





Логарифмическое уравнение.

$$\log_a x = b, \text{ где } x > 0, a > 0, a \neq 1.$$

Уравнение содержащее переменную под знаком логарифма, называется логарифмическим.

Решение логарифмического уравнения.

Решение логарифмического уравнения вида

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ основано на том, что такое уравнение равносильно уравнению $f(x) = g(x)$ при дополнительных условиях $f(x) > 0, g(x) > 0$.

Виды уравнений.

Мы рассмотрим следующие виды уравнений:

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = b,$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) = b,$$

$$\log_a f(x) \cdot \log_a g(x) = \log_a f(x),$$

$$a^{\log_c f(x)} \cdot b^{\log_c g(x)} = a \cdot b,$$

$$\log_a^2 f(x) + \log_a f(x) = b,$$

$$\log_a x + \log_x a = b.$$

Пример 1. Решить уравнение

$$\log_5(3x - 2) = \log_5 7.$$

Помним, что логарифмическая функция ограничена в своей области определения, поэтому начнем с области определения.

$$1. 3x - 2 > 0$$

$$3x > 2$$

$$x > \frac{2}{3}.$$

$$2. 3x - 2 = 7$$

$$3x = 2 + 7$$

$$3x = 9$$

$$x = 3.$$

3. Проверим, входит ли полученный корень, в область определения, и записываем ответ.
3.

Ответ:

Пример 2. Решить уравнение:

$$\log_3(x^2 + x + 3) = 2.$$

Начнем с области определения.

$$1. x^2 + x + 3 > 0.$$

$$y = x^2 + x + 3$$

- парабола, ветви вверх, найдем пересечение с Ох,
- для этого решим уравнение

$$x^2 + x + 3 = 0.$$

Это уравнение не имеет корней, следовательно, график параболы выше оси Ох при любых значениях х.

2. Решаем уравнение вида

$$x^2 + x + 3 = 3^2$$

Решая это квадратное уравнение получаем корни $x_1 = 2$, $x_2 = -3$.
Так как область определения неограниченна, оба эти числа идут в ответ.

Ответ: -3, 2.

Самостоятельная работа.

Итак, предлагаемые для решения
уравнения:

$$\log_3(5x - 1) = 2,$$

$$\lg(2 - 5x) = 1,$$

$$\log_4(2x - 3) = 1,$$

$$\log_3(5x + 3) = \log_3(7x + 5),$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x - 1) = \log_{\frac{1}{2}}(6x + 8).$$

Пример 1. Решить уравнение:

$$\log_2(1-x) = 3 - \log_2(3-x).$$

$$\log_2(1-x) + \log_2(3-x) = 3,$$

$$\log_2(1-x)(3-x) = 3,$$

$$(1-x)(3-x) = 2^3,$$

Раскрываем

скобки, получаем

квадратное

уравнение.

решение : $x_1 = 5, x_2 = -1$.

Проверка показывает, что число 5 не является корнем исходного уравнения, так как при подстановке левая и правая части теряют смысл.

Ответ: -1.

Пример 2. Решить уравнение.

$$\log_4(x^3 - x) - \log_4 x = \log_4 3.$$

$$\log_4 \frac{x^3 - x}{x} = \log_4 3,$$

$$\frac{x^3 - x}{x} = 3,$$

Решая, получаем корни: $x_1 = 2; x_2 = -2$.
Проверкой убеждаемся, что $x = 2$ – корень уравнения, а $x = -2$ не является корнем уравнения.

Ответ: 2.

Обратим внимание, что при решении логарифмических уравнений замена логарифма произведения суммой логарифмов, логарифма частного разностью логарифмов может привести к потере корней!

Практическая работа

Решите уравнения:

1 вариант.

$$\log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) = 3,$$

$$\lg(x - 1) - \lg(2x - 11) = \lg 2.$$

Решите уравнения:

2 вариант.

$$\log_3(x - 2) + \log_3(x + 6) = 2,$$

$$\lg(3x - 1) - \lg(x + 5) = \lg 5.$$

Пример 1. Решите уравнение:

$$\log_4(2x-1) \cdot \log_4 x = 2 \log_4(2x-1)$$

Решается это уравнение путем разложения на множители.

$$\log_4(2x-1) \cdot \log_4 x - 2 \log_4(2x-1) = 0,$$

$$\log_4(2x-1) \cdot (\log_4 x - 2) = 0,$$

$$\log_4(2x-1) = 0, \log_4 x - 2 = 0,$$

$$1. \log_4(2x-1) = 0,$$

$$2x-1 = 4^0,$$

$$2x = 2$$

$$x = 1.$$

$$2. \log_4 x = 2,$$

$$x = 4^2,$$

$$x = 16.$$

Проверка показывает, что оба эти числа являются корнями уравнения. Ответ: 1, 16.

