. Если же это множество ограничено, то оно называется ***многоугольником решений***.

Алгоритм графического решения задачи ЛП в случае двух переменных:

Шаг 1 Построить область допустимых решений Ω с учетом системы ограничений (1.17).

Шаг 2 Построить вектор $\vec{C} = (c_1; c_2)$ наискорейшего возрастания целевой функции – вектор градиентного направления.

Шаг 3 Провести произвольную линию уровня целевой функции z=const, перпендикулярную к вектору $\vec{C}$.

Шаг 4 При решении задачи на максимум перемещать прямую z=const в направлении вектора $\vec{C}$, пока она не коснется области допустимых решений Ω в последней точке. В случае решения задачи на минимум линию уровня целевой функции z=const перемещать в антиградиентном направлении до последней точки касания с областью допустимых решений Ω.

Шаг 5 Определить оптимальный план $X^* = (x_1^*; x_2^*)$. Возможны следующие случаи:

а) оптимальный план единственный. Тогда линия уровня и область допустимых решений Ω в крайнем положении будут иметь одну общую точку (рисунок 1.2: *а* – на max и min, *б* – на min);

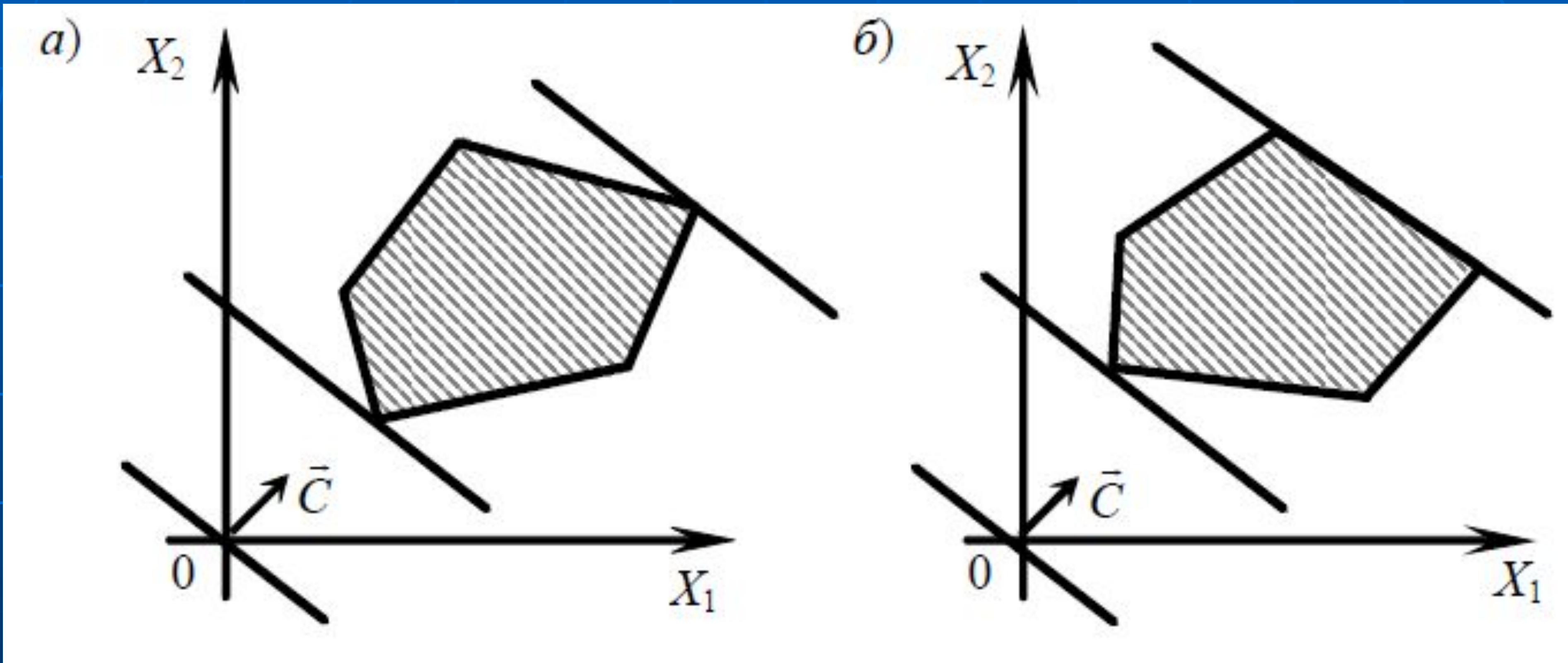


Рисунок 1.2 – Варианты ситуаций при решении задач ЛП графическим методом

б) оптимальных планов может быть бесконечное множество. В этом случае в крайнем положении линия уровня проходит через грань области Ω (рисунок 1.2: *б* – на max, *в* – на min);

