

Системы счисления



Цели занятия:

- 1) Закрепить понятия «число», «цифра»
- 2) Раскрыть понятия «система счисления», «алфавит» системы счисления
- 3) Ознакомить учащихся с историей развития систем счисления и дать их классификацию
- 4) Закрепить умения:
 - представление числа в различных системах счисления
 - представление числа в развернутой и свернутой формах
 - научиться переводить числа из различных систем счисления в десятичную



Содержание

1. Основные понятия. Виды систем счисления
2. Непозиционные системы счисления
3. Позиционные системы счисления
4. Десятичная система счисления
5. Двоичная система счисления
6. Восьмеричная система счисления
7. Шестнадцатеричная система счисления
8. Перевод чисел в десятичную сс
9. Задания для самостоятельного выполнения



Основные понятия

Система счисления - это способ записи чисел и правила действий над этими числами

Число - это величина, а не символьная запись

Цифра - набор символов, участвующих в записи числа

Алфавит - совокупность различных цифр, используемых для записи числа



Виды систем счисления

Позиционные

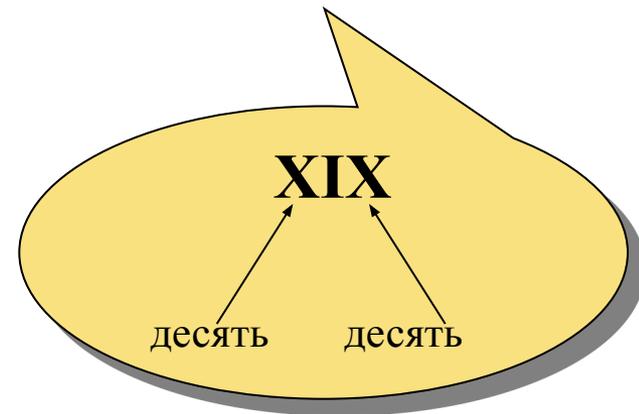
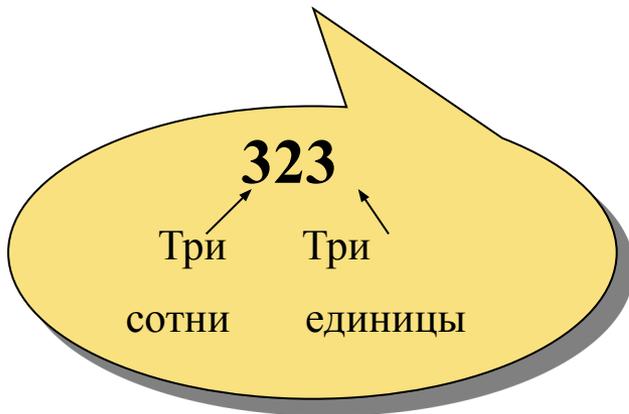
ЗАВИСИТ

значение цифры

от ее позиции в числе

Непозиционные

НЕ ЗАВИСИТ



Непозиционные системы счисления

- единичная

IIII

- древнеегипетская

ϣϣϣϣϣϣϣϣ

- вавилонская

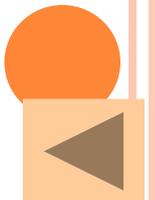
V<VV

- римская

I, V, X, L, C, D, M

- алфавитная

колода



Единичная («палочная система»)

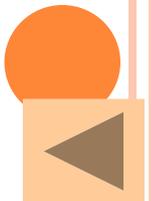
(период палеолита, 10-11 тысяч лет до н.э.)

Прежде чем человек научился считать или придумал слова для обозначения чисел, он, несомненно, владел наглядным, интуитивным представлением о числе.

Обозначение:



или



Вавилонская шестидесятеричная система (2 тысячи лет до н.э.)

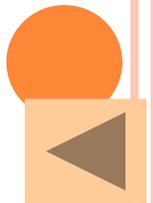
Первая известная нам система счисления, основанная на позиционном принципе.

Обозначение:

 - единицы  - десятки  - 60 ; 60^2 ; 60^3 ; ... ; 60^n

2-ой разряд 1-ый разряд = $60 + 20 + 2 = 82$



Римская система

(500 лет до н.э.)

В качестве цифр в римской системе используются:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Величина числа суммируется из значений цифр. При этом применяется следующее правило:

Значение каждой меньшей цифры, поставленной слева от большей, вычитается из значения большей цифры. Если меньшая цифра стоит справа от большей, их значения складываются.