Пример 2. Решите уравнение:

$$2^{3 \lg x} \cdot 5^{\lg x} = 1600.$$

Чтобы его решить, нужно вспомнить свойства показательной функции.

$$(8^{\lg x}) \cdot 5^{\lg x} = 1600,$$

$$(8 \cdot 5)^{\lg x} = 1600,$$

$$40^{\lg x} = 40^2,$$

$$\lg x = 2,$$

$$x = 10^2,$$

$$x = 100.$$

Проверка показала, что $x = 100$ является корнем уравнения.
Ответ: 100.

Пример

1.

$$\log_2^2(x-1) - 3\log_2(x-1) = 4,$$

$$\text{пусть } \log_2(x-1) = y,$$

$$\text{получаем : } y^2 - 3y - 4 = 0,$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25,$$

$$x_1 = \frac{3+5}{2} = 4, x_2 = \frac{3-5}{2} = -1,$$

$$1. \log_2(x-1) = 4,$$

$$x-1 = 2^4,$$

$$x = 17.$$

$$2. \log_2(x-1) = -1,$$

$$x-1 = 2^{-1},$$

$$x = 1\frac{1}{2}.$$

Проверка показала, что оба корня подходят.

Ответ: $1\frac{1}{2}, 17.$

Пример

2.

$$\log_2 x - 2\log_x 2 = -1,$$

$$\log_2 x - \frac{2}{\log_2 x} = -1,$$

$$x \neq 0, x \neq 1.$$

$$\text{Пусть } \log_2 x = y.$$

Получаем
уравнение:

$$y - \frac{2}{y} = -1,$$

$$\frac{y^2 + y - 2}{y} = 0,$$

$$y \neq 0,$$

$$y^2 + y - 2 = 0,$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9,$$

$$y_1 = \frac{-1+3}{2} = 1, y_2 = \frac{-1-3}{2} = -2,$$

$$\log_2 x = 1,$$

$$x = 2,$$

$$\log_2 x = -2,$$

$$x = \frac{1}{4}.$$

Оба эти корня удовлетворяют
условию уравнения.

Ответ: $\frac{1}{4}, 2.$



Применение на ГИА .

1)

$$\log_{0,2}(x+1) + \log_{0,2} 7 = -2$$

1) 2; 2) 18; 3) $\frac{7}{18}$; 4) $2\frac{4}{7}$.

Решение:

1. $x + 1 > 0, x > -1.$
2. $\log_{0,2} 7(x + 1) = -2,$
 $7(x + 1) = 0,2^{-2},$
 $7x + 7 = 5^2,$
 $7x + 7 = 25,$
 $7x = 25 - 7,$
 $7x = 18,$

$$x = 2\frac{4}{7}.$$

Ответ: 4.

2)

$$\log_{0,3}(7x+5) - \log_{0,3} 3 = \log_{0,3} 4$$

1) 7; 2) 0; 3) 1; 4) 4.

Решение:

1. $7x + 5 > 0, 7x > -5, x > -\frac{5}{7}.$
2. $\log_{0,3}(7x + 5) = \log_{0,3} 3 + \log_{0,3} 4,$
 $\log_{0,3}(7x + 5) = \log_{0,3} 12,$
 $7x + 5 = 12,$
 $7x = 12 - 5,$
 $7x = 7,$
 $x = 1.$

Ответ: 3

Реши сам.



A201. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения
 $2\log_2 3 - \log_2(x+1) = 1 + \log_2 3$.

- 1) $(-1; 0)$; 2) $(1; 3)$; 3) $(0; 1)$; 4) $(3; +\infty)$.

A202. Найдите сумму корней уравнения
 $2\log_4^2 x - 5\log_4 x + 2 = 0$.

- 1) 2,5; 2) 18; 3) 14; 4) 1,5.

A203. Найдите сумму корней уравнения
 $\log_\pi x^2 = \log_\pi(7x - 12)$.

- 1) -1; 2) 1; 3) -7; 4) 7.

A204. Укажите промежуток, которому принадлежит больший корень уравнения
 $\log_2(2x - 3)^2 = 0$.

- 1) $(-\infty; \frac{3}{2})$; 2) $(\frac{3}{2}; 2)$; 3) $[2; 4)$; 4) $[4; +\infty)$.

A205. Найдите произведение корней уравнения
 $\log_{11}(x^2 + 21) = 2$.

- 1) -100; 2) -1; 3) -10; 4) 100.