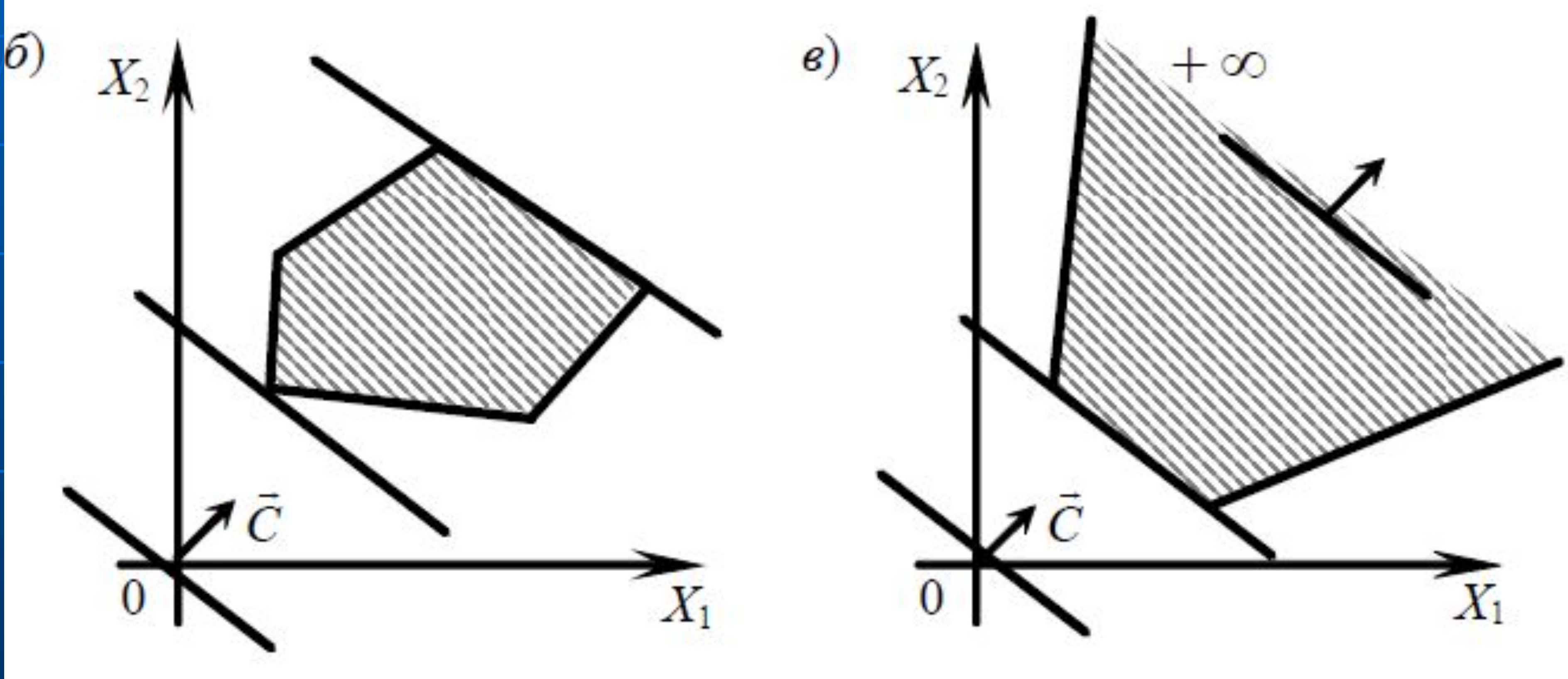


Рисунок 1.2 – Варианты ситуаций при решении задач ЛП графическим методом

в) целевая функция не ограничена. Линия уровня, сколько бы ее ни перемещали, будет иметь общие точки с областью допустимых решений Ω (рисунок 1.2: *в* – на max, *г* – на max и min);