Найдите значения чисел:

$$\mathbf{XXXII} = 32 \quad \mathbf{DXLII} = 542$$



Алфавитные системы

(500 лет до н.э.)

Алфавитной нумерацией пользовались южные и восточные славянские народы. Над буквой, обозначающей цифру, ставился специальный значок "˘" («титло»).

Обозначение:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

ā b̄ c̄ d̄ ē s̄ z̄ h̄ ī t̄

āī = 11, b̄ī = 12, c̄ī = 13, ..., īī = 19, ā = 40, Tā = 301.



Позиционные системы счисления

Каждая позиционная система счисления имеет определенный алфавит и основание.

Количество цифр – **основание (p)**

системы счисления

Совокупность всех цифр – **алфавит**

Позиционные системы могут иметь различный алфавит (2,3,4 знака).



Позиция цифры в числе называется **разрядом**.

Для записи чисел в позиционной системе с основанием p нужно иметь алфавит из p цифр. При $p > 10$ к десяти арабским цифрам добавляют латинские буквы.

Алфавиты систем счисления

Основание	Название	Алфавит
$p = 2$	<i>Двоичная</i>	<i>0 1</i>
$p = 3$	<i>Троичная</i>	<i>0 1 2</i>
$p = 8$	<i>Восьмеричная</i>	<i>0 1 2 3 4 5 6 7</i>
$p = 16$	<i>Шестнадцатеричная</i>	<i>0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F</i>



ПРИМЕРЫ: (перепиши, вставляя пропущенные числа)

1. $p = 10$ (десятичная с/с)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 и т.д.

2. $p = 4$ (четверичная с/с)

1 2 3 10 11 12 13 20 21 22 23 30 _ _ _ _

3. $p = 2$ (двоичная с/с)

1 10 11 100 101 110 111 1000 _ _ 1010 1011 _ _
_ _ 10000 _ _

4. $p = 16$ (шестнадцатеричная с/с)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 1A
1B _ _ _ _



Вопрос для обсуждения

В наше время для записи чисел чаще всего используются две системы счисления:

- арабская десятичная (цифры 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)*
- римская (цифры I,V,X,L,C,M)*

1. Где сегодня используется римская система счисления для записи чисел?

Рассмотрим 2 числа: XXX и 333.

2. Чем отличается принцип записи многозначных чисел в римской и арабской системах счисления?



Десятичная система счисления

Получив название *арабской* эта система счисления, в XII веке распространилась по всей Европе.

Система счисления, применяемая в современной математике, является *позиционной десятичной системой*.

Её **основание** равно десяти, т.к. запись любых чисел производится с помощью десяти цифр:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 - **алфавит**.



Рассмотрим десятичное число **555**:

Число записано в привычной для нас **свернутой** **форме**:

В зависимости от позиции цифра 5 обозначает единицы, десятки, сотни.

5	5	5	10
↑	↑	↑	
с	д	е	
о	е	д	
т	с	и	
н	я	н	
и	т	и	
	к	ц	
	и	ы	

Из двух написанных рядом одинаковых цифр левая в десять раз больше правой.



В **развернутой форме** записи числа умножение цифр производится в явной форме:

$$555_{10} = 5 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Любое число в нулевой степени равно 1

Для записи десятичных дробей используются разряды с отрицательными значениями степеней *основания*:

*Любое число в отрицательной степени = единица / число в положительной степени:
 $10^{-1} = 1/10^1$, $10^{-2} = 1/10^2$*

$$555,55_{10} = 5 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$$

2 1 0 -1 -2

Степень основания

*Первый разряд цифры, стоящей слева от запятой равен 0
 Основание системы счисления*

Номер разряда стоящей в нем цифры равен значению степени основания



Вопрос для обсуждения

1) В какой системе счисления удобнее считать?

2) Почему арабская система называется десятичной?



Двоичная система счисления

*Информация в компьютере представлена в двоичном коде.
Используется двоичная система счисления.*

Двоичная система счисления является *позиционной системой счисления.*

Алфавит двоичной системы – две цифры (0,1),
основание равно 2.

Из двух написанных рядом одинаковых цифр левая в два раза больше правой.



Число в **свернутой форме** записывается так:

$$101,01_2$$

В **развернутой форме** число записывается в виде суммы ряда степеней основания 2 с коэффициентами, в качестве цифр 0 или 1.

$$101,01_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 5,25_{10}$$



Восьмеричная система счисления

Широко используется в информатике.

