Решение транспортной задачи

1. Последовательность решений транспортной задачи линейной оптимизации

Решение транспортной задачи основано на использовании метода разностей потенциалов (MOD I). Рассмотрим этот метод.

Вследствие равенства суммарной потребности в грузах потребителей (грузополучателей) и суммарного наличия грузов у поставщиков (грузоотправителей) из общего количества уравнений (m+n), определяемых системой уравнений, линейно независимы друг от друга только (m+n-1) уравнений, столько же переменных могут быть определены при решении указанной системы уравнений. Такие переменные называются базисными, а их совокупность – базисным решением. Столбцы матрицы коэффициентов, соответствующие этим переменным, образуют базис. Прочие переменные, значения которых принимаются равными нулю, называются небазисными. Эти переменные соответствуют неиспользуемым в данном базисном решении связи. Таблица 2.1 содержит «матрицу» (прямоугольная таблица, в которую в определенном порядке записана система чисел) коэффициентов затрат c_{ij} согласно (2.1) в виде расстояний (в матрице в верхнем правом углу соответствующих клеток записаны расстояния в километрах) между пунктами A_i и B_j (расстояния между поставщиками и потребителями транспортной сети). В правом поле матрицы стоят значения объемов наличия грузов в тоннах у поставщиков, в последней строке – потребности потребителей.

Так как m=4, а n=5, то всего имеется 20 транспортных связей или полей матрицы (кратко полей) и соответственно 20 искомых переменных.

Таблица 2.1.

Таблица 2.1.

Исходные данные транспортной задачи.

Пункт потребления		Пункты отправления				Потребность в грузах, т
		A_1	A_2	A_3	A_4	
Потенциал	U V					
$Б_1$		6	3	6	3	30
$Б_2$		3	7	2	5	210
$Б_3$		5	4	3	2	60
$Б_4$		1	4	1	3	80
$Б_5$		7	1	6	2	120
Наличие груза, т		200	80	130	90	500

Из этого общего количества полей в допустимом решении должны быть заняты ненулевыми перевозками только m+n-1=8 полей.

Существуют две группы методов решения таких задач:

1. Приближенные методы:
   а) метод северо-западного угла;
   б) метод двойного предпочтения;
   в) метод возрастающего или убывающего индекса;
   г) апроксимационный метод Фогеля
2. Точные методы
   а) симплекс-метод
   б) модифицированный метод разностей (метод потенциалов)

Методы первой группы имеют наряду с явным преимуществом – малый объём вычислений – существенный недостаток: оптимальное решение достигается только приближённо, без полной надёжности.

В отличие от этого точные методы сопряжены в общем случае с большим количеством расчётов, однако приводят действительно к оптимальному решению.

Общий принцип всех рассматриваемых методов линейной оптимизации заключается в том, что оптимальное решение получается из исходного на основе последовательного улучшения.

Последовательность действий при решении транспортной задачи (рис 2.1.)

ШАГ 1. – формулировка задачи, получение исходных данных;

ШАГ 2. – получение исходного решения;

ШАГ 3. – проверка оптимальности исходного решения с двумя возможными результатами:

а) исходное решение оптимально, расчёты прерываются, подсчитывается значение целевой функции

б) исходное решение неоптимально, расчёты продолжаются, переходим к улучшенному решению;

ШАГ 4. – проверка улучшенного решения на оптимальность:

а) решение оптимально, расчёты прекращаются, подсчитывается значение целевой функции

б) решение неоптимально, переходим к улучшенному решению

ШАГ 5. – указанные действия продолжаются до тех пор, пока не будет найдено решение, которое не может быть более улучшено и в силу этого является оптимальным.

Обычно величина уменьшения значения целевой функции от шага к шагу уменьшается, а объём вычислений на один шаг улучшения остаётся примерно постоянным. Это приводит к тому, что объём вычислений, приходящихся на единицу уменьшения значения целевой функции, увеличивается с ростом количества шагов. В транспортных задачах большой размерности улучшение решения обычно прекращают в том случае, когда величина улучшения, достигаемая на очередном шаге, становится меньше некоторого определённого значения.