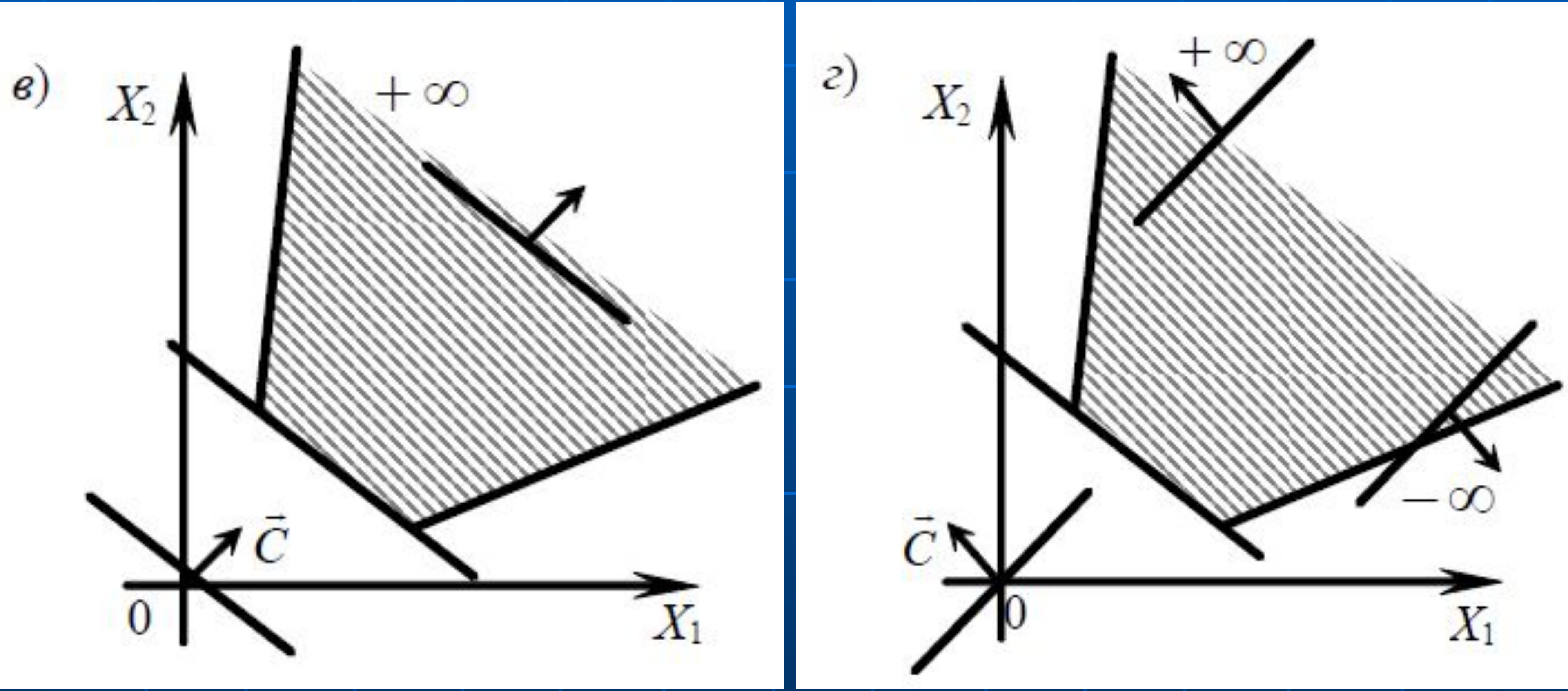


Рисунок 1.2 – Варианты ситуаций при решении задач ЛП графическим методом

г) задача решения не имеет. Область допустимых решений – пустое множество, т. е. система ограничений (1.17) несовместна (рисунок 1.2, *д*).

