Урок по теме "Логарифмические уравнения". Алгебра и начала анализа 10 класс.

Логарифмическое уравнение.

$\log_a x = b$, где $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Уравнение содержащее переменную под знаком логарифма, называется логарифмическим.

Решение логарифмического уравнения.

Решение логарифмического уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ основано на том, что такое уравнение равносильно уравнению $f(x) = g(x)$ при дополнительных условиях $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

Виды уравнений.

Мы рассмотрим следующие виды уравнений:

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = b,$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) = b,$$

$$\log_a f(x) \cdot \log_a g(x) = \log_a f(x),$$

$$a^{\log_c f(x)} \cdot b^{\log_c g(x)} = a \cdot b,$$

$$\log_a{}^2 f(x) + \log_a f(x) = b,$$

$$\log_a x + \log_x a = b.$$

Пример1. Решить уравнение

$$\log_5(3x-2)=\log_5 7.$$

Помним, что логарифмическая функция ограничена в
своей области определения,
поэтому начнем с области определения.

$$1.\,3x-2\rangle 0$$

$$3x\rangle 2$$

$$x\rangle \frac{2}{3}.$$

$$2.\,3x-2=7$$

$$3x=2+7$$

$$3x=9$$

$$x=3.$$

3. Проверим, входит ли полученный корень,
в область определения,
и записываем ответ. Ответ: 3.

Пример 2. Решить уравнение:

$$\log_3(x^2+x+3)=2.$$

Начнем с области определения.

$$1.\,x^2+x+3\rangle 0.$$

$$y=x^2+x+3$$

-парабола, ветви вверх, найдем пересечение с Ох,
- для этого решим уравнение

$$x^2+x+3=0.$$

Это уравнение не имеет корней, следовательно, график параболы выше оси Ох при любых значениях х.

2. Решаем уравнение вида

$$x^2+x+3=3^2$$

. Решая это квадратное уравнение получаем корни $x_1 = 2$, $x_2 = -3$. Так как область определения неограниченна, оба эти числа идут в ответ.

Ответ:-3, 2.

Самостоятельная работа.

Итак, предлагаемые для решения уравнения:

$$\log_3(5x-1)=2,$$

$$\lg(2-5x)=1,$$

$$\log_4(2x-3)=1,$$

$$\log_3(5x+3)=\log_3(7x+5),$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)=\log_{\frac{1}{2}}(6x+8).$$

Пример 1. Решить уравнение:

$$\log_2(1-x) = 3 - \log_2(3-x).$$

$$\log_2(1-x) + \log_2(3-x) = 3,$$
$$\log_2(1-x)(3-x) = 3,$$
$$(1-x)(3-x) = 2^3,$$

Раскрываем скобки, получаем квадратное уравнение.

решение $: x_1 = 5, x_2 = -1.$

Проверка показывает, что число 5
не является корнем исходного уравнения,
так как при подстановке левая и правая
части теряют смысл.

Ответ: -1.

Пример 2. Решить уравнение.

$$\log_4(x^3 - x) - \log_4 x = \log_4 3.$$
$$\log_4 \frac{x^3 - x}{x} = \log_4 3,$$
$$\frac{x^3 - x}{x} = 3,$$

Решая, получаем корни: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$.
Проверкой убеждаемся,
что x = 2 – корень уравнения, а
x = -2 не является корнем уравнения.

Ответ: 2.

Обратим внимание, что при решении логарифмических уравнений замена логарифма произведения суммой логарифмов, логарифма частного разностью логарифмов может привести к потере корней!

Практическая работа.

Решите уравнения:
1 вариант.

$$\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3,$$
$$\lg(x-1)-\lg(2x-11)=\lg 2.$$

Решите уравнения:
[illegible] вариант.

$$\log_3(x-2)+\log_3(x+6)=2,$$
$$\lg(3x-1)-\lg(x+5)=\lg 5.$$

Пример 1. Решите уравнение:

$$\log_4(2x-1)\cdot\log_4 x = 2\log_4(2x-1)$$

Решается это уравнение путем разложения на множители.

$$\log_4(2x-1)\cdot\log_4 x - 2\log_4(2x-1) = 0,$$
$$\log_4(2x-1)\cdot(\log_4 x - 2) = 0,$$
$$\log_4(2x-1) = 0, \log_4 x - 2 = 0,$$
$$1.\log_4(2x-1) = 0,$$
$$2x-1 = 4^0,$$
$$2x = 2$$
$$x = 1.$$
$$2.\log_4 x = 2,$$
$$x = 4^2,$$
$$x = 16.$$

Проверка показывает, что оба эти числа являются корнями уравнения. Ответ: 1, 16.