2. Формирование задачи и получение исходных данных

В пунктах отправления $А_1$, $А_2$, $А_3$, $А_4$ имеется однородный груз (картофель, капуста, свёкла). Этот груз надо доставить в магазины $Б_1$, $Б_2$, $Б_3$, $Б_4$ и $Б_5$. Известны расстояния перевозок между пунктами отправления и получения.

Исходные данные записывают в табл. 2.1.

В матрице, в правом верхнем углу соответствующих клеток записаны расстояния в км, в нижней строке – наличие груза у поставщиков $А_1$ … $А_4$, в правом столбце – потребность в грузах у получателей $Б_1$ … $Б_5$. Задача имеет допустимые планы только в случае закрытой (сбалансированной) модели $\sum_i a_i = \sum_j b_j$

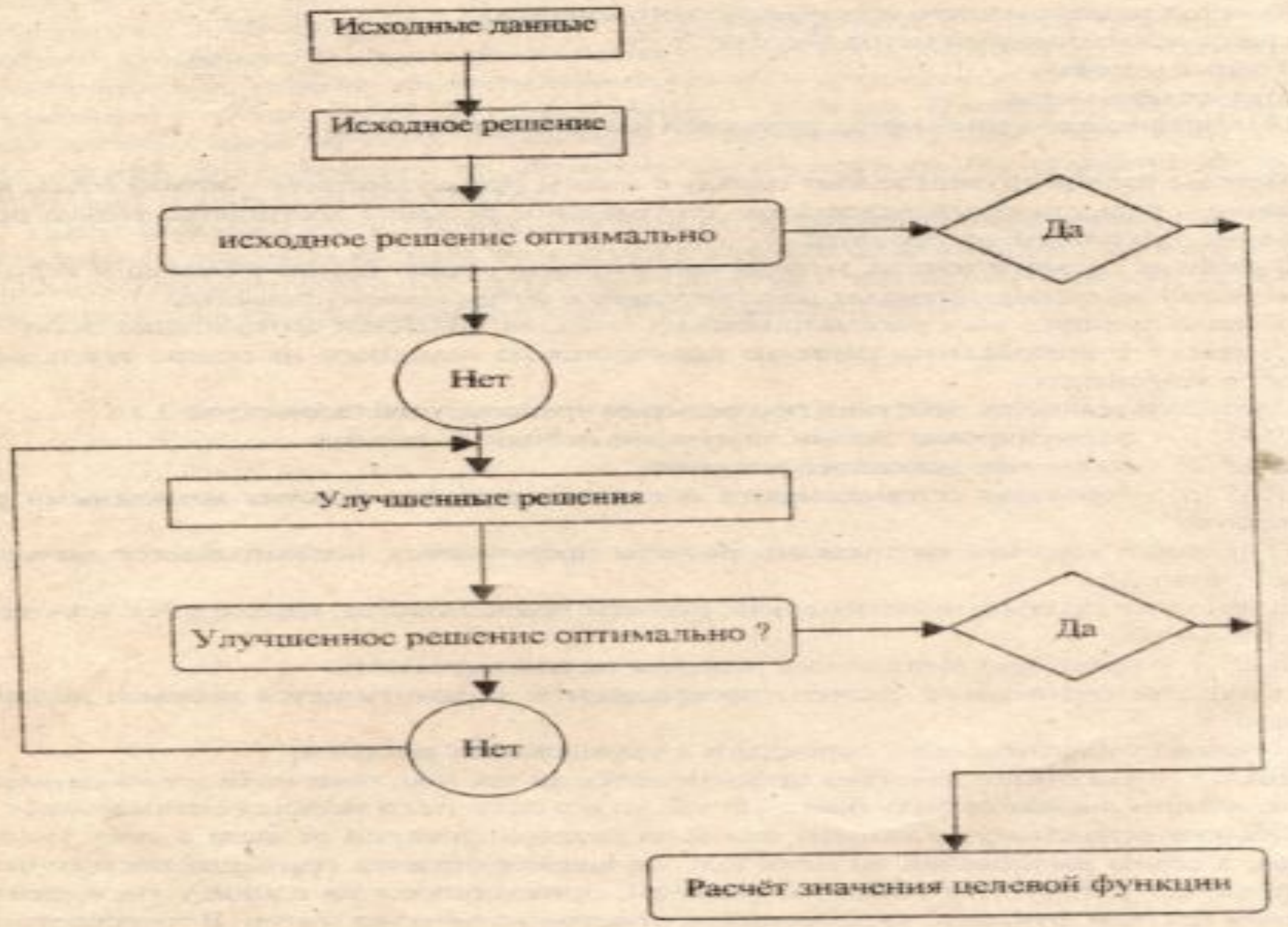

Рис. 2.1. Блок-схема оптимизации перевозок

В случае несовпадения между собой этих величин имеет место открытая (несбалансированная) модель транспортной задачи. В этом случае необходимо модифицировать задачу, т.е. привести к закрытой (сбалансированной) модели.

Рассмотрим случаи:

1) суммарное наличие грузов превосходит общие потребности т.е.

$$\sum_i a_i > \sum_j в_j$$

2) общие потребности больше, чем суммарное наличие грузов, т.е.

$$\sum_i a_i < \sum_j в_j$$

В первом случае пункты потребления не в состоянии принять все поставки. Решение достигается за счёт введения дополнительного фиктивного пункта потребления, которого в действительности нет. Размер потребности такого фиктивного потребителя соответствует разности значений суммарного наличия грузов и суммарных потребностей. Так как в действительности перевозок к фиктивному потребителю $Б_6$ нет, то нет и транспортных затрат (расстояния перевозок), стоящие в строке $Б_6$ матрицы равны нулю.