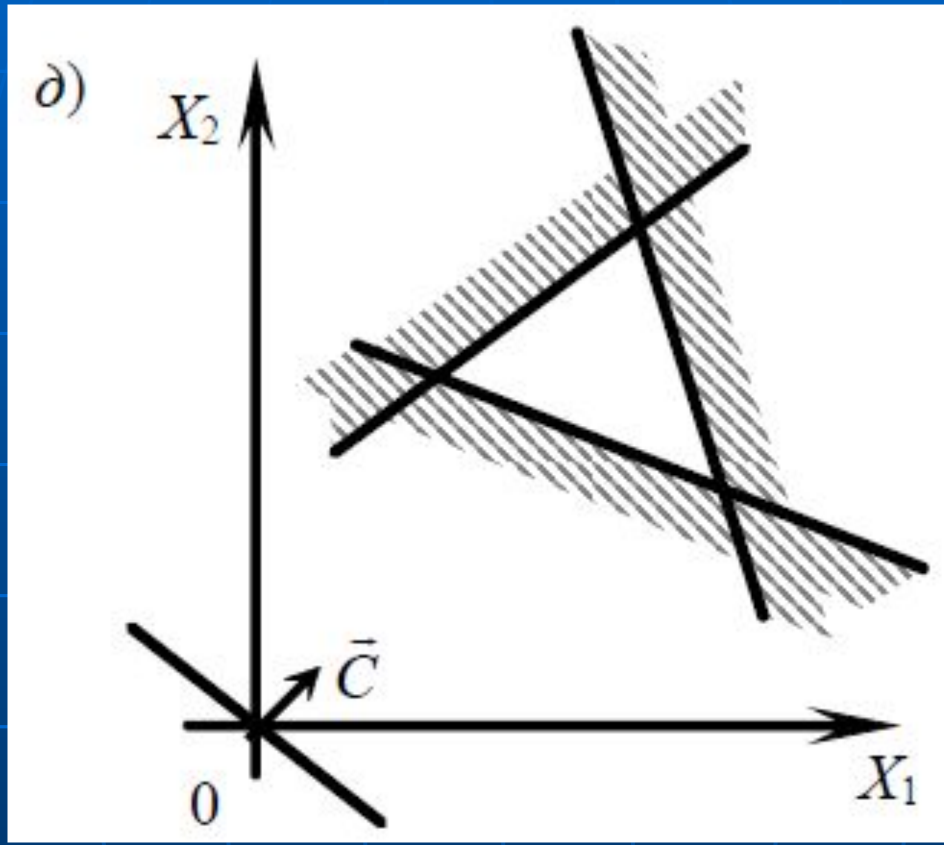


Рисунок 1.2 – Варианты ситуаций при решении задач ЛП графическим методом

Шаг 6 Вычислить значение целевой функции $z^* = z(x_1^*; x_2^*)$ по формуле (1.16).

Пример графического решения задач линейного программирования(ЗЛП) в пакете Mathcad

Построим область допустимых решений (ОДР) и несколько линий уровня целевой функции (ЦФ) для задачи планирования производства шкафов и тумб.

Математическая модель этой задачи имеет следующий вид (см. лекционные материалы):

$F = 200x_1 + 100x_2 \to \max;$ прибыль цеха за день

$$\begin{cases} 3{,}5x_1 + x_2 \le 350; \\ x_1 + 2x_2 \le 240; \\ x_1 + x_2 \le 150; \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

ограничения по дневным запасам ДСП и стекла на складе

ограничение по количеству работников

количества шкафов и тумб – положительные

$y1(x1) := 350 - 3.5 \cdot x1$

$y2(x1) := \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (240 - x1)$

$y3(x1) := 150 - x1$

Задаем функции, определяющие границы ОДР (с учетом ограничений ЗЛП)