Пример 2. Решите уравнение:

$$2^{3\lg x}\cdot 5^{\lg x} = 1600.$$

Чтобы его решить, нужно вспомнить свойства показательной функции.

$$(8^{\lg x})\cdot 5^{\lg x} = 1600,$$
$$(8\cdot 5)^{\lg x} = 1600,$$
$$40^{\lg x} = 40^2,$$
$$\lg x = 2,$$
$$x = 10^2,$$
$$x = 100.$$

Проверка показала, что x = 100 является корнем уравнения.

Ответ: 100.

Пример 1.

$$\log_2^2(x-1)-3\log_2(x-1)=4,$$
$$\textit{пусть}\ \log_2(x-1)=y,$$
$$\textit{получаем}: y^2-3y-4=0,$$
$$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-4)=25,$$
$$x_1=\frac{3+5}{2}=4, x_2=\frac{3-5}{2}=-1,$$
$$1.\log_2(x-1)=4,$$
$$x-1=2^4,$$
$$x=17.$$
$$2.\log_2(x-1)=-1,$$
$$x-1=2^{-1},$$
$$x=1\frac{1}{2}.$$

Проверка показала, что оба корня подходят.
Ответ: $1\frac{1}{2}, 17.$

Пример 2.

$$\log_2 x-2\log_x 2=-1,$$
$$\log_2 x-\frac{2}{\log_2 x}=-1,$$
$$x > 0, x\neq 1.$$

Пусть $\log_2 x = y.$

Получаем уравнение:

$$y-\frac{2}{y}=-1,$$
$$\frac{y^2+y-2}{y}=0,$$
$$y\neq 0,$$
$$y^2+y-2=0,$$
$$D=1^2-4\cdot1\cdot(-2)=9,$$
$$y_1=\frac{-1+3}{2}=1, y_2=\frac{-1-3}{2}=-2,$$
$$\log_2 x=1,$$
$$x=2,$$
$$\log_2 x=-2,$$
$$x=\frac{1}{4}.$$

Оба эти корня удовлетворяют условию уравнения.
Ответ: $\frac{1}{4}, 2.$

Применение на ГИА .

1)
$\log_{0.2}(x+1)+\log_{0.2}7=-2$
1)2; 2)18; 3) $\frac{7}{18}$. 4) $2\frac{4}{7}$.

Решение:

1. x + 1 >0, x >-1.

2. $\log_{0,2}7(x + 1)= -2$,
$7(x + 1) = 0{,}2^{-2}$,
$7x + 7 = 5^2$,
7x + 7 = 25,
7x = 25 – 7,
7x = 18,

$x = 2\frac{4}{7}$.
Ответ:4.

2)
$\log_{0.3}(7x+5) - \log_{0.3}3 = \log_{0.3}4$
1)7; 2)0; 3)1; 4)4.
Решение:
1.7x + 5 >0, 7x > -5, x> $-\frac{5}{7}$.
2. $\log_{0,3}(7x + 5) = \log_{0,3}3 + \log_{0,3}4$,
$\log_{0,3}(7x + 5) = \log_{0,3}12$,
7x + 5 = 12,
7x = 12 – 5,
7x = 7,
x = 1.

Ответ:3

Реши сам.

А201. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения
$2\log_2 3 - \log_2(x+1) = 1 + \log_2 3$.

1) $(-1; 0)$; 2) $(1; 3)$; 3) $(0; 1)$; 4) $(3; +\infty)$.

А202. Найдите сумму корней уравнения
$2\log^2_4 x - 5\log_4 x + 2 = 0$.

1) 2,5; 2) 18; 3) 14; 4) 1,5.

А203. Найдите сумму корней уравнения
$\log_\pi x^2 = \log_\pi(7x - 12)$.

1) −1; 2) 1; 3) −7; 4) 7.

А204. Укажите промежуток, которому принадлежит больший корень уравнения
$\log_2(2x-3)^2 = 0$.

1) $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$; 3) $[2; 4)$; 4) $[4; +\infty)$.

А205. Найдите произведение корней уравнения
$\log_{11}(x^2 + 21) = 2$.

1) −100; 2) −1; 3) −10; 4) 100.