После такого расширения задача решается, как обычная закрытая транспортная задача. Заполнение клеток в стоке $Б_6$ означает, что соответствующие количества груза должны остаться у поставщиков (грузоотправителей) $А_i$.

Если имеет место превышение суммарных потребностей над суммарным наличием грузов (второй вариант), то недостающее количество запаса грузов приписывается фиктивному поставщику $А_5$.

3. Получение исходного решения

Метод северо-западного угла (метод Хичкока)

Распределение груза (заполнение матрицы табл. 2.2.) начинается с верхнего левого угла таблицы (с грузоотправителя $А_1$ и грузополучателя $Б_1$. Учитывая конкретные объёмы потребностей в грузах у потребителей и объёмы наличия грузов у поставщиков, заполняются последовательно соответствующие поля таблицы вплоть до правого угла.

Таблица 2.2.

Пункт потребления		**Пункты отправления**				**Потребность в грузах, т**
		$А_1$	**$А_2$**	**$А_3$**	**$А_4$**	
Потенциал	**U V**					
$Б_1$		*6* *30*	*3*	*6*	*3*	*30*
$Б_2$		*3* *170*	*7* *40*	*2*	*5*	*210*
$Б_3$		*5*	*4* *40*	*3* *20*	*2*	*60*
$Б_4$		*1*	*4*	*1* *80*	*3*	*80*
$Б_5$		*7*	*1*	*6* *30*	*2* *90*	*120*
Наличие груза, т		*200*	*80*	*130*	*90*	*500*

В таблице 2.2. распределение груза по потребностям (закрепление потребителей за грузоотправителями) выражается в заполнении соответствующих клеток ($А_1Б_1$; $А_1Б_2$; $А_2Б_2$; $А_2Б_3$; $А_3Б_3$; $А_3Б_4$; $А_3Б_5$; $А_4Б_5$).