Восьмеричная система счисления является *позиционной системой счисления.*

Алфавит восьмеричной системы – цифры (0,1,2,3,4,5,6,7), **основание** равно 8.

Из двух написанных рядом одинаковых цифр левая в восемь раз больше правой.



Число в **свернутой форме** записывается так:

$$137,2_8$$

В **развернутой форме** число записывается в виде суммы ряда степеней основания 8 с коэффициентами, в качестве цифр от 0 до 7.

$$137,2_8 = 1 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^{-1} = 95,25_{10}$$



Шестнадцатеричная система счисления

Широко используется в информатике.

Шестнадцатеричная система счисления является *позиционной системой счисления*.

Алфавит шестнадцатеричной системы – цифры (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F), **основание** равно 16.

(Десятичное значение: $A=10$, $B=11$, $C=12$, $D=13$, $E=14$, $F=15$)

Из двух написанных рядом одинаковых цифр левая в шестнадцать раз больше правой.



Число в **свернутой форме** записывается так:

$$12A,4_{16}$$

В **развернутой форме** число записывается в виде суммы ряда степеней основания 16 с коэффициентами, в качестве цифр от 0 до F, выражая шестнадцатеричные цифры через их десятичное значение (A=10, F=15).

$$12A,4_{16} = 1 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0 + 4 \cdot 16^{-1} = 298,25_{10}$$



*Алгоритм перевода чисел,
записанных в произвольной системе счисления,
в десятичную систему счисления*

1. Записать число в развернутой форме в виде сумм ряда степеней основания системы счисления с коэффициентами в качестве цифр данной системы счисления.

2. Вычислить полученную сумму.

$$231,2_4 = 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 + 2 \cdot 4^{-1} = 45,5_{10}$$

$$112_3 = 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 14_{10}$$

$$134_6 = 1 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^0 = 58_{10}$$



Задания для самостоятельного выполнения

Задание 1

Задание 2

Задание 3

Задание 4

Задание 5

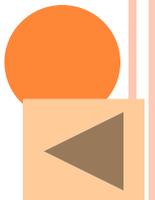
Задание 6



Какое минимальное основание должна иметь система счисления, если в ней можно записать числа:

- а) 341
- б) 123
- в) 222
- г) 111

Ответ: а) 341 ($p=5$) в) 222 ($p=3$)
 б) 123 ($p=4$) г) 111 ($p=2$)



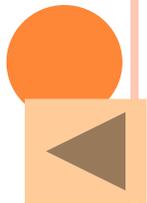
Какое число ошибочно записано в:

а) троичной СС – 79, 212, 531

б) девятеричной СС – 419, 832, 4A

Ответ: а) в троичной СС для записи чисел используются цифры 0 1 2 , значит цифры 79 и 531 записаны неверно

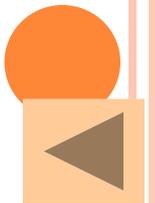
б) в девятиричной СС для записи чисел используются цифры 0 1 2 3 4 5 6 7 8, значит цифры 419 и 4A записаны неверно



Какое максимальное число можно записать в двоичной системе счисления четырьмя цифрами?

Переведите полученное число в десятичную систему счисления.

Ответ: $1111_2 = 15_{10}$.



Определите четное число или нечетное:

а) 101_2

б) 110_2

в) 1001_2

г) 100_2

Сформулируйте критерий четности в двоичной системе счисления.

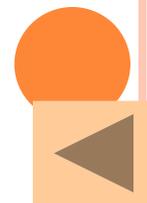
Ответ: четное число в двоичной системе счисления оканчивается на 0, а нечетное – на 1.

а) $101_2 = 5_{10}$

в) $1001_2 = 9_{10}$

б) $110_2 = 6_{10}$

г) $100_2 = 4_{10}$



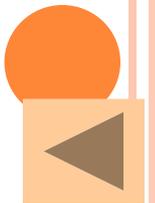
Было 11 яблок. После того как каждое яблоко разрезали пополам, стало 110 половинок.

Возможно ли это? Обоснуйте ответ.

Ответ: да, если считать числа в задаче, представленными в двоичной системе счисления:

$$11_2 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 3_{10};$$

$$110_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 + 2 = 6_{10}$$



Выпишите алфавит традиционной позиционной пятеричной системы счисления.

Переведите число 32_5 в десятичную систему счисления.

Ответ: алфавит пятеричной системы счисления – цифры (0,1,2,3,4).

$$32_5 = 3 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 15 + 2 = 17_{10}$$