$$F(x1, x2) := 200 \cdot x1 + 100 \cdot x2$$

Задаем ЦФ

$$z1(x1) := \left(\frac{1}{100}\right) \cdot (12000 - 200 \cdot x1)$$

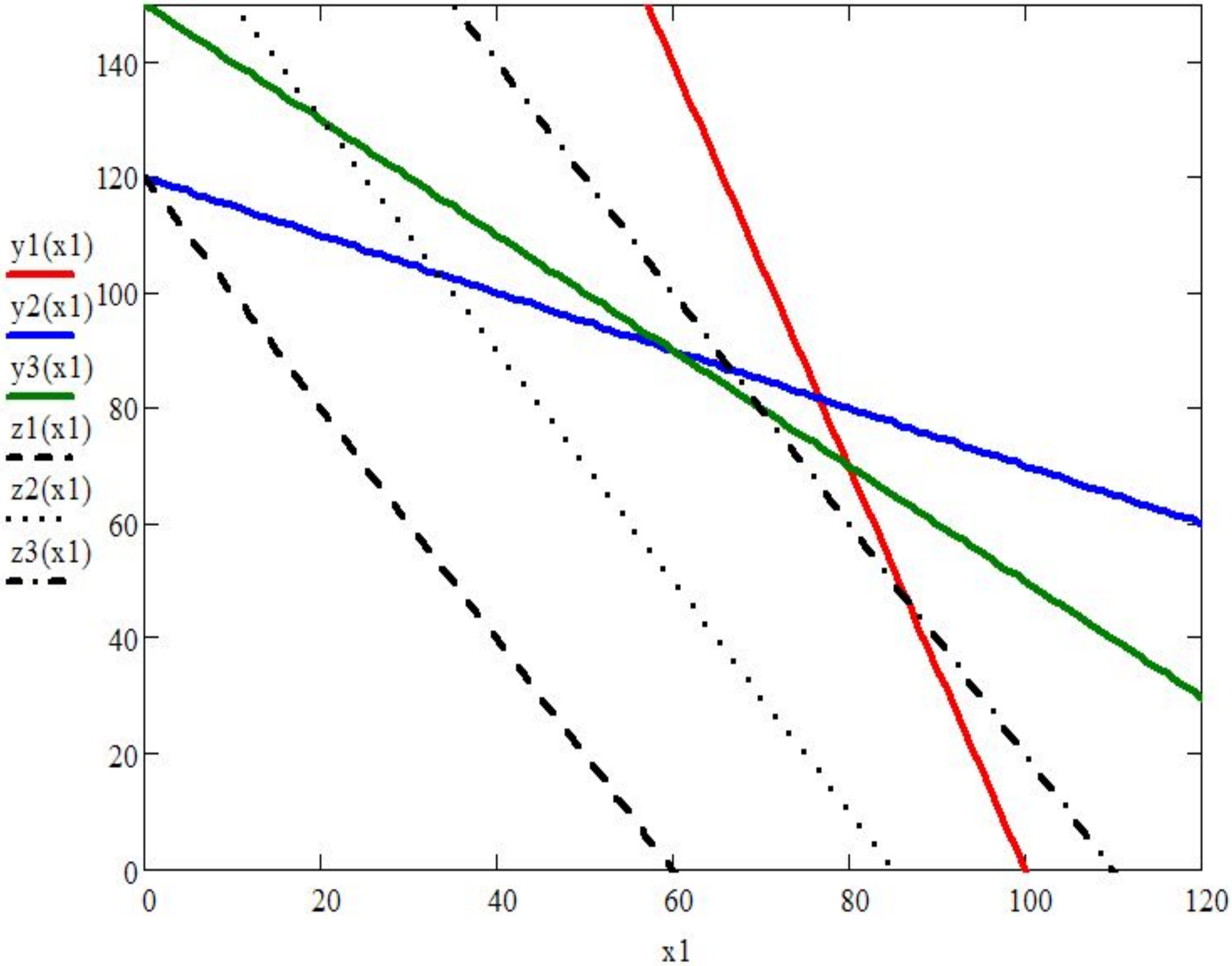
$$z2(x1) := \left(\frac{1}{100}\right) \cdot (17000 - 200 \cdot x1)$$

$$z3(x1) := \left(\frac{1}{100}\right) \cdot (22000 - 200 \cdot x1)$$

Задаем функции, определяющие несколько линий уровня ЦФ. При этом значения ЦФ - 12000, 17000, 22000 - подбираются опытным путем, глядя на график ОДР (линии уровня должны попадать внутрь ОДР)

Строим графики, задающие ОДР и линии уровня ЦФ

$$x1 := 0 .. 150$$



Получаем ОДР - выпуклый пятиугольник, ограниченный осями координат и прямыми (синей, зеленой, красной). С ростом ЦФ линии уровня (черные) перемещаются слева направо. Видно, что максимальное значение ЦФ достигается на границе ОДР - в точке пересечения красной и зеленой прямых.

$x1 := 90$

Найдем координаты точки пересечения красной и зеленой прямых с помощью блока решения Mathcad.
Начальное приближение $x1:=90$ выбираем, глядя на графики

Given

$y1(x1) = y3(x1)$

$Find(x1) = 80$

Значение $x1$ точки пересечения - оптимальное количество шкафов

$y1(80) = 70$ $y3(80) = 70$

Значение $x2$ точки пересечения - оптимальное количество тумб

$F(80, 70) = 23000$

Максимальное значение ЦФ - прибыль

Использованная литература

1. Еськова О. И. Экономико-математические методы и модели: курс лекций для студентов дневной формы обучения экономических специальностей / О. И. Еськова. – Гомель: УО «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации», 2006. – 168 с.

Жолобов Д.А. Введение в математическое программирование: Учебное пособие.-М.:МИФИ, 2008.-376 с.

Таха, Хемди А.

Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. — М.: Издательский дом "Вильямс", 2005. — 912 с.: ил. — Парал. тит. англ.

Бурдук, Е. Л.

Исследование операций : учеб.-метод. пособие для студентов ФБО специальностей «Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство», «Автомобильные дороги» / Е. Л. Бурдук, И. Н. Кравченя; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2008. – 74 с.