Условимся в дальнейшем называть клетки матрицы в которых отмечено количество груза, перевозимого от грузоотправителя к данному грузополучателю, **ЗАГРУЖЕННЫМИ**. Количество загруженных клеток всегда должно равняться величине базиса, который равен **m + n - 1**. (n – число строк таблицы; m – число столбцов).

Решение является допустимым, так как удовлетворяет всем ограничениям, и базисным, так как имеет 8 заполненных (загруженных) полей (клеток).

Значение целевой функции:

$Z = 6*30+3*170+7*40+4*40+3*20+1*80+6*30+2*90 = 1630$ т·км

Метод двойного предпочтения

В отличие от метода северо-западного угла метод двойного предпочтения учитывает значения затрат в отдельных полях таблицы. Сначала заполняют наиболее благоприятные поля, т.е. имеющие минимальные значения оценок c_{ij}. Это позволяет получить решение, более близкое к оптимальному. Сначала помечаются лучшие клетки таблицы (которые имеют наименьшие расстояния) в каждой строке и в каждом столбце. Клетку, имеющую две отметки, загружают, т.е. записывают в ней количество груза в первую очередь. *(клетки $A_1Б_4$, $A_3Б_2$, $A_2Б_5$ табл. 2.3.)*.

Таблица 2.3.

Пункт потребления		Пункты отправления				Потребность в грузах, т
		A₁	A₂	A₃	A₄	
Потенциал	U V	*0*	*6*	*1*	*5*	
Б₁	*6*	6 30	* 3	6	* 3	30
Б₂	*3*	3 80	7	* 2 130	5	210
Б₃	*7*	2 5	4	6 3	* 2 60	60
Б₄	*1*	** 1 80	4	** 1	3	80
Б₅	*7*	7 10	** 1 80	6	* 2 30	120
Наличие груза, т		200	80	130	90	500

Из табл 2.3. видно, что имеются клетки двойного предпочтения (помечены двумя звёздочками), предпочтительные (одной звёздочкой) и без предпочтения (не помечены).

При составлении исходного решения в первую очередь заполняются клетки с двойным предпочтением, причём так же, как и методе северо-западного угла, учитываются потребности получателей и возможности отправителей. Если все клетки с двойным предпочтением заполнены, а исходного решения ещё нет, начинают заполнять клетки с простым предпочтением, в заключении – клетки без предпочтения

Нераспределённый груз записывают в неотмеченные клетки, расположенные на пересечении неудовлетворительной строки и столбца. Количество груза, помещённого в каждую клетку, определяется наименьшей величиной груза у соответствующего поставщика или потребностью в грузе соответствующего потребителя.

Решение, полученное по этому методу *(табл 2.3.), имеет в конечном счёте также*

ставщика или потребностью в грузе соответствующего потреби...

ставщика или потребностью в грузе соответствующего потреби...

Решение, полученное по этому методу (табл 2.3.), имеет в конечном счёте также 8 заполненных клеток ($A_1Б_1$; $A_1Б_2$; $A_3Б_2$; $A_4Б_3$; $A_1Б_4$; $A_1Б_5$; $A_2Б_5$; $A_4Б_5$).

Значение целевой функции

*Z = 6*30+3*80+2*130+2*60+1*80+7*10+1*80+2*30 = 1090 т·км*

Для уменьшения трудоёмкости дальнейшего решения целесообразно рассмотреть возможность перемещения загрузки в клетки с наименьшим расстоянием методом последующего анализа (метод «стрелок»). Это достигается в том случае, если можно компенсировать такую передвижку из одной клетки данной строки в другую соответствующей передвижкой груза по одной строке. При это следует иметь ввиду что передвижение будет рационально, если сумма расстояний, указанных в углах клеток матрицы, из которых перемещается загрузка, будет больше, чем сумма расстояний клеток, в которые переводится загрузка. Количество передвигаемой загрузки должно быть равно меньшей загрузке из указанных в обеих клетках, откуда делается передвижка. Аналогично проводится возможность улучшения полученного первоначально решения и по столбцам.

Таблица 2.3.

Пункт потребления		Пункты отправления				Потребность в грузах, т
		A_1	A_2	A_3	A_4	
Потенциал	U / V	0	6	1	5	
$Б_1$	6	6 30	* 3	6	* 3	30
$Б_2$	3	3 80	7	* 2 130	5	210
$Б_3$	7	② 5	4	⑥ 3	* 2 60	60
$Б_4$	1	** 1 80	4	** 1	3	80
$Б_5$	7	7 10	** 1 80	6	* 2 30	120
Наличие груза, т		200	80	130	90	500

4. Проверка оптимальности решения.

Решение транспортной задачи линейной оптимизации оптимально тогда, когда среди пустых клеток матрицы нет клеток (нет транспортных связей), заполнение которых может привести к дальнейшему улучшению решения.

Для проверки оптимальности полученного первоначального распределения находят специальные показатели для столбцов U и строк V, называемые потенциалами. Для каждой загруженной клетки разность между соответствующими этой клетке потенциалами должна быть равна расстоянию, указанному в этой клетке, т.е.

$$V - U = c \qquad (2.7.)$$

В соответствии с этим все потенциалы определяются по следующему правилу.

Для одного из столбцов (грузоотправителей) принимают потенциал U, равный нулю. При этом целесообразно нулю приравнять потенциал того столбца, в котором имеется загруженная клетка с наибольшим расстоянием. Остальные потенциалы определяются по загруженным клеткам исходя из следующих формул:

для столбцов $\quad U = V - c \qquad (2.8.)$

для строк $\quad V = U + c \qquad (2.9.)$

Базисное решение (число загруженных клеток равно n + m – 1)

Таблица 2.3.

Пункт потребления		Пункты отправления				Потребность в грузах, т
		A_1	A_2	A_3	A_4	
Потенциал	U V	0	6	1	5	
$Б_1$	6	6 30	* 3	6	* 3	30
$Б_2$	3	3 80	7	* 2 130	5	210
$Б_3$	7	2 5	4	6 3	* 2 60	60
$Б_4$	1	** 1 80	4	** 1	3	80
$Б_5$	7	7 10	** 1 80	6	* 2 30	120
Наличие груза, т		200	80	130	90	500

Так в табл 2.3. загруженная клетка $A_1Б_5$ с наибольшим расстоянием находится в столбце A_1. Поэтому принимаем потенциал для этого столбца $U_1 = 0$. По загруженным клеткам этого столбца определяем потенциалы строк $Б_1$; $Б_2$; $Б_4$:

$V_1 = 0 + 6 = 6;$

$V_2 = 0 + 3 = 3;$

$V_4 = 0 + 1 = 1;$

$V_5 = 0 + 7 = 7.$

По загруженной клетке $A_3Б_2$ определяем потенциалы для столбца A_3

$U_3 = 3 - 2 = 1$

По загруженным клеткам $A_2Б_5$ и $A_4Б_5$ определяем потенциалы для столбцов A_2 и A_4

$U_2 = 7 - 1 = 6;$

$U_4 = 7 - 2 = 5;$

Получив потенциал столбца A_4 по загруженной клетке $A_4Б_3$ определяем потенциал строки $Б_3$

$U_3 = 5 + 2 = 7.$

Таблица 2.3.

Пункт потребления		Пункты отправления				Потребность в грузах, т
		A_1	A_2	A_3	A_4	
Потенциал	U / V	0	6	1	5	
$Б_1$	6	6 30	* 3	6	* 3	30
$Б_2$	3	3 80	7	* 2 130	5	210
$Б_3$	7	2 5	4	6 3	* 2 60	60
$Б_4$	1	** 1 80	4	** 1	3	80
$Б_5$	7	7 10	** 1 80	6	* 2 30	120
Наличие груза, т		200	80	130	90	500

После определения потенциалов рассматриваются все незагруженные клетки и среди них отыскиваются такие, для которых разность d между соответствующими им потенциалами будет больше расстояния, указанного в этой клетке, т.е. $V - U > C$.

Для каждой такой клетки определяется число

$$d = V - U - C \qquad (2.10)$$

Если разность потенциалов меньше расстояния $d = V - U < C$, то такие клетки из дальнейшего анализа исключаются.

Если разность потенциалов больше расстояния $d = V - U > C$, то наличие таких клеток показывает, что это распределение не является оптимальным и его можно улучшить, т.е. можно найти более лучший план перевозок.

Улучшение плана перевозок заключается в том, что разгружаются некоторые заполненные клетки и заполняются другие, бывшие ранее пустыми. Смысл такие действия имеют в том случае, если это приводит к уменьшению значения общих затрат на перевозки. С целью улучшения плана перевозки, вычисления ведутся до тех пор, пока имеются клетки, где есть положительные значения d. Их отсутствие показывает, что

Таблица 2.3.

Пункт потребления		Пункты отправления				Потребность в грузах, т
		A_1	A_2	A_3	A_4	
Потенциал	U / V	0	6	1	5	
$Б_1$	6	6 30	* 3	6	* 3	30
$Б_2$	3	3 80	7	* 2 130	5	210
$Б_3$	7	2 5	4	6 3	* 2 60	60
$Б_4$	1	** 1 80	4	** 1	3	80
$Б_5$	7	7 10	** 1 80	6	* 2 30	120
Наличие груза, т		200	80	130	90	500

улучшить распределение нельзя, что оно является оптимальным, т.е. получено оконча-
тельное решение.

Если в матрице, где записано окончательное распределение, имеются незагружен-
ные клетки, для которых d=0, то можно получить и другие варианты распределения.
Это делается путём построения контура для клетки с d=0 и соответствующих переме-
шений всей наименьшей загрузки или части её. Эти варианты тоже будут оптимальны-
ми, т.е. минимальная сумма т·км останется такой же, но закрепление потребителей за
поставщиками будет иное

Определение d для всех незагруженных клеток матрицы табл 2.3.

$A_2Б_1$; $d_{12} = V_1 - U_2 = 6 - 6 < 3$; $A_3Б_1$; $d_{13} = V_1 - U_3 = 6 - 1 < 6$;

$A_4Б_1$; $d_{14} = V_1 - U_4 = 6 - 5 < 3$; $A_2Б_5$; $d_{24} = 3 - 6 < 7$; $A_4Б_2$; $d_{42} = 3 - 5 < 5$;

$A_1Б_3$; $d_{31} = 7 - 5 > 0$; $A_2Б_3$; $d_{32} = 7 - 6 < 4$; $A_3Б_3$; $d_{33} = 7 - 1 > 3$;

$A_4Б_1$; $d_{14} = V_1 - U_4 = 6 - 5 < 3$; $A_2Б_5$; $d_{24} = 3 - 6 < 7$; $A_4Б_2$; $d_{42} = 3 - 5 < 5$;

$A_3Б_4$; $d_{43} - 1 - 1 - 0$.

*Покажем положительные числа d непосредственно в левых верхних углах соот-
ветствующих клеток ($A_1Б_3$ и $A_3Б_3$) табл. 2.3. Наличие таких клеток показывает, что
это распределение не является оптимальным и его можно улучшить, т.е. можно
найти более хороший план перевозок.*

Таблица 2.3.

Пункт потребления		Пункты отправления				Потребность в грузах, т
		A_1	A_2	A_3	A_4	
Потенциал	U V	0	6	1	5	
$Б_1$	6	6 30	* 3	6	* 3	30
$Б_2$	3	3 80	7	* 2 130	5	210
$Б_3$	7	2 5	4	6 3	* 2 60	60
$Б_4$	1	** 1 80	4	** 1	3	80
$Б_5$	7	7 10	** 1 80	6	* 2 30	120
Наличие груза, т		200	80	130	90	500